BAILS, Benito

Elementos de matemática / por D. Benito Bails... ; tomo V. -- Madrid : Por D. Joachin Ibarra..., 1780

[4], XLIV, 604 p., [18] h. de lám. pleg., a-c8, A-Z8, 2A-2O8, 2P6 ; 4º

Antep. -- Marca de imp. en port. -- Las h. de lám. pleg. son calc.

1. Matemáticas-Tratados, manuales, etc. 2. Matematikak-Tratatuak, eskuliburuak, etab. I. Título

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

TOMO V.

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,

Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

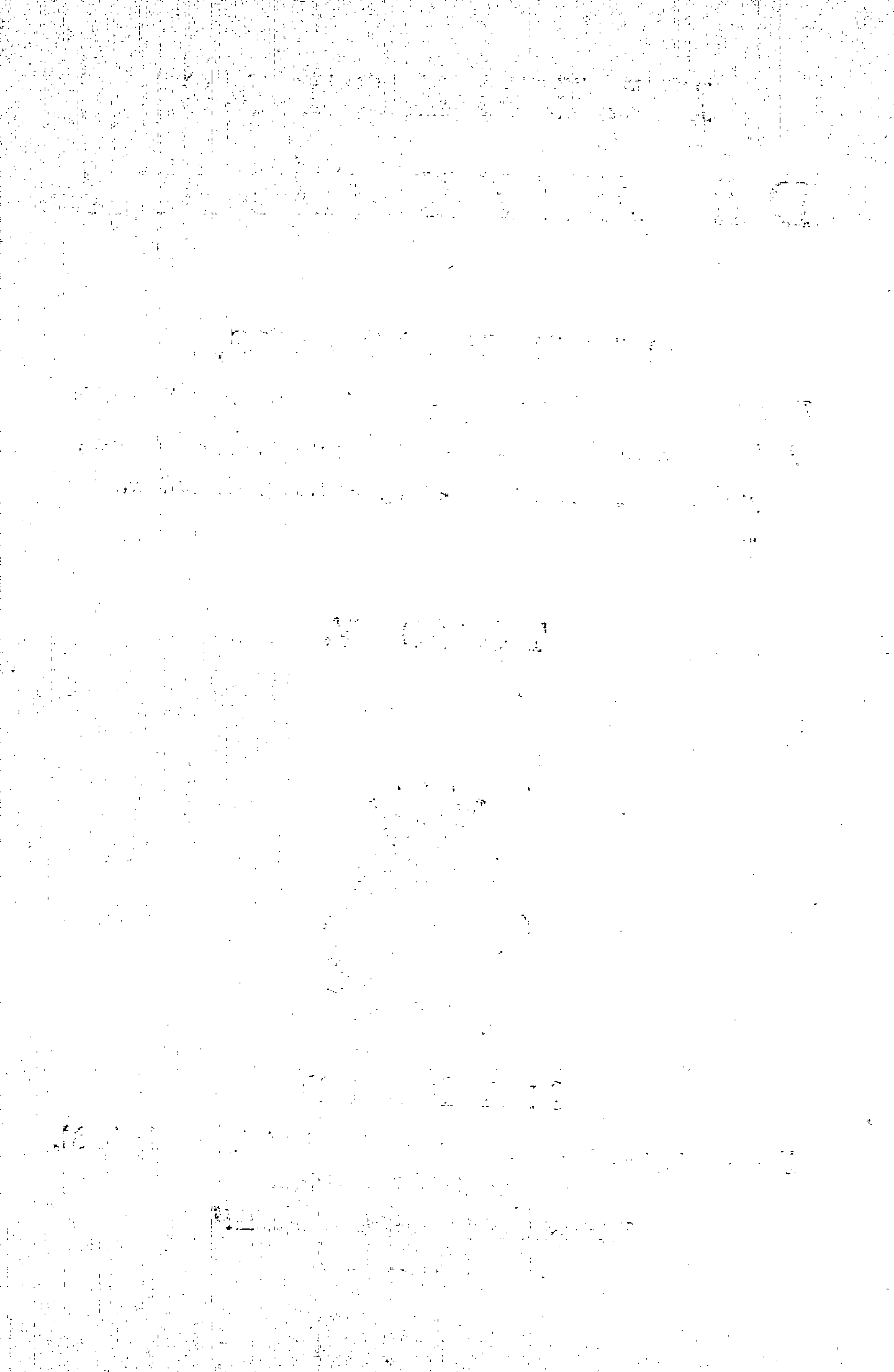
TOMO V.



MADRID.

Por D. JOACHIN IBARRA, Impresor de Cámara de S. M. y de la Real Academia.

M.DCC.LXXX.



PRÓLOGO.

Si la prueba mayor de ser muy arduo un asunto, es la gran variedad de pareceres entre los escritores que le han tratado, no puede menos de ser la Hydrodinámica el ramo mas dificultoso de toda la matemática mixta, conforme lo insinuamos en el prólogo del tomo antecedente. Aunque para guiarnos en las investigaciones peculiares á esta ciencia, cuyos dos ramos son la Hydrostática que averigua las leyes del equilibrio de los fluidos, y la Hidráulica que indaga las de su movimiento, suministra reglas incontrastables la Dinámica; sin embargo se diferencia tanto la naturaleza de los fluidos de la de los sólidos, es tan distinto el modo de obrar, comprimir, é impeler de unos y otros, que son muchas, y dificultosísimas de declarar las dudas que se nos ofrecen en la resolucion de casi todas las cuestiones de Hydrodinámica. Desde luego nadie sabe, y es punto muy controvertido entre los Físicos, qual sea la naturaleza de los fluidos; si consiste en la extremada mobilidad de sus partes elementales, ó en su actual movimiento. Y si bien parece que el decidir este punto no es de la incumbencia del Matemático, ha habido no obstante escritores de no vulgar autoridad, que fundaron en la opinion que acerca de esto seguian la resolucion de algunas dificultades de Hydrodinámica.

Sabemos por otra parte que los sólidos solo comprimen en la direccion de la gravedad, ó de arriba abaxo no mas, siendo así que la presion de los fluidos obra en qualesquiera direcciones: un sólido puesto encima de una mesa comprime, ó carga la mesa, pero ninguna presion experimentan de su parte los demas cuerpos que tiene al rededor de sí, por mas inmediatos que esten; un cuerpo fluido metido en un vaso, el agua por exemplo, tiene un conato para salirse por todos lados, pues si se hace un agujero en el suelo, ó las paredes del vaso se sale al instante el agua por él; señal evidente de que la fuerza que hacia para salirse, ó la presion que obraba contra las paredes del vaso estaba comprimida. Fuera de esto, todas las partes de un sólido que se mueve tienen un mismo movimiento, las de un fluido que corre le tienen distinto, variando este en algunos casos de un instante para otro; porque la velocidad del agua que sale por la luz, el emisario, ó el agujero de un vaso que se vacia va menguando succesivamente, y el agua de los rios corre con mas, ó menos aceleracion, segun las diferentes distancias á que está de las orillas, ó del suelo de su alveo. Ultimamente, si es cierto, como lo suponen grandes Matemáticos, bien que desechan este supuesto otros de no menores créditos, que los fluidos al salir por luces hechas en las peredes de los vasos donde están, los empujan con una direccion contraria á la del chorro, al modo que la pólvora quando se dispara una escopeta la impele ácia atrás; resultará de

aquí

aquí otra notabilísima diferencia entre el movimiento de los fluidos, y el de los sólidos, la qual no podrá menos de tener muchísimo influxo en varios asuntos de Hydrodinámica.

No es, pues, de estrañar que se haya escrito tanto, y con tanta variedad hasta el dia de hoy sobre el movimiento, y equilibrio de los fluidos, y que concuerden tan poco entre sí en algunos puntos de esta materia, el inmortal Newton, el gran Bernuli, el sagacísimo y elegante Daniel su hijo, y el profundo matemático Mr. D'Alembert. Pero de los dos argumentos principales que abraza la Hydrodinámica, el que se reduce á indagar como se equilibran los fluidos unos con otros, y con los sólidos que en ellos se sumergen, está casi apurado desde que dió exercicio á los primeros Matemáticos que le consideráron; el que ha dado, y dará todavía motivo á disputas es el que se dirige á averiguar que leyes sigue el movimiento de los fluidos, á pesar del empeño, y la constancia con que le ha promovido la ingeniosa, y docta Italia creadora de la ciencia Hidráulica.

Como el fin de todas las investigaciones Matemáticas es, y debe ser el beneficio de los hombres, y uno de los mayores es la equitativa distribucion de las aguas; aquí se les enseña como se miden, y reparten las que han de abastecer las fuentes de una poblacion, y las de los rios, de modo que ninguno de los hacendados entre quienes se ha de hacer su repartimiento pueda alegar justo

motivo de queja. Pero por ser ciencia tan metódica la Matemática, no se empeña de golpe en la mas dificultosa de estas dos determinaciones; procura conocer primero las circunstancias del movimiento de un fluido que sale de un vaso el qual se mantiene siempre lleno; cuyo caso bien se percibe quanta analogía tiene con el que se reduce á averiguar las que son peculiares al movimiento de las aguas de los rios, y de los canales de regadío. El punto mas importante que esta averiguacion encierra es apreciar la cantidad de fluido que en tiempo determinado arroja el orificio del vaso, de cuya determinacion es la velocidad un elemento principal; porque claro está que manteniéndose invariable la luz, saldrá tanto mayor cuerpo de agua en un mismo tiempo, quanto mas aprisa la arrojare.

El medir esta velocidad ha sido cabalmente el tropiezo de los mas esclarecidos Matemáticos. Castelli (*a*) creyó que era proporcional á la presion del fluido que descansa sobre el que está abocado al emisario; pero Lecchi hace patente (*b*), que en esto se equivocó Castelli, ora se mire la presion como proporcional á la altura del fluido desde la luz hasta su superficie, ora se mi-

(*a*) *Della misura dell'acque correnti di D. Benedetto Castelli Monaco Cassinense.* Está en el primero de los siete tomos en 4 que componen la obra intitulada: *Nuova Raccolta D'autori che trattano del moto dell'acque.* Parma 1766.

(*b*) *Idrostatica esaminata ne' suoi principi è stabilita nelle sue regole della misura dell'acque correnti dal P. Antonio Lecchi.* Milan 1765, un tomo en 4.

mire como proporcional á su gravedad específica. Newton imaginó (*c*) que el fluido toma dentro del vaso la forma de una especie de embudo, al qual llamó *cataracta*, que se va ensanchando desde abaxo ácia arriba, atribuyendo la velocidad del fluido que sale al peso del que forma la cataracta, sin dar otro destino al fluido restante, que comprimir el suelo del mismo vaso: "y como los lados de ,, la cataracta, dice Juan Bernuli (*d*), no tienen tiesura nin- ,, guna, y las presiones de las aguas detenidas no están ,, contrarestadas por presiones contrarias del agua que va ,, saliendo; es preciso que la porcion de agua que se su- ,, pone detenida, y está obrando una presion continua, ,, se introduzca en la cataracta, y la aniquile mezclándo- ,, se con el agua que corre. Luego la explicacion de ,, Newton no puede subsistir porque repugna con las leyes ,, de la Hidrostática."

En vista de la poca fortuna de Castelli, Newton y otros, se empeñó Daniel Bernuli en averiguar (*e*) las leyes fundamentales de la Hidráulica, ó del movimiento de los fluidos, para lo qual apeló al principio de la conservacion de las fuerzas vivas, que hemos dado á conocer en el tomo quarto. Pero sobre que este principio debe aplicarse

con

(*c*) *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica.*

(*d*) *Dissertatio Hidraulica* pag. 484 del tomo quarto de sus obras.

(*e*) *Danielis Bernoulli*, &c. *Hydrodynamica, sive de viribus & motibus fluidorum commentarii. Opus Academicum ab Auctore cum Petropoli ageret, congestum.* Strasburgo 1738, un tomo en 4.

con suma circunspeccion, conforme lo previene el mismo escritor, su padre tacha de indirecto este método, y esto le obligó á tratar la misma materia por los principios comunes de la Dinámica (*f*). Sin embargo, aunque ingenioso, y directo el método de este gran Geómetra, aunque confiesa Mr. D'Alembert que sus conseqüencias concuerdan con las que él saca de los principios en que funda el suyo, asegura el Matemático frances (*g*), que en algunos puntos no está demostrado el de Juan Bernuli. Finalmente, ademas de todas estas contradicciones, que nos basta apuntar muy por mayor, inspira no poca desconfianza el leer los muchos reparos que pone Mr. D'Alembert á la Teórica de Daniel Bernuli, y el brio con que sale á la defensa de este último el P. Escarela (*h*), no solo satisfaciendo á quanto le opone su adversario, sino tambien manifestando varios descuidos que, á su parecer, este padecio.

Por haber sido tan desgraciados los Matemáticos de primera gerarquía en buscar por rumbos teóricos las leyes de

(*f*) *Johannis Bernoulli Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis* 1732. Se halla en el tomo quarto de sus obras pag. 389.

(*g*) *Pag.* 75 de su *Traité de l'équilibre & du mouvement des fluides, pour servir de suite au Traité de Dynamique. Par Mr. D' Alembert, &c.* Paris 1770 un tomo en 4. Es segunda edicion añadida.

(*h*) En su obra intitulada *Physicæ particularis de corporibus vitæ experiibus tomus primus continens Hydrodinamicam, Auctore Joanne Baptista Scarella, Clerico Regulari Instituti Bononiensis Socio.* Brescia 1769. Dos tomos en 4.

de la Hidráulica, creyeron otros que serian mas afortunados preguntándoselas á la experiencia, y con esta mira discurrieron muchísimos experimentos, variándolos de infinitos modos. Pero es tan delicada esta materia, y tiene tanto influxo en los resultados la mas leve circunstancia que "el Marques Poleni, varon diestrísimo, y circunspec-
„ to en el arte experimental, deseando determinar las canti-
„ dades de agua que salen en tiempo señalado por dife-
„ rentes luces hechas en un mismo vaso, se valió de va-
„ rias planchas no muy gruesas, cada una con agujero
„ de distinto tamaño, para aplicar ya una ya otra al
„ agugero hecho en el suelo de un mismo vaso. Sucedió,
„ pues, que repitiendo, creo que primero casualmente, y
„ despues de intento, un experimento con una misma
„ plancha, reparó que por su agujero salia ya mayor
„ ya menor porcion de agua, segun que cara de la plan-
„ cha estaba del lado de afuera. Reconoció por último con
„ cuidado la forma del agujero, y notó que aunque he-
„ cho en una plancha muy delgada, no era puntualmente
„ cilíndrico, sino á manera de cono truncado, siendo la
„ una de sus bases mayor que la otra, y así ya no es-
„ trañó que quando la base mas ancha miraba ácia afue-
„ ra saliese mas agua, que quando estaba la plancha al
„ reves, porque entonces era el chorro mayor, y mayor
„ su velocidad (*i*)."

Si

(*i*) Juan Bernuli en el prologo de su Hidráulica.

Si hay alguna esperanza de apear las dificultades de la Hidráulica, es sin duda alguna, hermanando el método teórico con el experimental, y desechándo todo supuesto que no concuerde con experimentos hechos, y repetidos con toda la diligencia que cabe, pero abrazando con entera confianza los que concordaren con la experiencia. Este es el rumbo que siguió Daniel Bernuli en la obra mencionada, y deben seguir todos los que se empeñaren en las investigaciones Hidráulicas, teniendo presentes las leves diferencias que circunstancias inevitables ocasionan entre la experiencia, y la teórica "porque, dice Da-
„ niel Bernuli (*k*), como no hay proposicion ninguna teó-
„ rica demostrada con tanto rigor que no padezca algu-
„ nas restricciones quando la aplicamos á la práctica, sí-
„ guese que no hemos de esperar teórica ninguna que
„ concuerde de todo punto con las medidas tomadas prác-
„ ticamente; de lo qual quiero estén prevenidos los que
„ intentaren confirmar nuestras proposiciones con experi-
„ mentos. Puedo asegurarles que en todos los puntos ha-
„ llarán alguna conformidad entre unos y otros, bien que
„ no perfecta, y unas veces mayor que otras, segun las
„ circunstancias. Por lo que á mí toca, siempre que ha-
„ cia algun experimento, tenia exâminado antes de todo
„ hasta que término las proposiciones teóricas concorda-
„ rian con el caso propuesto; y así el éxito nunca me
„ en-

(*k*) Hydrodinám. pag. 11.

„ engañó, ó me engañó pocas veces. Porque no solamen-
„ te solía prever de que lado estaría el exceso, ó la di-
„ ferencia, quando conocia que habia de haber alguna dis-
„ crepancia reparable, sino que tambien sabia determinar
„ quanta habia de ser: lo que, si no me engaño, mani-
„ fiesta que los fluidos siguen bastante las leyes que su-
„ ponemos, pero que hallan por todas partes obstáculos
„ ya mayores ya menores."

Será, pues, tanto mas perfecto un tratado de Hydrodinámica, quanto mas hubiere hermanado su autor con los resultados prácticos las conclusiones teóricas, y ninguna diere por incontrastable sino despues de comprobado por medio de experimentos hechos, y repetidos con sumo tino y destreza, que cada una es una ley de la naturaleza; y será acreedor á la preferencia entre todos los demas, si sobre ser completísimo por lo que mira al número de los asuntos particulares, fuere escrito con método claro, conciso, despejado, y caminaren inseparables en todo el discurso de la obra las investigaciones teóricas con las preguntas experimentales. Estas son puntualmente las circunstancias que concurren en nuestra Hydrodinámica, ó por mejor decir en la del Abate Bossut, por ser la nuestra una mera traduccion de la suya. Movidos de la gran dificultad de la materia, tantas veces ponderada en este prólogo, y de la poca extension, y seguridad de los experimentos hidráulicos hechos hasta entonces, encargaron Luis XV. Rey de Francia al Abate Bossut, y el di-

fun-

funto Rey de Cerdeña á Francisco Domingo Michelotti hiciesen á la experiencia quantas preguntas les pareciesen conducentes á aclarar, y promover la Hidráulica, proporcionándoles todos los auxîlios que contemplasen necesarios. Ambos Matemáticos dexaron plenamente evacuada su comision, acreditando el aventajado concepto que cada uno habia merecido á su Soberano; y para dar á sus experimentos el destino con que se les habian encargado, los dieron al público coordinados por el orden que les señaló la naturaleza, y el enlace de los puntos á que se referian. El Matemático Piamontes se ciñó á manifestar los suyos sin empeñarse en formar con este motivo un cuerpo de doctrina, bien que no es poca la que hay en su escrito (*l*), que le acredita de escritor dotado de muchísimo tino, penetracion, y juicio. El Académico Frances tuvo por mas acertado, ó tal vez necesario, tratar desde sus primeros elementos (*m*) todos los asuntos Hydrodinámicos, aquellos por lo menos que están enlazados con la práctica, é indagar de camino que crédito merecen, segun sea su conformidad con los experimentos, las proposiciones puramente teóricas.

Si

(*l*) *Sperimenti Idraulici principalmente diretti á confermare la Teorica, e facilitare la pratica del misurare le acque correnti Di Francesco Domenico Michelotti Professore d' Matematica nella Regia Università di Torino.* Turin 1767, dos tomos en 4.

(*m*) *Traité élémentaire d' Hydrodynamique : ouvrage dans lequel la théorie & l'expérience s'eclairent ou se suppléent mutuellement, &c. Par Mr. l' Abbé Bossut, de l' Académie Royale des Sciences, Examinateur des ingénieurs.* París 1771, dos tomos en 8.

Si no bastase esta breve noticia que acabamos de dar de nuestra Hydrodinámica para hacer patente la mucha ventaja que lleva á todas las demas que conocemos, nos engolfaríamos en hacer muy por menor un exámen de toda ella: pero como acaso graduarian de efecto de nuestra preocupacion nuestro juicio los lectores que no están impuestos en estos asuntos, y los inteligentes la harán, sin que nos cansemos en preocuparles, la justicia que se merece, nos ceñirémos á apuntar algunas reflexîones que hasta aquí no hemos tenido oportunidad de colocar en este prólogo.

Ya dexamos insinuado que para medir la cantidad de agua que suministra la luz de un vaso, es indispensable saber con que velocidad la arroja, y conocer la area, ó extension del emisario; porque claro está que quanto mas aprisa salga el fluido, manteniéndose uno mismo el orificio, tanto mayor cuerpo de agua por él saldrá en un tiempo dado, y que siendo una misma la velocidad, ha de salir tanto mayor copia de fluido, quanto mayor sea el agujero. Pero ¿quien creyera que sale errada esta determinacion siempre que se atiende á la area, ó extension del orificio? Esto es sin embargo lo que nos enseña la observacion, y por haberla desatendido se han padecido en este punto equivocaçiones de mucha conseqüencia. Con efecto ha manifestado la observacion, que al tiempo de salir el agua de un vaso, las columnas ó hilos de agua que corresponden directamente al orificio salen en de-

derechura, siendo así que los filetes laterales, luego que llegan á cierta distancia de la luz, se encaminan ácia ella en direccion oblicua, siguiéndola hasta despues que están fuera del vaso, con lo que arrimándose unos á otros, se va adelgazando y angostando forzosamente el chorro. Síguese de aquí que ha de salir del vaso no toda el agua que corresponde á la capacidad de la luz, sino la que permite el diámetro que tiene el chorro en el parage donde está mas delgado, que debe considerarse como el verdadero orificio por donde despide el vaso el fluido. Si la experiencia nos ha dado á conocer esta diminucion del diámetro del chorro, parece que ella tambien podria manifestar su cantidad, ó lo que es lo propio, decirnos quanto menor es el diámetro del chorro respecto del de la luz que le da salida; lo que proporcionaria conocer en todos los casos particulares el verdadero orificio por cuya area se ha de regular la cantidad del fluido que sale. Porque si supiéramos, por exemplo, que la area de la luz es constantemente respecto de la del chorro adelgazado lo que 8 respecto de 5, y tuviese la luz, en un caso determinado 33 pies quadrados de area, hallaríamos facilísimamente la que corresponderia al diámetro del chorro angostado con decir 8 es respecto de 5, lo que 33 respecto de un quarto término, que seria el verdadero orificio de salida. Pero es dificultosísimo de medir con la escrupulosidad que el intento requiere el diámetro del chorro contrahido, y de aquí han provenido los errores que han come-

me-

metido hombres de nada vulgar destreza, é instruccion. Como quiera, la razon de 5 á 8, ó de 10 á 16 que nosotros señalamos entre la area del chorro angostado quando sale por una luz hecha en una pared delgada y la area de la misma luz, y la de 13 á 16 que determinamos entre la area del chorro en su diámetro achicado quando sale por un caño, y la del orificio, es tan verdadera, que los resultados sacados por la fórmula analítica, llevando en cuenta estas diferencias, concuerdan pasmosamente con los que dan los experimentos. Tan acertada determinacion evidencia el error de algunos prácticos persuadidos á que, siendo iguales todas las demas circunstancias, arroja un vaso la mayor cantidad de agua en un tiempo dado quando la luz por donde la despide está hecha en una pared delgada; pues *si* queda probado que la area de la luz es á la del chorro angostado que por ella sale como 16 á 10, y á la del chorro tambien angostado que arroja un caño añadido como 16 á 13, es forzoso salga en un mismo tiempo mas agua por el caño que no por la luz. No contento el Abate Bossut con multiplicar los experimentos, deseoso de cotejar unos con otros y con las consecuencias teóricas casos muy diversos, formó diferentes tablas que facilitan inmensamente la aplicacion de todas sus investigaciones á la práctica, que, por la contextura de su obra, se echa de ver fué el norte que le guió en el discurso de todo su trabajo. Y en punto de conduccion de aguas por encañados, fué tan

aplaudida su doctrina, que habiendo propuesto la Academia de Tolosa un premio para el que mejor tratase este importantísimo asunto, se le adjudicó al Autor de nuestra Hydrodinámica que entonces salió á luz, bien que no hubiese remitido escrito ninguno para merecerle.

Si importa averiguar todas las circunstancias del movimiento de las aguas que salen de depósitos, forman surtidores (*n*), ó van por encañados, no es de menor importancia saber las leyes que siguen las aguas de los rios, por lo mucho que este conocimiento influye en su distribucion y aprovechamiento en señaladísimo beneficio del género humano. Pero podemos asegurar que de quantos puntos abraza la Hydrodinámica, este es el mas dificultoso, el menos adelantado, á pesar del conato con que le han promovido los mayores ingenios de Italia; y tal vez por

(*n*) Ha quedado tan poco satisfecha la Academia de Mantua de lo que sobre los surtidores se ha escrito, que propuso esta materia por asunto de un premio, y le mereció el Autor de la obra que en aquella Ciudad se publicó en el año de 1775, con este título: *Dissertazione Idrodinámica, sopra il quesito cercar la cagione, per la quale l'acqua salendo ne' getti quasi verticali de' vasi, se le luci di questi getti siano assai tenui, essa non giunga mai al livello dell'acqua del conservatorio, e quanto la luce è più piccola, tanto l'altezza dell'acqua si faccia sempre minore; come pure indagare la vera cagione per la quale l'altezza dell'acqua nel conservatorio, o il foro, per cui esce, essendo ognor maggiore, si diminuisca ognor più l'altezza de' suoi getti. Dal P. Gregorio Fontana delle Scuole pie, Regio professore di Matem. nell'università di Pavia, e coronata della Reale Accademia di Science e belle lettere di Mantova. Con un Appendice sopra il moto de' Corpi ne' mezzi resistenti.* Un tomo en 4.

por este motivo le trató con bastante brevedad nuestro Autor, ciñéndose á dar un extracto de algunos capítulos del tratado mas apreciable que sobre esta materia se ha publicado hasta ahora. Parece á primera vista que una vez supuestas, ó halladas las leyes Hidráulicas peculiares á las aguas que salen de vasos, ó depósitos y corren por canales artificiales, habia de ser muy facil señalar las de los rios, ó aplicar por lo menos aquellos principios á su movimiento. Pero varian tanto de un rio á otro ciertas circunstancias, como la naturaleza y direccion de las orillas, los declivios, remansos, &c; y se reparan tantas irregularidades, que no es posible sentar en este asunto ley ninguna general: verificándose la proposicion de Zendrini, es á saber, que es preciso haya entre las leyes de la velocidad y aceleracion de las aguas corrientes tanta diferencia quanta hay entre los rios mismos.

Sin engolfarnos aquí en exâminar, ni apuntar siquiera los diferentes supuestos que han hecho los autores que han escrito del curso de los rios, bastará decir que hasta ahora no se conoce método, ni instrumento ninguno para medir el Hidráulico á su satisfaccion la velocidad de una corriente. Esta es sin embargo una operacion muy fundamental siempre que se han de repartir las aguas de un rio sin perjuicio de la navegacion, si acaso la sufriere, ó pudiere sufrirla. Porque si ignoramos la velocidad con que corren sus aguas, mal podemos saber que cantidad de fluido arroja en un tiempo dado por una luz que imaginamos en

 su

su madre (llámase seccion); y el que no tenga sobre esto la seguridad necesaria, obrará á tientas, expuesto por lo mismo á injustas y peligrosas equivocaciones, todas las veces que se le ofreciere sangrar un rio, pues no podrá determinar la porcion de agua que toca á cada hacendado, ni saber si sangra con tal exceso el rio, que ya no lleve bastante agua para los barcos.

Para enterarse de quanto pertenece al curso y naturaleza de los rios no hay escrito ninguno que pueda competir con la obra tan justa y universalmente celebrada de Guiglelmini Italiano (*o*), el inventor, ó principal promovedor de este ramo de la Hidráulica: obra que dexa en duda qual es mas de admirar si la profundidad de la doctrina, el encadenamiento de sus diferentes partes, el gran juicio de su autor, y sobre todo su inmensa capacidad. Pero la muchedumbre y gravedad de las dificultades que encierra el asunto, acaso superiores á las fuerzas del ingenio humano, no permitió á Guiglelmini dexarlo todo aclarado. Eustachio Manfredi procuró suplir las omisiones, y las equivocaciones de su paysano en las doctas notas con que ilustró el tratado de la natu-

(*o*) *Della natura de' fiumi Trattato Fisico-Matematico del Dottore Domenico Guglielmini primo Matematico dello Studio di Bologna, e dell' Accademia Regia delle Scienze, con le annotazioni di Eustachio Manfredi Professore delle Matematiche, sovra intendente all'acque, e astronomo nell' instituto delle Scienze di Bologna, e membro delle Regie Accademie di Londra e Parigi.* Un tomo en 4, que se halla en el tomo segundo de la *Nuova Raccolta.*

turaleza de los rios; y otros Matemáticos de la misma nacion (*p*) Zendrini, Frisi, Ximenes (*q*) &c. Se han exercitado con el mismo motivo en algunas de las cuestiones que ya trató Guiglelmini. Y por ser la medida de las aguas corrientes el blanco de todas las investigaciones hidráulicas, y su mas importante objeto, Michelotti y Lorgna (*r*) se han empeñado últimamente en aclarar este punto, trayendo el primero de estos dos escritores para egecutar esta medicion

(*p*) Desde que la obra de Guilelmini salió á luz por primera vez á fines del siglo pasado, ha publicado el P. Grandi su *Trattato Geométrico del movimiento dell'acque.*

El Marques Poleni su obra *Del Moto Misto dell'acqua, e di molte cose appartenenti alle lagune, ai porti, ed ai fiumi, Libri due.*

Zendrini su libro intitulado, *Leggi, e fenomeni: regolazioni, ed usi delle acque correnti.*

Un anónimo publicó una *Dissertazione sopra i torrenti.*

El P. Frisi su obra *Del modo di regolare i fiumi, e i torrenti, Libri tre.*

Todas estas obras tambien se hallan en la *Nuova Raccolta*, impresa en Parma.

(*q*) *Opusculo intorno agli aumenti delle piene del fiume principale per l'unione di un nuovo influente dedotti coll'uso delle velocità superficiali, e delle resistenze.* D. Leonardo Ximenes: se halla en el tomo III. de las Actas de la Academia de Sena, impreso en la misma Ciudad el año de 1767. Un tomo en 4.

El asunto de esta Disertacion es apreciar el aumento que le sobreviene á un rio principal con el agua que le añade otro rio, que en él se pierde, ó quanto merma el cuerpo de agua que lleva en virtud de alguna sangria que se le hace. Está, á nuestro parecer, completamente tratado el punto.

(*r*) *Memorie intorno all'acque correnti di Antonio Mario Lorgna, Colonello d'ingegneri e Direttore delle Scuole Militari di Verona.* Verona 1777. Un tomo en 4.

cion un método sin valerse de instrumento ninguno, tan socorrido en muchos casos, que hemos tenido por oportuno añadirle á los que se hallan en nuestro original (*s*).

Una vez evacuados los asuntos que hemos especificado hasta ahora, solo restaba, para concluir nuestra Hidráulica, evacuar dos de tanta importancia por lo menos como todos los mencionados; nos faltaba declarar las leyes del impulso de los fluidos, y las que son peculiares á los fluidos elásticos. De las primeras pende la construccion de todas las máquinas que pone en movimiento el impulso del agua; y desentendiéndonos de las diferentes doctrinas que en este particular se leen en los escritores, seguimos la que nos pareció mas sencilla y segura, declarando lo que basta para la práctica, conforme lo hace patente la conformidad de nuestras proposiciones con los experimentos hechos con ruedas movidas del peso del agua, de su im-

(*s*) Las proposiciones que sentamos en las páginas 442, y 443 de este tratado son el fundamento de una *tabla* llamada *parabólica*, que suministra un método práctico muy facil para medir la velocidad de las aguas corrientes, y el cuerpo de agua que pasa en un tiempo dado por la seccion de un rio. Sobre este método publicó el año de 1764 en Milan el P. D. Francisco María de Regi, un tomito en 4, cuyo título es: *Uso della Tavola Parabólica nella misura delle acque correnti destinato all'inaffiamento delle terre, per regolamento dell'acque nel Ducato di Mantova.*

En el último capítulo de esta obra trata su Autor un punto muy curioso, y de suma importancia, indagando que cantidad de agua se necesita para regar una porcion determinada de terreno, segun sea su naturaleza, su declivio, si le tuviere, la calidad de lo que en él se hubiere sembrado, &c.

impulso, ó de su impulso y peso á un tiempo.

Por lo que mira á los fluidos elásticos, es argumento en que nos detenemos poco, *ciñéndonos á sentar* los principios en que estriba la construccion de algunos instrumentos y máquinas. Por lo mismo que estos fluidos son elásticos, es preciso sean dotados de compresibilidad, ó que se les pueda apretar de manera que ocupen menos espacio despues de comprimidos, que antes de experimentar compresion ninguna; pues la elasticidad de un cuerpo, sea el que fuere, no es otra cosa que la virtud que en él reside de restituirse á su primer estado en cesando la accion de la fuerza que le violenta, conforme lo experimentará el que soltare de golpe una ballena despues de torcerla en figura de arco. Pero ¿hay acaso algun fluido que no sufra compresion? Haylos con efecto, y el agua es uno de ellos, no habiéndose hallado hasta el dia de hoy medio ninguno para comprimirla. Llenóse de agua con esta mira una esfera, ó bola de oro hueca, se la apretó en una prensa, perdió la bola su figura redonda, con lo que menguó su capacidad; porque con perímetro, ó circunferencia igual es mayor la cabida de una esfera que la de otro cuerpo qualquiera, pero el agua salia por los poros del oro á manera de rocio primero que sufrir compresion ninguna. El ayre al contrario es un fluido que se puede comprimir, ó reducir á menos espacio, y en soltándole se sale con ímpetu, de lo que se indicia su elásticidad, conforme lo prueba, entre otros muchos hechos,

la escopeta de viento. Es esta escopeta un cañon en el qual se aprieta, ó comprime el ayre mediante ciertos artificios, y en soltándole arroja con violencia y sin estrepito la bala con que se le cargó.

Aquí nos vino muy natural, quando no fuera indispensable, hablar de diferentes instrumentos y máquinas que han promovido muchísimo las ciencias naturales. Ya no hay Físico ninguno que para dar razon de los fenómenos de la naturaleza suponga que esta tiene horror al vacío, ó la repugne haya algun lugar falto de ayre; los mas de los hechos que tiempos pasados se atribuían á esta soñada repugnancia son efecto patente de la compresion y elasticidad del ayre. Debaxo de la campana de la máquina pneumática mueren los animales, y parece que hierven los fluidos, porque puesto mas raro de lo que estaba el ayre de la campana, ya no tiene el que hay dentro de los fluidos y los animales allí metidos el contraresto de antes, se dilata en virtud de su elasticidad, se sube á manera de ampollas á la superficie de los fluidos, y sale por la boca, los oidos, &c. de los pobres animales, y con él los humores, cuya circulacion y equilibrio les mantenia la vida. Por la misma causa son tan benéficas las ventosas; porque aplicando sobre la piel boca abaxo una redoma en la qual se ha encendido estopa, puesto con la lumbre mas raro de lo que estaba el ayre de la redoma, ya no puede contrarestar el de afuera; el qual comprimiendo la piel la obliga á levantarse lo que coge la boca de la redoma, y

acu-

acúde entónces allá el humor que el Médico desea expeler del cuerpo del enfermo. En esta misma propiedad se funda todo el mecanismo de las bombas que sirven para levantar agua á determinadas alturas, y están hechas con tal artificio que en su linea tienen no poca semejanza con la ventosa. El ayre que llena el cañon de la bomba, cuya boca inferior está metida dentro del agua, siendo tan denso como el que descansa sobre la superficie de este fluido, destruye ó contraresta su fuerza ó presion, y se mantiene quieta el agua; pero así que obra el émbolo que corre por dentro del cañon de abaxo arriba, se dilata en virtud de su elasticidad el ayre del cañon desde la superficie del agua hasta la cara inferior del émbolo, y llena un espacio mayor que antes; es por consiguiente mas raro que el ayre exterior, el qual no padece alteracion ninguna, y el agua comprimida de este sube cañon arriba.

A esto se reduce en sustancia el mecanismo de las bombas; pero como sale muy costoso su uso quando es mucha el agua que se quiere levantar ó agotar, se ha inventado otra especie de bomba, cuya descripcion no podíamos omitir, que sin ocupar hombre alguno obra efectos prodigiosos; siendo por esta circunstancia, como por su primoroso artificio una máquina de todo punto portentosa. Llámase bomba de fuego, porque la pone en movimiento el vapor del agua puesta á cocer en una caldera que es parte de la misma máquina. Todo su uso pende de la grandísima dilatabilidad del vapor que arroja el agua

quan-

quando cuece, pues tiene calculado Desaguliers (*t*) que este fluido reducido á vapor ocupa un espacio catorce mil veces mayor que antes, y quando llega á ser tanta su fuerza como la del ayre, es diez y seis veces mas raro que él. Es tan considerable la ventaja de esta bomba respecto de todas las demas, que segun calculó Desaguliers con un gasto de 950 pesos, y un hombre solo arrojaba tanta agua quanta se sacaba con las otras bombas ocupando 50 caballos, ó 200 hombres, y gastando 5400 pesos.

En la propiedad que tiene el fuego de dilatar todos los cuerpos, y el frio de contraerlos ó encogerlos, se funda la construccion del termómetro, cuyo instrumento sirve para explorar los grados de aumento que tiene el calor ó frio de la atmósfera, ó del ayre que nos rodea. Claro está que si con un grado determinado de frio, pongo por caso el del agua quando llega á helarse, el licor de una bolita asciende á una altura señalada en un tubo ó cañon pegado á la misma bola, subirá mas arriba en menguando el frio, ó creciendo el calor, una vez que el calor dilata el licor, ó hace que ocupe mas espacio. Este es cabalmente el destino del termómetro; y para que sea seguro quanto cabe su uso, es preciso sea fixo el punto desde el qual se empiezan á contar los grados de la variacion que deseamos averiguar.

Tambien damos á conocer el barómetro, instrumento com-

(*t*) Desaguliers *Leccion XII. de su Física.*

compuesto de una bola llena de azogue, el qual sube por un tubo ó cañon pegado á la bola, y señala las variaciones que sobrevienen á la gravedad del ayre; y como el mercurio sube tubo arriba, porque crece el peso del ayre que comprime la bola á que está pegado, síguese que en la cumbre de una montaña ha de baxar el mercurio del barómetro, porque siendo allí menos alta que en su pie la columna de ayre que descansa y pesa sobre la bola, todo lo que coge de alto la montaña, aguantando entonces menos peso el azogue, no podrá menos de baxar. De aquí se ha sacado un método para averiguar la diferencia de altura entre dos puntos dados de la superficie de la tierra, por el qual se sacan los mismos resultados que por la medicion actual, conforme lo evidencia entre otros Matemáticos el P. Fontana en la Obra (*u*) que de intento publicó sobre este punto. Pero ninguna se ha dado á luz tan extensa sobre quanto pertenece á los barómetros como la de Mr. de Luc, Ginebrino (*x*).

Con

(*u*) *Delle altezze barometriche, e di alcuni insigni paradossi relativi alle medesime. Saggio analitico con algune riflessioni preliminari intorno all'applicazione delle Matematiche alla fisica. Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie.* Pavia 1771: un tomo en 8.

(*x*) *Recherches sur les modifications de l'atmosphere, contenant: l'histoire critique du barometre & du thermometre, un traité sur la construction de ces instrumens, des experiences relatives à leurs usages, & principalement à la mesure des hauteurs & à la correction des refractions moyennes: avec figures: Dediées à MM. de l'Académie Royale de Sciences de Paris. Par J. A. de Luc, Citoyen de Geneve.* Ginebra 1772: dos tomos en 4.

Con el termómetro y barómetro se hacen principalmente las observaciones tan celebradas con nombre de meteorológicas, las quales hechas con el cuidado que su importancia requiere, pueden influir muchísimo en la salud y las conveniencias de los hombres; fundándose en ellas una especie de Astrología Física, que proporciona pronosticar las mudanzas del tiempo, y las cosechas y enfermedades que de ellas se pueden temer ó esperar. Así lo piensa el juicioso Toaldo (*y*), quien despues de apuntar en su Prólogo las variedades que padece, segun los tiempos, la aficion de los hombres á ciertos asuntos fisicos, hablando de la Astrología Judiciaria, dice: "Igual serie de contradicciones y mudanzas ha experimentado la famosa „ Astrología Judiciaria, de la qual diré una palabra, sin „ dexarme llevar de ninguna preocupacion. Dos cosas ten„ go por ciertas: la una es que considerada esta ciencia „ por el lado que corresponde, podria perfeccionarse, re„ ducirse á sistema, y ser util, conforme lo manifestará „ este tratado: la otra es que la facilidad con que los „ hombres se halucinan, y su innata indiscrecion ha sido „ causa de experimentar la Astrología en diferentes tiem„ pos

(*y*) En el prólogo de su obra intitulada: *Della vera influenza degli astri, delle stagioni, e mutazioni di tempo, Saggio metereologico fundato sopra lunghe osservazioni, ed applicato agli usi dell'agricultura, medicina, nautica, &c. Di Giuseppe Toaldo, Preposito della SS. Trinità, e publico professore di Astronomía, Geografia, e meteore nell'università di Padova.* Padua 1770: un tomo en 4.

„ pos muy varia fortuna. Porque hubo tiempos en que fué „ cultivada, celebrada, supersticiosamente admirada, y „ la tuvieron los hombres por arte necesaria, no atreviéndose á emprehender cosa ninguna, fuese ó no de importancia, sin consultarla primero con un Astrólogo, conforme se estila aun hoy dia en el Oriente. Pero así que „ la Filosofia moderna declaró la guerra á todo lo que tenia visos de antiguo, fué impugnada, befada, proscripta, y aniquilada; resultando de aquí lo que acontece en „ los tumultos, esto es que la misma desgracia alcanzó á „ lo bueno con lo malo, lo sólido con lo frívolo, y á lo „ verdadero con lo falso.

„ Despues de exâminar los fundamentos de estas diferentes opiniones he hallado que los modernos tuvieron „ mucha razon para desterrar los horoscopios, las doce casas del cielo, y otros principios enteramente vanos y „ precarios desta arte. Mucho mas merecia reprobarse la „ pretendida influencia de los astros, la directa por lo menos, en las acciones morales dependientes del libre albedrio, y en la contingencia de los acaecimientos humanos. Pero no debian haber pasado adelante, y era „ prudencia detenerse á exâminar si entre estas heces de „ la Astrología Judiciaria habia acaso escondida alguna „ cosa fundada y apreciable. Porque es innegable el influxo del sol en las estaciones, y patente la fuerza de la „ luna para mover en determinados períodos las aguas del „ mar; y por estar todo encadenado en el universo se ha-

„ cia

„ cia probable alguna influencia en la tierra, y una cor-
„ respondencia y dependencia recíproca entre todos los
„ vastos cuerpos del cielo, comunicándose entre sí con
„ actividad é impresion, alcanzando de globo á globo fue-
„ ra del vehiculo de la luz.

„ Bacon de Verulamio, aunque conoció en aquel se-
„ vero y luminoso exámen que hace de todas las ciencias,
„ que la Astrología estaba inficionada de muchas supers-
„ ticiones, no por eso se atrevió aquel gran varon á proscri-
„ birla; quiso sí que se purgara, y señaló el modo y hasta
„ adonde, declarando que era parte de la verdadera Física.

„ En los diferentes tratados de Boyle se echa de
„ ver que este esclarecido Físico admitia la Astrología Fí-
„ sica, esto es las emanaciones y las influencias de los
„ cuerpos celestes en la atmósfera terrestre, y demas cuer-
„ pos sublunares. Y Filósofos Ingleses ha habido que in-
„ tentaron, no sin acierto, executar el plan propuesto por
„ Verulamio para purgar la Astrología; uno de ellos fue
„ Juan Goad en su libro intitulado *Astrometereologia sana*,
„ que publicó en Londres á fines del siglo pasado en el
„ centro de la Filosofia, obra que guarda un prudente
„ medio entre la supersticiosa credulidad de los antiguos,
„ y la absoluta incredulidad de los modernos en punto de
„ pronósticos metereológicos.

„ Finalmente, estimulados con los premios de las
„ Academias los mayores Matemáticos de este siglo á
„ contemplar el fluxo y refluxo del mar; despues de ave-

„ ri-

„ riguar que la accion del sol y la luna es la verdadera „ causa de las mareas, han atribuido á estos astros igual „ influxo para agitar la atmósfera; de cuya agitacion es „ preciso se originen balances, perturbaciones y mudan„ zas en el ayre, que por lo mismo estarán encadenadas „ con principios constantes y determinados. Lo propio di„ cen los Encyclopedistas en todos los artículos que tie„ nen algun enlace con este argumento. Yo me persuado „ á que si los Astrónomos se hubiesen dedicado de pro„ pósito á este asunto, indagando las mutaciones del ayre; „ así como han descubierto tantas cosas inesperadas, y qua„ si increibles respecto al cielo y al mar, tambien hubie„ ran aclarado mucho esta materia, bien que enlazada con „ la inconstancia de las estaciones. Y de hecho, solo con „ haberla tocado por incidencia no mas, han averiguado „ las causas generales, señalado un camino, dado un hi„ lo que en algun modo sirve de guia; y la teórica junta „ con la analogía de las mareas ha servido para fixar á „ lo menos algunos puntos de observacion.

„ Pero en medio de la multitud y obscuridad de las „ causas, de las quales es dificultoso discernir y calcular „ separadamente la influencia, las observaciones son lo „ único á que se puede y debe acudir, como el medio se„ guro, si alguno hay, de sacar tambien este secreto á „ la naturaleza. Porque la observacion sola, aun en medio „ de la total ignorancia de las causas, bien hecha y con„ tinuada, suministra principios para fundadas conjeturas.

„ Es-

„ Este es el motivo por que en ella va fundado el cálculo „ de las probabilidades, invencion de nuestros tiempos, y „ de los Matemáticos de este siglo, que es de tanto uso „ en las cosas económicas, y la administracion de las Re- „ públicas.

„ Este es el fin principal al qual se dirigen las ob- „ servaciones metereológicas, que desde un siglo á esta „ parte se hacen en toda Europa. El fin es descubrir por „ último alguna regla, si acaso la hay, en las estaciones „ varias, y las mudanzas del tiempo; cuya regla, si se „ lograra descubrir, pudiera mirarse el hallazgo como un „ verdadero don del cielo. Y sobre que sería de una uti- „ lidad transcendental á todas las cosas de la vida, sería „ de particular beneficio para la Agricultura, la Medici- „ na, y la Navegacion. Y porque las observaciones par- „ ticulares de un pais solo son insuficientes para fundar „ un sistema general; se propusieron las Academias, lo „ que ya se consiguió en gran parte, recoger observacio- „ nes simultaneas, y quasi paralelas, hechas sobre un mis- „ mo plan por hombres inteligentes en varios paises, y „ muy distantes unos de otros."

La utilidad de las observaciones metereológicas para la Agricultura y la Medicina es tan universalmente conocida, que ademas de Montanari y el Sr. Toaldo en Italia, la preconizan muchos escritores Franceses, como Mr. Duhamel, Mr. Malouin y otros, todos hombres acreditados por la mucha doctrina de sus escritos, y el juicio con

que

que han tratado este argumento de tan transcendental importancia. Hablará por todos un autor de la misma nacion que copia las palabras de los demas.

"Los Antiguos, dice el P. Cotte (z), que tenian en „ mucha estima, y muy encargada la Agricultura, no ca- „ recian ni de preceptos para asegurar el éxîto de sus la- „ bores, ni de predicciones fundadas en la experiencia y „ la observacion del cielo para afianzar sus efectos, de „ lo qual son prueba evidente sus Poemas sobre la Agricul- „ tura, y otras obras. Los Egipcios particularmente, con „ las observaciones de algunos vientos regulares, y de las „ inundaciones del Nilo, podian tener conocimientos bas- „ tante extensos sobre este asunto; pero creian mucho en „ las influencias y configuraciones de los astros, y cuidaban „ muy poco de la historia fisica del ayre, acerca de la qual „ no tenian, ni con mucho, los conocimientos que nosotros.

„ Es constante que los frutos de la tierra, bienes tan „ necesarios, que podemos mirarlos como los únicos ver- „ daderos, el trigo, el vino, el cáñamo, la fruta, la ma- „ dera, &c. no acuden todos los años con la misma abun-

(z) *Traité de Météorologie, contenant 1. l'histoire des observations météorologiques; 2. un traité des météores; 3. l'histoire & la description du baromètre, du thermomètre, & des autres instrumens météorologiques; 4. les tables des observations météorologiques & botanico-météorologiques; 5. les résultats des tables & des observations; 6. la méthode pour faire les observations météorologiques.* París 1774: un tomo en 4. Es obra curiosa, docta, y escrita con admirable diligencia.

„ dancia, ni son constantemente de igual calidad, y se „ sabe que en general estas diferencias proceden de la di- „ ferente temperatura de las estaciones (&).

„ Pero no bastan estos conocimientos generales, y „ nadie negará que sería igualmente útil á la Agricul- „ tura y la Física conocer mas puntualmente el enlace „ que hay entre temple de las estaciones y los frutos de „ la tierra.

„ Bien se percibe que el conocimiento de este enla- „ ce puede ir proporcionando con el tiempo el conocer „ los principales fenómenos de la vegetacion, como tam- „ bien el alcanzar los efectos que las diferentes alteracio- „ nes de las estaciones pueden obrar en los vegetales; „ pero en muchos de estos casos suele ser de gran con- „ veniencia el preveer, aunque no sea sino al poco mas „ ó menos, pues alguna vez habrá proporcion de preca- „ ver parte de las contingencias, y en otras ocasiones nos „ ahorraremos muchos cuidados.

„ No

(&) Despues de combinar el Señor Toaldo muchas observaciones metereológicas acerca de la lluvia, los vientos, y el temple de las diferentes estaciones del año, tres cosas que sin duda alguna influyen muchísimo en la fertilidad de la tierra, saca (pág. 127) una consecuencia muy importante, y es que *para formar juicio del valor de una hacienda se debe atender al producto que da en el discurso de nueve años.* Porque solo en este intervalo de tiempo se experimentan todas las variaciones posibles en los vientos, las lluvias y el temple de las estaciones, cuyas variaciones vuelven á experimentarse las mismas pasados nueve años, repitiéndose casi constantemente en el total de cada periodo de *nueve años.*

„ No hay , pues , cosa que tanta cuenta tenga como „ multiplicar las observaciones de esta clase ; aunque pa- „ rezcan de poca importancia , jamas podrán graduarse de „ pueriles , si se atiende al fin al qual se encaminan. Un „ arte como el de la Agricultura , dice Mr. du Tillet , tan „ útil á todos respectos pide particular cuidado. Atencio- „ nes que , atendida su prolixidad , tendrian en otra clase „ de ocupacion visos de insubstanciales , siempre serán de „ mucha importancia en esta , porque la verdadera utili- „ dad de su objeto las da un valor que los hombres de „ todos los siglos han conocido. Mr. Duhamel reconoce „ que le han servido de mucho para escribir la Física de „ los árboles , algunas ligeras observaciones que ha hecho „ todos los años sobre el tiempo en que echan flor , y „ madura su fruto. Un Físico que intentare escribir de „ las aves de paso , celebrará á buen seguro hallar una „ coleccion de observaciones sobre el tiempo en que vie- „ nen y se van ; todo es , pues , apreciable en esta mate- „ ria. La naturaleza es un cuerpo inmenso formado de una „ infinidad de miembros , que tienen un centro ó punto de „ reunion ; pero para descubrirle es indispensable conocer „ todas las partes ó lineas que á él van á parar. Los hechos „ que parecen mas aislados no lo son sino para nosotros; „ aumentemos con las observaciones el conocimiento de „ estos hechos , y veremos desvanecerse poco á poco el „ intervalo que al parecer los tenia separados y divididos, „ cada dia iremos descubriendo mas aquel principio de

„ unidad que parece fué el fin que se propuso el Criador „ en todas sus obras. Verdad es que para hallar ó coger „ este principio, hemos de contemplar la naturaleza en „ grande, porque si nos contentamos con considerar sus „ partes separadas, desentendiéndonos de la correspondencia que tienen unas con otras, caminaremos siempre á „ tientas, sin llegar jamas al término deseado. Procuremos guiar nuestro trabajo con una mirada general, juntemos los conocimientos que el estudio de las diferentes „ partes de la naturaleza nos ha grangeado, y gozaremos „ la satisfaccion de que nos encamine á ver patentemente „ entre las causas y los efectos una dependencia de la qual „ ni aun sospechas teníamos.

„ La prodigiosa multitud de causas que parece concurren á obrar estos efectos, nos turba, espanta y esconde el secreto del Criador: estas son las apariencias „ engañosas solo para nosotros, con que oculta la sabiduría de sus admirables operaciones; y con razon dixo el „ sabio, que Dios ha entregado el mundo á las disputas „ de los hombres. Mientras han descuidado la averiguacion de los efectos, ciñéndose á adivinar las causas que „ podian obrarlos, no han adelantado en la Física ni un „ paso siquiera; y si se conoce hoy dia la naturaleza mejor que no en aquellos siglos de ignorancia, es porque „ se dedican los hombres al conocimiento de los efectos „ mas que al de las causas, y porque aprovechan el conocimiento comparativo de estos diferentes efectos para

„ ave-

„ averiguar sus causas verdaderas. Con seguir este mé„ todo tan prudente se la dará indefectiblemente á esta „ ciencia un grado de certeza, del qual hubiera carecido „ para siempre á no haber tenido otros fundamentos que „ los vanos discursos de los Antiguos.

„ Observaciones continuadas sobre el temple del ay„ re, y el diferente peso de la atmósfera, dice Mr. Ma„ louin, apuntaciones muy circunstanciadas del calor, del „ frio, de la sequedad y humedad; una historia no inter„ rumpida de los meteoros, del trueno, de los vientos y „ las lluvias, de cada año, cada estacion, cada mes y „ cada dia, finalmente una comparacion continua de to„ das estas cosas y sus mudanzas con el temperamento, „ la salud y las enfermedades de los hombres; todas es„ tas observaciones hechas con cuidado por espacio de „ muchos años, y en cada pais, darán al arte de curar „ un grado de perfeccion y certeza, que, sin este auxi„ lio no puede prometerse de las mas sublimes especula„ ciones de la Física.

„ Ya se ve quan útil es á la vida de los hombres „ observar todos estos fenómenos, y averiguar su enlace „ y causa; acaso no se tardaría tanto como se cree en „ coger el fruto que de aquí se puede esperar.

„ Si tuviésemos observaciones médicas y metereoló„ gicas de muchos siglos hechas en un mismo lugar, en „ París por egemplo, hay fundado motivo para creer que „ sería facil de pronosticar la vuelta de las enfermedades

„ epidémicas y de los meteoros al cabo de cierto tiempo; „ y los primeros que padeciesen estas enfermedades no „ correrian, como suelen, mayor riesgo de morir que los „ demas; entonces se conocerian mejor desde los princi- „ pios las causas y los remedios del contagio."

„ Ningun Médico se ha igualado con Hipócrates, „ porque ninguno ha observado tanto como él; el benefi- „ cio de la observacion es seguro, bien que á veces re- „ moto, y no son los trabajos mas útiles al hombre los „ mas lucidos, ni los mejor premiados..... *sin* embargo „ es de esperar que antes que se pasen siglos habrá mu- „ chos casos en que estas observaciones proporcionarán co- „ nocer mejor la causa de muchas enfermedades, y se po- „ drá sacar de ellas una utilidad mas inmediata."

Lo mismo piensa el Sr. Toaldo, en cuya obra se pueden leer, y lo merecen, los fundamentos de su opinion. Nosotros nos contentarémos con trasladar aquí un pedazo de la primera parte donde trata de la influencia de la luna, porque nos ha parecido muy curioso, y por la proporcion que nos dá de hacer en una nota que le añadirémos, una advertencia de mucho momento (*).

" La principal controversia, dice el Sr. Toaldo, „ pag. 54, entre algunos Filósofos por una parte, los la- „ bradores, hortelanos, jardineros, botánicos, carpinteros „ y.

(*) Uno de los principales argumentos que alega el Sr. Toaldo para probar el influxo de la luna en las plantas, se funda en el calor que las comunica la luz de este planeta. Puedo asegurar que los Autores de Astro-

" y arquitectos por otra, recae sobre las plantas; creyen-
" do estos ser de mucha importancia ver en qué quartos
" de luna conviene plantar, podar y cortar, y burlándo-
" se aquellos de esta opinion, como de una vulgaridad.
" No pretendo decidir por mí solo este punto, trasladaré
" aquí las palabras y el parecer del célebre Montanari, sa-
" cado de la misma obra en que impugna las fábulas, co-
" mo suelen llamarse, de los Astrólogos.

" Todos convienen en que las yerbas y plantas se
" alimentan y crecen mediante un jugo, el qual desde la
" tierra sube por los poros de su tronco y sus ramas, y
" adaptándose á sus partes se condensa transformándose
" en madera, hojas y flores, con mucha orden, y por el
" influxo de una causa que no es aquí el lugar de inda-
" gar, y puede verse en la anatomía y economía de las
" plantas del doctísimo y diligentísimo Malpighi, á quien
" no sabe ocultar la naturaleza ninguno de sus secretos; á

 " mí

tronomía que he leido hasta ahora, todos niegan que la luz de la luna arroje algun calor. Niéganlo unánimemente los escritores Franceses fundándose en un experimento, que todos traen, hecho por medio de un espejo ustorio, en cuyo focus se puso un termómetro muy sensible, en el qual no hicieron la mas leve impresion los rayos de la luna extraordinariamente condensados. Pero el Sr. Toaldo trae (pag. 52) un experimento del célebre Montanari diametralmente contrario en sus resultas al de los Franceses. Mucho pulso se requiere, segun esto, para hacer experimentos físicos, y muy circunspectos hemos de caminar quando se trata de dar crédito á los que encontramos en las obras, por acreditados que sean sus autores, que la curiosidad, ó la aplicacion nos trae á las manos.

„ mí me basta que este jugo vaya por dichos poros y ó
„ sutilísimas venas que con el microscopio se ven, á ali-
„ mentar la planta.

„ Por consiguiente si el sol calienta una planta, es
„ constante que calentándose se dilata, y dilatándose igual-
„ mente aquellos poros ó venas por las quales sube el ju-
„ go, es preciso suba otro á llenarlos igualmente, y su-
„ plir el que va faltando, ó porque se evapora, ó porque
„ se convierte en la sustancia de la planta. Viene despues
„ la noche; pero como la presencia de la luna hace que
„ dure algo mas aquel calorcillo del ayre, que puede co-
„ adyuvar á este continuado ascenso del jugo, síguese que
„ subirá con efecto otro, bien que no en tanta abundan-
„ cia, hasta que enfriándose la planta al ponerse la luna,
„ se van angostando poco á poco sus poros, y condensán-
„ dose al mismo paso aquel jugo, el qual al nacer del sol,
„ que luego calienta las plantas mas tiernas, se transfor-
„ ma por la mañana en hojas y flores.

„ Pero si al ponerse el sol no queda la luna sobre el
„ horizonte, se enfria mas pronto la planta, por cuyo mo-
„ tivo se la introduce menos porcion de jugo, en el dis-
„ curso de aquellas horas se condensa mas la madera, y
„ la mañana siguiente encuentra el sol menos porcion para
„ hacer que salgan hojas y yemas, y así la planta crece
„ menos. De nada aprovecha el que la luna nazca muchas
„ horas despues de anochecer, porque su poco calor, que
„ bastaba para alargar y continuar en algun modo el ca-
„ lor

„ lor del sol, una vez apagado el que el sol habia encendido, no tiene la luna bastante para encenderle. Si envolvemos con paños un cuerpo caliente, durará mucho tiempo su calor, el qual sin los paños se apagaría muy en breve; pero si antes de envolverle le dexamos enfriar, muerto una vez su calor, no sirven los paños para renovarle, aunque tengan ellos en sí alguno.

„ Esta es, pues, la razon por que las yerbas y las plantas crecen en luna creciente mas que en luna menguante; porque la luna creciente queda sobre el horizonte despues de puesto el sol, y por lo mismo no da lugar á que se enfrien de golpe las plantas, siendo así que la luna menguante no nace sino al cabo de algunas horas que se ha puesto el sol, y despues que se han enfriado el ayre y las plantas. De la misma causa proviene el que la madera cortada en luna creciente es de menos dura, porque hallándose mas llena de jugo, y menos angostados sus poros, se llenan estos de una materia indigesta, que no habiéndose condensado todavia con transformarse en madera, queda por lo mismo mas dispuesta á pudrirse; siendo así que cortada en los últimos dias de la luna, ha aguantado mas tiempo el frio de la noche, y angostados y condensados por esta causa sus poros, queda en ellos menos porcion de materia dispuesta á corromperse. Este es el motivo de hacerse tanto mas reparable la diferencia que va de la madera cortada en los meses expresados á la que se corta en la pri-

„ ma-

„ mavera , ó á principios de otoño. En la primavera, sea „ la luna creciente ó menguante, es tanta la copia de hu„ mor que se introduce en las plantas, que no puede me„ nos de quedarse mucho en sus poros, el qual despues la „ pudre en breve tiempo. De aquí es tambien que corta„ da en estio queda mas ligera, porque habiendo consu„ mido el excesivo calor el humor indigesto, se han que„ dado bastante dilatados los poros, por cuyo motivo es „ rara y ligera la madera. En invierno sucede lo contra„ rio, porque en esta estacion suministra la tierra muy „ poco jugo, y los poros de la madera están tan apre„ tados con el frio, que queda condensada, y por con„ siguiente mas dura y pesada. Así se explica como la „ luna y el cielo influyen en el incremento de las plan„ tas, y en la mayor, ó menor duracion de las made„ ras." Hasta aquí Montanari.

Concluiríamos aquí este prólogo si no tuviésemos que satisfacer á una dificultad que con motivo de lo dicho al principio habrá ocurrido seguramente á no pocos lectores acerca de la certeza de la Matemática. Muchos estrañarán ver tan discordes entre sí á los primeros Matemáticos en varios puntos de Hydrodinámica, admirados de que haya tan notable contrariedad de opiniones en asuntos donde hacen tanto papel el Algebra, y la Geometría, dos Ciencias donde todo es certeza, todo es evidencia. Pero ninguna estrañeza causará esta discrepancia de sentencias al que considerare que no siendo la Matemática Mixta otra cosa

que

que la aplicacion de la Geometría y el Algebra á la Física, pueden y deben salir erradas sus consecuencias siempre que supongamos en los cuerpos que consideramos una naturaleza, ó propiedades que no sean las verdaderas, ó no tengamos bastante exploradas. Las reglas de calcular son muy seguras, ciertísimas las proposiciones de la Geometría, pero los resultados de su aplicacion han de ser forzosamente distintos segun los diferentes supuestos sobre que va fundada. Nadie duda, por exemplo, de la certeza de la regla de Compañía; y sin embargo no hay duda en que si la aplican á un mismo caso dos distintos calculadores, dará indefectiblemente resultados diversos si el uno introduxere en la cuestion alguna circunstancia falsa; como si habiendo puesto uno de los compañeros veinte mil pesos en el caudal comun, supusiere el calculador al tiempo de sacar la ganancia que á cada compañero corresponde, que puso mas, ó menos de la mencionada cantidad.

Ilustracion del artículo 93.

En la resolucion de la cuestion que aquí proponemos, decimos pag. 68 que los triángulos ESG, MSN (fig. 39) que tienen el ángulo S comun, son entre sí como los productos $SE \times SG$, $SM \times SN$. Esto quiere decir que las superficies de dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman dicho ángulo. Vamos á demostrarlo, y aplicaremos nues-

tra

tra demostracion á la misma figura 39, en la qual supondremos que el ángulo *PNG* del triángulo *GPN* es igual al ángulo *PMN* del triángulo *NPM*: hemos, pues, de probar que en virtud de esto la superficie del triángulo *GPN* es á la del triángulo $NPM :: PN \times NG : PM \times MN$.

Para este fin supondremos tiradas desde el ángulo *P* en el triángulo *MPN* la *PD* perpendicular á *MN*, y en el triángulo *GPN* la *PD* perpendicular á *GN*, de lo qual resultarán dos triángulos semejantes, es á saber los triángulos *PMQ* y *PND* por ser iguales todos los ángulos del primero á los del segundo cada uno al suyo; luego tendremos

$$PD : PQ :: PN : PM$$

y por haber una misma razon entre las mitades que entre los todos, tambien será

$$\frac{NG}{2} : \frac{MN}{2} :: NG : MN$$

y multiplicando la primera proporcion por la segunda, sacaremos

$$\frac{PD \times NG}{2} : \frac{PQ \times MN}{2} :: PM \times NG : PM \times MN.$$

ER-

ERRATAS.

Pág.	Lin.	Dice	Léase.
20	3	á la margen póngase fig. 18.	
22	12	al fluido	á la curva
23	11	OS	Os
23	11	oR	Or
23	27	cos ROS	cos rOS
31	9	$aee'a$	$aee'a'$
31	9	que tendrán todas . . .	que cada una tendrá
45	17	póngase á la margen 34	
57	16	del	en el
68	22	$(\text{sen}\, n)^2$	$(c\, \text{sen}\, n)^2$
69	22	(II. 260)	(II. 249)
77	10	ZY	ZI
78	11	a^2	$\frac{a^2}{2}$
79	3	$(p'p + p)^2$	$(p'p + p^2)$
81	15	$\frac{3}{6}a - x$	$\frac{3}{5}a - x$
85	22	G	g
93	18	NVm	NVn
96	19	g	G'
99	21	á la margen 50	48
127	23	$(1 + \cos z)^{\frac{3}{2}}$	$(1 + \cos z)^{\frac{1}{2}}$
164	13	$\frac{gR}{R+Q}$	$\frac{gR}{R+P}$
190	18	á la margen póngase 86	
248	18	surtidor	chorrito
264	14	*mnub*	***mnub***
284	4	bt	at
322	últ.	es 40000	es de 40000
367	3	segundos	medios segundos
385	6	HG	XG
389	11	bn	b^n
414	á la margen póngase 132		
423	2	OP	MN
428	6	cB	Cb
434	5	xy	xs
434	5	yXY	sXS

Pág.	Lin.	Dice	Léase.
445	16	$BE\sqrt{BM}=GD\sqrt{CN}$ . .	$BE\sqrt{BM}=CD\sqrt{CN}$
445	21	$y\sqrt{x}$	$y\sqrt{z}$
446	2	*BC*	*BE*
478	16	ver	dar
500	24	*bórrese* como en la fig. 176	
500	26	del radio	del radio como en la fig. 176
501	6	ruedas	á las
510	20	$P\times A\times$	$F\times A\times$
546	11	la bomba	la campana
586	9	dilatado	condensado
593	19	bulon	pasador
594	7	gozne *u* y colgada . . .	gozne y colgada
594	8	b', z, P' &c	b', z, P' &
594	19	se puede	no se puede
595	11	*uz*	uz'
595	22	7, 7 que lleva	7 que lleva
599	8	á la margen póngase 197	
600	12	*ZT*	*VT*
601	17	póngase á la margen 202.	

ÍNDICE

De lo que se contiene en este Tomo.

Con-

ELEMENTOS
DE HYDRODINÁMICA.

1 LA *Hydrodinámica* es en general, segun hemos insinuado (IV. 1), una ciencia cuyo asunto es averiguar las leyes del equilibrio y movimiento de los fluidos. El ramo de esta ciencia que considera el equilibrio de los fluidos se llama *Hydrostática*, y se llama *Hydráulica* el ramo que considera su movimiento.

2 Llamamos *Fluido* un agregado de *moléculas* ó partecillas muy sutiles, independientes unas de otras, y perfectamente móbiles ácia qualesquiera direcciones. Tales son el vino, el agua, el azogue, el ayre, el vapor del agua, la llama &c.

3 Aquí considerámos los fluidos como dotados de una fluidez perfecta; pero considerándolos en su estado físico y natural, hemos de confesar que no hay fluido ninguno cuyas partes no tengan unas con otras algun grado de adherencia; que no es el mismo en todos, y puede variar en un mismo fluido por razon del calor, ó del frio, ú de otras causas físicas. Tenemos incesantemente á la vista pruebas de esta adherencia. Si echámos agua en el suelo, las moléculas al tiempo de esparramarse, se separan con alguna dificultad: quando dejamos caer un fluido gota á gota, echamos de ver que las partes forman una especie de hilo mas ó menos reparable; muchos glóbulos de mercurio que llegan á tocarse, se juntan y confunden, y no forman al parecer mas que un mismo cuerpo &c. Es verisimil que la calidad de que esta-

mos hablando proceda de la aspereza de las partes fluidas, combinada con la atraccion recíproca con que obran unas en otras. No es mi ánimo empeñarme en esta averiguacion, ni indagar en qué consiste la naturaleza de la fluidez, ni si dichas moléculas tienen en virtud de alguna causa oculta aquel movimiento, que algunos llaman *intestino* ó interior, distinto de los movimientos que las comunica la pesantez ú otras causas conocidas. Dejamos para la inquietud de los físicos la averiguacion de todos estos puntos, acerca de los quales no es posible sentar ninguna proposicion que satisfaga.

Algunos Autores señalan entre la *liquidez* y fluidez la misma diferencia que entre la especie y el género. A su parecer, un cuerpo es fluido quando sus partes no estan enlazadas unas con otras, se separan fácilmente al tocarlas, y se esparraman como por sí solas. En este sentido, la arena fina, las cenizas, un monton de granos menudos &c. son fluidos. Pero, añaden dichos Autores, para que un cuerpo sea líquido es preciso á mas de lo espresado que sus partes sean tan móbiles, y se equilibren de tal modo con su peso, que si son en bastante número, se esparramen y formen una superficie orizontal. Nosotros no admitimos esta distincion; y deseando conformarnos con el uso mas generalmente recibido, confundiremos la fluidez con la liquidez; por manera que quando se nos ofreciere hablar de algun licor, le llamaremos indistintamente licor ó fluido. En estos Elementos no consideraremos sino los fluidos verdaderamente tales, y no los fluidos imperfectos, quales son la arena, las cenizas &c.

DE

DE LA HYDROSTATICA.

4 El asunto de la *Hydrostática* es, segun hemos dicho (1), averiguar las leyes del equilibrio de los fluidos. Este equilibrio proviene de la destruccion de las fuerzas que obran ó en las mismas partes del fluido, ó en las paredes del vaso, ó en los cuerpos sólidos que están sumergidos en los fluidos. La consideracion de todos estos esfuerzos será el asunto de esta Hydrostática. Supondrémos homogeneos los fluidos, esto es, que se componen en toda su estension de partes elementales semejantes, é igualmente pesadas.

5 Se pueden dividir en general los fluidos en dos especies, unos *incompresibles*, y otros *compresibles ó elásticos*. El agua, el vino &c. son de la primera especie; asi lo enseña la esperiencia. El ayre, la llama, el vapor del agua &c. son de la segunda. Observámos que la naturaleza no ha puesto límites perfectamente determinados entre las diferentes especies de cuerpos; no cria, ni cuerpos perfectamente duros, ni cuerpos de una elasticidad perfecta; pero nos será provechoso en nuestras investigaciones suponer estas especies de distinciones para averiguar con mayor facilidad y claridad las propiedades que penden de la incompresibilidad y elasticidad.

Ley fundamental del equilibrio de los fluidos.

6 *Quando una masa fluida está en equilibrio, sean*

las que fueren las fuerzas que obran en sus partes, una partícula qualquiera esperimenta una presion igual en todas las direcciones.

Porque ya que todas las partículas del fluido son independientes unas de otras, y perfectamente *movibles* ácia todas partes (2), es evidente que si la partícula propuesta sintiera menos presion de un lado que de otro, se movería ácia aquella parte precisamente en que fuese menor la presion, y no habria mas equilibrio en el systema, cuya consecuencia no concuerda con la hypótesi. La misma ley se prueba tambien con esperimentos; porque si á la misma profundidad de un fluido contenido en un vaso, se le hace un agugero á las paredes, y se planta en dicho agugero un émbolo para impedir la evacuacion, ó conseguir que no se derrame el fluido, el émbolo será rechazado por el fluido con una misma fuerza, ora sea orizontal la luz, ora inclinada de un modo qualquiera al orizonte. Todo esto se verifica en los fluidos incompresibles igualmente que en los elásticos. Tambien podria suceder físicamente que por razon de la adherencia recíproca de las partículas, subsistiese el equilibrio aun quando una de ellas esperimentase una presion algo menor por un lado que por otro; pero esta desigualdad de presion no puede menos de ser estremadamente corta; y la proposicion se verifica rigurosamente en los fluidos en el estado de fluidez perfecta, en cuyo estado los consideramos aquí.

7. No es menos evidente que *si recíprocamente cada*

par-

partícula padece igual presion por todas partes, todo el systema estará en equilibrio.

Las leyes particulares del equilibrio de los fluidos incompresibles ó compresibles penden de la misma ley primordial que acabamos de sentar, y aunque las hubiéramos podido declarar juntas, consideraremos, para mayor claridad, separadamente el equilibrio de los fluidos incompresibles, y el de los fluidos elásticos.

Del equilibrio de los fluidos incompresibles.

8 Llamamos *Fluidos incompresibles* aquellos que ninguna compresion puede reducir á que quepan en menos espacio que el que cogen naturalmente; por manera que una cantidad determinada de un fluido de esta especie ocupa siempre un mismo lugar, y no admite espansion ó dilatacion ni contraccion. Como entre los fluidos incompresibles el agua es el que llamará únicamente nuestra atencion, tenemos por oportuno manifestar cómo se ha averiguado su incompresibilidad.

Se han egecutado con diferentes miras muchísimos esperimentos dejando salir por *luces* ú orificios de igual estension é igualmente colocados, agua que llegaba á diferentes alturas en los vasos en que estaba. La cantidad de agua que ocupaba el fondo del vaso se halló en todos lo esperimentos, midiéndola despues de salida, constantemente de un mismo volumen. Es constante que esto no hubiera sucedido si la compresion redugera este fluido á menor volumen,

Fig. pues quando tenia encima mayor cantidad del mismo fluido, hubiera debido ocupar menor espacio que quando era menor la espresada altura.

Entre varios esperimentos hechos de intento para probar la incompresibilidad del agua, traheremos los dos siguientes.

9 I. En el estremo de cada uno de los dos tubos de vi-
1. drio *AB*, *AC* hay dos bolas de vidrio, una mayor que otra. Llénense ambas bolas de agua hasta *D* y *E* respectivamente, y suéldense á la luz uno con otro los dos tubos, procurando que donde se juntan le quede un paso libre al ayre de un tubo á otro. Alárguese despues el pico *AF* quanto se pueda, y dégesele abierto. Métase despues cada una de las bolas en una cazuela llena de hielo molido para que el agua se condense, y se introduzca en la cavidad del tubo todo el ayre que pueda. Y para que entre todavia mas ayre, frótese por afuera todo el tubo *DE*, á fin de que el ayre que entró por el orificio *F* se condense con la accion del frio, y se introduzca mas ayre en todo el tubo, y sellándole herméticamente, el ayre estará dentro condensado y comprimido. Así que esté sellado el tubo, quítese del hielo la bola *B*, métasela en agua tibia, despues en agua caliente, y despues en agua cociendo: dejando entretanto la bola *C* en el hielo, para que su agua se mantenga en el estado de la mayor condensacion. Supongamos que esta llegue al punto *E*, mas allá del qual hace fuerza para comprimirla el cilindro de ayre *GE*, reducido á suma densidad con la fuerza del

agua

agua que subió hasta *G*, mediante la rarefaccion en que le ha puesto el calor del agua, que suponemos cocer actualmente en la esfera *B*. Si el agua fuera compresible, debiera hacerla bajar algun tanto mas abajo del punto *E* la compresion con que en ella obra el cilindro de ayre. Pero lo contrario se observó, porque quando el agua estuvo reducida en *E* al estado de su mayor condensacion, la fuerza con que la comprimia el ayre *GE* no obró nada, primero se rompió el suelo de la bola *C* sin que el agua bajase ni el grueso de un cabello. Para asegurarse todavia mas de esta incompresibilidad del agua, los Académicos de Florencia se valieron de dos bolas de cobre, y esperimentaron que el agua antes se coló por los poros del metal que comprimirse, y la fuerza comprimente hallando en *E* una resistencia insuperable, rebentó poco despues el tubo, el qual para ver mejor el movimiento del agua era de vidrio, y estaba muy bien unido con la bola de cobre con un betun muy fuerte. Este esperimento se egecutó en Florencia por los individuos de una Academia, llamada la *Academia del Cimento.*

10 II. Mandó hacer *D. Francisco Domingo Micheloti* un globo de alaton del peso cabal de 8 onzas ó 4608 granos. Metido este globo un poco mas abajo de la superficie del agua, que le cubria enteramente, halló que pesaba 2964 granos; y pesándole estando sumergido hasta muy cerca del fondo del agua, esto es debajo de mas de 21 pie de agua, se halló que pesaba 2973 granos.

El hilo de seda cruda, del qual colgaba la bolita, co-

Fig. gía 24 pies de largo, y pesaba en el ayre 15 granos; pero despues de mojado y pesado fuera del agua pesó 32 granos. Pesando en el ayre la bolita junta con el hilo mojado, se halló que pesaba 4640 granos, de cuyo peso restando los 32 granos que pesaba el hilo mojado, quedaron 4608 granos para el peso de la bolita en el ayre; y restando del peso de la bolita metida hasta cerca del fondo del agua, esto es, de 2973 granos, el peso relativo del hilo en el agua de 9 granos, quedó el peso relativo de la bolita al fondo del agua de 2964 granos, lo mismo cabalmente que el peso de la misma bolita inmediatamente debajo de la superficie del agua. Por consiguiente la compresion del agua debajo de una altura que pasaba de 21 pies, se halló insensible.

11 Esto presupuesto, los vasos que contienen los licores pueden ser ó sólidos ó *flexibles*, esto es, pueden conservar constantemente la misma figura en virtud de la resistencia de sus paredes, ó padecer variacion en la figura, y tomar la que exige el equilibrio entre las diferentes fuerzas cuya accion esperimenta el fluido. Quando usáremos simplemente la voz *Vaso*, siempre entenderemos un vaso sólido, á no ser que se advierta lo contrario, ó que el hilo del discurso dé á entender que hablamos de un vaso flexible.

2. 12 *Si á todos los elementos iguales* A, B, C, D, E &c. *de la superficie de una masa fluida* AOKF *sin pesantez, se le aplican perpendicularmente potencias iguales* P, Q, R, S, T &c. *que podemos imaginar que obran por medio de otros tantos émbolos; dichas potencias están en equilibrio.*

Por-

Porque los esfuerzos de las potencias P, Q, R, S, T Fig.
se comunican libremente, y del mismo modo á la masa cuyas partes son todas perfectamente movibles (2), y no hay razon ninguna para que una de dichas potencias pueda mas que la otra. Luego la masa fluida no puede mudar, ni de figura, ni de lugar, y las potencias propuestas estan necesariamente en equilibrio.

13 Síguese de aquí 1.º que si en lugar de suponer iguales los elementos A, B, C, D, &c. é iguales tambien las potencias P, Q, R, S &c. suponemos que las potencias son proporcionales á los elementos, ó que tenemos esta serie de razones iguales $P : Q : R : S$ &c :: $A : B : C : D$; es evidente que subsistirá todavia el equilibrio del systema; porque si consideramos, por egemplo, el elemento A como la unidad de medida de los elementos de la superficie del fluido, y la potencia P como la unidad de presion en la misma superficie; si suponemos despues que cada uno de los elementos B, C, D &c. sea duplo, triplo, ó en general, múltiplo un número qualquiera n de veces del elemento A, podremos considerar igualmente cada una de las potencias Q, R, S &c. como compuesta de dos, tres, ó generalmente de n potencias iguales á la potencia P, y aplicadas cada una á cada una de las partes iguales de los elementos B, C, D &c. En virtud de esto, este caso viene á ser el mismo que el precedente.

14 2.º Sea m una molécula qualquiera tomada donde se quisiere en la masa fluida. Es evidente que, tómese don-

Fig. donde se tomare, por razon de la perfecta mobilidad de las partículas fluidas, que deja libertad á las potencias P, Q, R &c. para comunicar su accion por toda la masa, la partícula m esperimenta la presion del mismo modo que si estuviera colocada inmediatamente en la superficie del fluido, y considerándola tambien á ella misma como una masa fluida muy pequeña, se echa de ver que debe padecer una presion perpendicular é igual en todos los puntos de su superficie, para subsistir en equilibrio. Luego si concebimos su superficie dividida en un número determinado de partes, cada una de las quales sea, por egemplo, al elemento A, como el número q es al número r; la espresion de la presion que aguanta cada una de las partes de que tratamos, será $\frac{q}{r} \times P$.

3. 15 3.° Supongamos un licor sin pesantez encerrado por todas partes en un vaso $ABCD$. Hágasele al vaso una abertura qualquiera X, y aplíquesela una potencia P; esta fuerza se comunicará libremente en todas las direcciones á todos los puntos de la masa; y si concebimos que los suelos y las paredes del vaso están divididos en un número determinado de elementos que tengan una razon dada con la abertura X, cada uno de ellos sentirá una presion que tendrá con la potencia P la misma razon; porque los suelos y las paredes hacen con su resistencia las veces de las potencias Q, R, S &c.
2.

16 4.° Permaneciendo el licor encerrado por todas partes, supongamos que se le haga al vaso $ABCD$ un nú-
4.

número qualquiera de aberturas X, M, N, y que á estas Fig.
se les apliquen potencias P, Q, R, de modo que sea $P : Q : R :: X : M : N$, se echa de ver, en virtud de lo dicho hasta aquí, que estarán en equilibrio dichas potencias.

17 5.° La presion que esperimenta una partícula 3.
qualquíera m, se mide como antes (14); quiero de- 4.
cir s que si llamamos $\frac{q}{r}$ la razon que hay entre una parte de la superficie de la molécula m, y la abertura X; la espresion de la presion que padece la parte propuesta, será $\frac{q}{r} \times P$.

18 *La superficie de un licor entregado á la accion li-* 5.
bre de la pesantez, y que está en equilibrio en un vaso AMNE *que le contiene, es orizontal, ó perpendicular á la direccion de la pesantez.*

Supóngase un instante que la superficie del licor tenga la curvatura *ABDE*. Considérese una partícula qualquiera B de la superficie, y resuélvase su pesantez Bf en otras dos fuerzas Bt, Bg, cuyas direcciones sean las de los elementos contiguos Bt, Bg de la curva. Por lo probado en la Estática sabemos, además de ser evidente de suyo, que si muchas fuerzas se hacen mutuamente equilibrio, se destruyen indefectiblemente en todas las direcciones. Así, las fuerzas Bt, Bg deben ser iguales á las fuerzas con las quales las partículas inmediatas obran en la partícula B en las direcciones opuestas tB, gB. Pero por otra parte, la partícula B no puede estar en equilibrio sino en quanto esperimente una presion igual en todas las direcciones (6).

Lue-

Fig. Luego las fuerzas Bt, Bg son iguales; esto requiere necesariamente que el angulo tBg formado por los dos elementos Bt, Bg de la curva esté dividido en dos partes iguales por la direccion de la pesantez. Y como se debe verificar esto mismo en todos los puntos de la superficie del fluido: es evidentemente forzoso que sea orizontal dicha superficie, ó perpendicular en todos sus puntos á la direccion de la pesantez.

19 Es de notar que la proposicion antecedente abraza con su generalidad todas las hypotesis que se pueden hacer acerca de la pesantez; quiero decir que sean las que fueren las fuerzas que impelen las partes de un fluido, la superficie de este fluido debe cortar perpendicularmente las direcciones de las fuerzas que obran inmediatamente en la misma superficie. Pero aquí no consideramos esta cuestion con tanta generalidad. Nos ceñiremos á la ley de la pesantez de los cuerpos que tenemos al rededor, y supondremos que dicha fuerza es constante; esto es, que obra con igualdad en todas las partes iguales de materia. Ademas de esto, se pueden considerar como paralelas (IV. 43) las direcciones de la espresada fuerza aun en estensiones bastante sensibles; porque si concebimos que desde los estremos de una linea orizontal de 37 varas de largo, se tiran dos lineas al centro de la tierra, el ángulo que forman apenas vale un segundo. Así, la superficie del licor de un depósito es sensiblemente plana quando es corta su estension; pero si llega á ser considerable, se debe considerar como parte de una superficie

es-

esférica ó esferoidea, segun se le diere á la tierra la figura Fig.
de una esfera ó de un esferoide.

20 Síguese de esto, que pues la superficie *AE* del 6.
fluido contenido en el vaso *AME*, forma un plano orizontal, si concebimos que una porcion qualquiera *BDC* del mismo fluido se llegue á helar ó endurecer sin que pueda mudar, ni su posicion, ni su volumen, es evidente que no se perderá de ningun modo el equilibrio, y que las dos superficies parciales *AB*, *DE* permanecerán en un mismo plano orizontal. Luego si en una bomba ó *sifon* qualquiera
KMO hubiese un licor inmobil, cuyas dos superficies sean 7.
AB, *DE*, estas dos superficies estarán necesariamente á nivel, ó en un mismo plano orizontal; porque no hay inconveniente alguno en considerar el licor del sifon como la porcion de licor *ABCDEM* del vaso. 6.

En esta ilacion se incluye una infinidad de casos. De qualquier modo que se comuniquen uno con otro dos brazos ó dos piernas de un sifon, ó dos depósitos qualesquiera, ya sea tocándose inmediatamente por alguna parte, ya sea por canales de union, los licores de la misma especie contenidos en dichos dos depósitos se ponen siempre á nivel. Esta es la razon porqué el agua de los pozos que se cavan en la inmediacion de algun rio, se pone á nivel con el rio; porque el agua cala por entre la tierra ó el cascajo, y de este modo se forman canales subterraneos de comunicacion entre el rio y los pozos &c.

21 Tambien hemos de prevenir que esta ilacion pade-

Fig. dece una restriccion en el estado natural y físico de los fluidos. Para que el licor se ponga realmente á nivel en los dos brazos del sifon, es preciso que no sean, ni uno ni otro muy chicos, sin que sea menester para esto que sean iguales, ni semejantes. Pero quando el uno de los brazos es tan sutil que su diámetro no pasa de una linea, por egemplo, siendo el del otro brazo mucho mayor; en este caso no se pone el licor á nivel en ambos brazos. La mayor parte de los licores, como el vino, el agua, el aceyte, el espíritu de vino, &c. suben mas arriba en el brazo delgado (que se llama *Capilar* de la voz latina *Capillus*, que significa cabello) que en el otro. Por el contrario, el mercurio se mantiene mas bajo en el brazo capilar que en el mas ancho. La pesantez específica de los licores no sirve de regla para su ascension en los tubos capilares. Pero parece evidente por los esperimentos, que lo que sube ó baja un mismo licor en tubos de diferentes diámetros sigue la razon inversa de los diámetros de dichos tubos.

Todos estos fenómenos singulares han dado muchísimo que hacer á los Físicos; pero ninguno de los systemas que se han aventurado para esplicarlos, satisface enteramente. No me detendré, pues, en traherlos aquí, porque el fin que llevo es dar la teórica matemática del equilibrio de los fluidos considerados en el estado de perfecta fluidez, y por consiguiente debo prescindir de todas las causas físicas y esteriores que pueden alterar las consecuencias que se deducen de esta hypótesi.

Es-

22 *Estando quieto el licor contenido en el vaso* AMNE, *y no esperimentando mas impulso que el de la pesantez, una partícula qualquiera* m *padece igualmente por todas partes una presion equivalente á una fuerza igual al peso de la columnilla* om *que la corresponde verticalmente.* Fig. 8.

1.° La partícula *m* padece una presion igual en todas las direcciones; porque á no ser así, no estaría en equilibrio (*6*).

2.° La presion que esperimenta es igual al peso absoluto de la columnilla *om*; porque si concebimos que la masa total del fluido, á excepcion de la columna *om*, se llegue á endurecer sin que pueda mudar de sitio, ni volumen, la partícula *m* permanecerá en el mismo estado de compresion que ántes. Pero quando solo el *filete* *om* se mantiene fluido, habiéndose endurecido el residuo de la masa, sufre con evidencia el peso total de dicho filete *om*. Luego la medida de la presion que padece en todos los casos, es el peso absoluto de la misma columna *om*. De aquí inferiremos

23 1.° Que si imaginamos una curva qualquiera *FmQ* 9. que toque la partícula *m* del lado de la pared *AM*, y suponemos que la porcion de licor *AFmQM* se endurezca de modo que no pueda mudar de lugar, ni de volumen; la partícula *m* siempre esperimentará en todas las direcciones una presion del mismo modo que si la masa total se hubiese mantenido fluida. Podemos concebir igualmente, sin que se pierda el equilibrio, que tambien se endurezca la porcion qualquiera *EHSN* de licor. Luego en un vaso qualquiera *FQSH* 10.

un

Fig. un punto qualquiera *m* de sus paredes esperímenta por parte del fluido una presion igual al peso absoluto del filetillo vertical *om* que remataría en la superficie del fluido, prolongada si fuere menester; porque podemos considerar el licor del

10. vaso *FQSH* como la porcion *FQSH* del licor del vaso

9. *AMNE*, en el supuesto de haberse endurecido ambas partes *AFmQM*, *EHSN*.

10. 24 2.° Sea *my* una parte qualquiera infinitamente pequeña de las paredes del vaso *FQSH*; la presion perpendicular que padece esta parte está en razon compuesta del número de moléculas, que cubren la pequeña superficie *my*, y de la altura vertical *om* que podemos considerar como una misma respecto de todos los puntos del elemento *my*. Así, llamando *p* la gravedad específica del licor, la presion de que hablamos será $p \times om \times my$ (IV.48).

11. 25 *Estando el licor que contiene el vaso ANE quieto, y no esperimentando mas impulso que el de la pesantez, la suma de las presiones perpendiculares que padecen todos los elementos de una parte qualquiera finita* fnr *del fondo ó de las paredes del vaso, es igual al peso absoluto de una columna, cuya base sería la superficie* fnr *(reducida á superficie plana, si fuere menester), y cuya altura sería la distancia vertical* GO *del centro de gravedad* G *de la misma superficie* fnr *á la superficie* AE *del fluido.*

Divídase la superficie *fnr* en una infinidad de elementos *fg*, *gx*, *xy* &c. y tírense las verticales *ft*, *gu*, *xz* &c. terminadas en la superficie del fluido. Sea *p* la pesantez es-

pe-

pecífica del fluido. Las presiones perpendiculares que padecen los elementos fg, gx, xy &c. las representan respectivamente los productos $p \times fg \times ft$, $p \times gx \times gu$, $p \times xy \times xz$ &c. (24). Pero si consideramos estos productos como los momentos de otros tantos pesos pequeños, respecto del plano de nivel del licor, sabemos (IV. 108) que $p \times fg \times ft + p \times gx \times gu + p \times xy \times xz +$ &c. $= p(fg + gx + xy$ &c.$) \times GO = p \times fnr \times GO$. Luego &c. Fig.

26 Por consiguiente 1.° quando el suelo MN de un 12.
vaso de qualquiera figura es orizontal, la espresion de la 13.
presion que padece dicho fondo es $p \times MN \times GO$, siendo 14.
p la pesantez específica del fluido, GO la vertical levantada desde el centro de gravedad G del fondo MN, y terminada por la superficie del fluido, prolongada quando es menester.

Luego quando fueren iguales los fondos de los tres vasos representados en las figuras, y estuviere el licor á una misma altura respecto del fondo en los tres vasos; se echará de ver que los fondos padecerán presiones iguales. Con 13.
efecto, es evidente que si se tiran las verticales Mm, Nn, 14.
y se supone despues que las dos porciones de licor AMm, ENn, se endurezcan conservando siempre el mismo sitio, 13.
y el mismo volumen, y que en el supuesto de estar llenos de licor los espacios AmM, EnN, se quiten las paredes 14.
AM, EN, todo subsistirá del mismo modo que antes, y los tres fondos deberán esperimentar una presion igual.

27 2.° Puede, pues, suceder que la presion que pade-

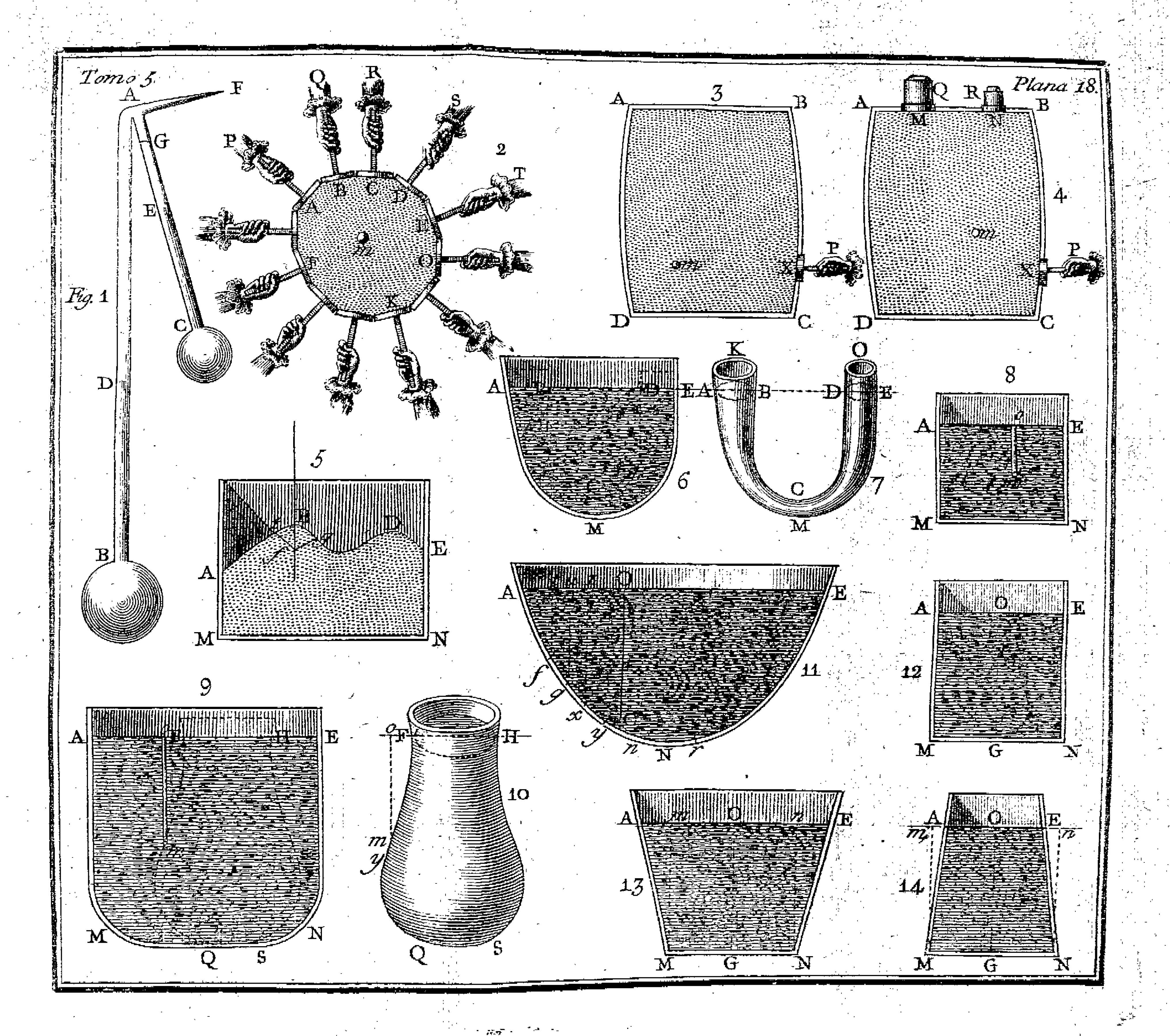
Fig. ce el fondo de un vaso, y el peso total del licor que contiene
12. sean cosas muy diferentes. En el vaso cilíndrico, la presion
13. del fondo es igual al peso de todo el licor; pero en los otros
14. vasos, la primera fuerza es menor ó mayor que la segunda.

Quando hay que levantar en alto verticalmente, ó sostener sobre un plano inclinado un vaso lleno de agua, se debe atender en el cálculo de la potencia al peso absoluto del agua y del vaso, y no á la presion que aguantan el suelo y las paredes; porque se puede considerar cada instante el systema como que no compone sino una sola y misma masa sólida.

28 3.° Sea *AM* una compuerta rectangular y vertical
15. de inclusa, que sostiene la presion de la masa de aguas detenidas *AMO*, cuya estension orizontal *MO* sea la que se quisiere, porque esto nada influye en el efecto de la presion. Sea *G* el medio ó centro de gravedad de la compuerta, y llamemos *A* el lado orizontal del rectángulo que forma la misma compuerta. La espresion de la presion que sufre será $p \times A \times AM \times GM = p \times A \times \frac{(AM)^2}{2}$, siendo p la gravedad específica del agua.

Por egemplo, sea $AM = 12$ pies, $A = 3$ pies, tendremos $A \times \frac{(AM)^2}{2} = 216$ pies cúbicos; y como el pie cúbico de água dulce pesa cerca de 70 libras, se sigue que la presion $p \times A \times \frac{(AM)^2}{2} = 15120$ libras.

Con la misma facilidad se determinaría la presion en el caso de no ser vertical la compuerta, y de ser su figura distinta de la rectangular.


Tomo 5.
Plana 18.
Fig. 1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

29 4.° Siéntese sobre la superficie orizontal *AE* del licor *AMNE* abandonado á la accion de la pesantez, una tapa mobil cargada en su medio de un peso *Q*; con esto no se perderá el equilibrio. Hágase despues en qualquiera parte de las paredes del vaso una abertura *fr*, y aplíqueselé un émbolo para que no se salga el licor. Sentado esto 1.° la presion del peso *Q* que se puede considerar como dividida en una infinidad de potencias que oprimen perpendicularmente la superficie *AE*, se distribuye entre todos los puntos del fluido, y resulta de esto en la superficie *fr* una presion cuya espresion es $\frac{fr}{AE} \times Q$ (13). 2.° En virtud de la pesantez del fluido, la superficie *fr* siente una presion perpendicular igual al peso de una columna del mismo fluido, cuya base sería *fr*, y la altura la distancia *GE* de su centro de gravedad al nivel del licor. Llamemos *R* este peso. Se echa de ver que pues la potencia aplicada al émbolo sostiene los esfuerzos de las dos potencias $\frac{fr}{AE} \times Q$ y *R*, ha de ser $P = \frac{fr}{AE} \times Q + R$. Fig. 16.

30 5.° Supongamos un vaso *AMNE* cerrado por todas partes, lleno de un licor pesado ó no pesado, y cuyo suelo superior *AE* sea orizontal. Háganse en este fondo dos aberturas *fr*, *gt*, y aplíquenseles dos pesos *P* y *Q*, tales que $P : Q :: fr : gt$; estos dos pesos forman equilibrio como antes (16); porque sea ó no pesado el licor, los dos pesos *P* y *Q* obran del mismo modo en la superficie y en lo interior del fluido. 17.

31 6.° Ahora bien, si en lugar de suponer, como

Fig. antes, dos pesos P y Q aplicados á las dos aberturas fr, gt, suponemos que dichas aberturas sirvan de bases á dos columnas qualesquiera $fxyr$, $gzut$ de licores diferentes, y si tirando despues por los dos centros de gravedad G y T de las dos bases fr, gt, las verticales GO, TS, llamamos p y p' las pesanteces específicas de los dos licores $fxyr$, $gzut$, se echa de ver (26) que la espresion de la presion con que el licor $fxyr$ obra en el fondo fr, es $p \times fr \times GO$, y que la espresion de la presion con que el licor $gzut$ obra en el fondo gt es $p' \times gt \times TS$. Pero si tenemos la proporcion $p \times fr \times GO : p' \times gt \times TS :: fr : gt$, las dos fuerzas propuestas formarán equilibrio (30). Luego tendremos en este caso $p \times GO = p' \times TS$, y por consiguiente $GO : TS :: p' : p$, y quiere decir que las alturas de las dos columnas líquidas $fxyr$, $gzut$ que forman equilibrio una con otra, están en razon inversa de sus pesanteces específicas.

Por egemplo, si la columna $fxyr$ es de agua, y la columna $gzut$ de mercurio, tendremos $GO : TS :: 14 : 1$ con corta diferencia. Sabemos que el mercurio se contrahe y dilata con el frio y el calor; pero aquí prescindimos de esta qualidad, y tomamos su pesantez específica media, la que le corresponde en los tiempos templados, cuya pesantez está averiguado que tiene con la del agua la misma razon que 14 con 1.

Escusaremos añadir que los esfuerzos que resúltan de las dos columnas propuestas contra las paredes del vaso, se determinan como antes (29).

Si

32 *Si un licor pesado estuviere en equilibrio en un vaso flexible; qualquiera figura que tome el vaso, la superficie del fluido que suponemos libre, será orizontal.* Fig.

Porque una vez que ha tomado el vaso flexible la figura que exige el equilibrio de las fuerzas que obran en el fluido, no hay inconveniente alguno en considerar dicho vaso como sólido; pero la demostracion dada (18) siempre se verifica, sea la que fuere la figura de esta especie de vasos; luego &c.

33 De aquí podemos inferir una consecuencia parecida á la que sacamos en otro lugar (20). El licor contenido en un sifon cuyas paredes son flexibles, se pone siempre á nivel en las piernas, excepto el caso en que es capilar el uno de ellos.

34 Cuestion. *Determinar las condiciones generales que deben concurrir para que un fluido se ponga en equilibrio por su sola pesantez, en un vaso flexible, pesado é inestensible.* 19.

Sea *AMNOPB* la figura que toma el vaso, y que aquí se debe considerar como la seccion vertical de un prisma de una infinidad de lados, y cuya longitud es orizontal. Una vez resuelta la cuestion para este caso, no será dificultoso *generalizar* ó hacer general la resolucion, por lo menos en quanto á las condiciones del equilibrio, y aplicarla á todas castas de vasos, aun en el supuesto de que sean estensibles las paredes, con tal que dicha estensibilidad guarde una ley constante y dada.

Consideremos la curva *AMNOPB* como un polygo-

Fig. no rectilineo de una infinidad de lados. Sean *MN*, *NO*, *OP* tres elementos consecutivos é iguales. Estando en equilibrio el fluido, y habiendo tomado el vaso una forma *estable* ó permanente, podemos considerar los puntos *M* y *P* como fijos; y prescindiendo del resto de la curva, podemos considerar que *MNOP* es un polygono funicular atado á los dos puntos fijos *M*, *P*, y que á dos de sus ángulos *N* y *O* estan aplicadas dos fuerzas, una de ellas vertical *NS* ú *Os* que representa el peso del elemento *MN* ú *ON*, y la otra *NR* ú *Or* que divide el ángulo *MNO* ú *NOP* en dos partes iguales, y representa la presion del fluido, la qual por ser en todas partes perpendicular al fluido, divide en dos ángulos iguales el ángulo formado por dos elementos consecutivos. De las dos fuerzas *NS*, *NR* aplicadas al ángulo *N*, compondremos la fuerza única *NQ* espresada por la diagonal *NQ* del paralelogramo *NSQR*; compondremos tambien con *NQ*, y la tension *NV* del cordon *MN*, una fuerza única *NT*, cuya direccion es *ON*, y es espresada por la diagonal *NT* del paralelogramo *NQTV*. Lo mismo haremos respecto de las fuerzas aplicadas al ángulo *O*, reduciéndolas á la fuerza única *Ot*, cuya direccion es *NO*. Sentado esto, es evidente que para que haya equilibrio, es preciso que sean iguales las dos fuerzas *NT*, *Ot* directamente opuestas. Todo consiste, pues, en hallar las espresiones de estas dos fuerzas, é igualarlas una con otra.

Bágese desde el punto *Q* la perpendicular *QE* á *NS* prolongada; si llamamos 1 el seno total, sacaremos, por lo

lo dicho (I. 664), que $EQ = SQ . \text{sen } ESQ = NR .$ Fig.
$\text{sen } RNS$; $SE = NR . \cos RNS$; $NE = NS + NR . \cos RNS$; $\text{sen } ENQ = \frac{EQ}{NQ} = \frac{NR . \text{sen } RNS}{NQ}$; $\cos ENQ = \frac{NE}{NQ} = \frac{NS + NR . \cos RNS}{NQ}$; $\text{sen } TQN = \text{sen } (MNG + ENQ)$ $=$ (I. 655) $\text{sen } MNG . \cos ENQ + \cos MNG . \text{sen } ENQ = \frac{\text{sen } MNG (NS + NR \cos RNS)}{NQ} + \frac{\cos MNG . NR \text{ sen } RNS}{NQ}$. Ahora bien, tenemos la proporcion $NQ : TN :: \text{sen } MNT : \text{sen } TQN$; y por consiguiente, $TN = \frac{NQ \times \text{sen } TQN}{\text{sen } MNT}$. Substituyendo en lugar de sen TQN su valor, hallaremos $TN = \frac{\text{sen } MNG(NS + NR . \cos RNS)}{\text{sen } MNT} + \frac{\cos MNG . NR . \text{sen } RNS}{\text{sen } MNT}$. Del mismo modo hallaremos puntualmente $Ot = \frac{\text{sen } POI . (OS + OR . \cos rOs)}{\text{sen } POt} + \frac{\cos POI . Or . \text{sen } rOs}{POt}$. Así la equacion en que están cifradas las condiciones del equilibrio será

$$\frac{\text{sen } MNG (NS + NR . \cos RNS) + \cos MNG . NR . \text{sen } RNS}{\text{sen } MNT}$$
$$= \frac{\text{sen } POI(Os + Or . \cos ROs) + \cos POI . Or . \text{sen } rOs}{\text{sen } POt};$$

por medio de la qual será facil sacar la equacion de la curva *AMNOPB*.

35 Síguese de aquí 1.° que si fuere *AMNOBP* un ánulo circular puesto sobre un plano orizontal, y dicho ánulo estuviere comprimido por un fluido que obre perpendicularmente á todos sus puntos, ó en la direccion orizontal de cada radio; las fuerzas NS, Os serán nulas en este caso, y la equacion general para el equilibrio se reducirá á $\frac{\text{sen } TRN \times NR}{\text{sen } MNT} = \frac{\text{sen } trO \times Or}{\text{sen } POt}$. Esto supuesto, como todas las fuerzas NR, Or son iguales, es evidente que por ser iguales, en virtud de la hypótesi, los elementos MN, NO, OP, la uniformidad de curvatura de la circunferencia *AMNOPB*

20.

19.

Fig. hará que sean iguales entre sí las fuerzas *NT*, *Ot*. Luego se equilibrarán. Habrá igualmente equilibrio en todos los demás puntos de la curva. Luego el ánulo deberá guardar la forma circular.

36 2.° Síguese de aquí que si se llena de licor un vaso prismático vertical cuyas paredes sean perfectamente flexibles, pero no estensibles, este vaso tomará forzosamente la figura de un cilindro recto; porque si se resuelve su superficie convexa en una infinidad de ánulos cortándola con planos orizontales, cada ánulo adquirirá la figura que el equilibrio requiere. Y como esta figura es un círculo, conforme acabamos de probar, síguese que el vaso propuesto se volverá cilíndrico, por ser única y determinada la figura que requiere el equilibrio.

37 3.° Subsistiendo siempre la misma hypótesi (35), se echa de ver que la fuerza *NT* espresa la tension del elemento *NO*, siendo así que la fuerza *NR* espresa la presion del fluido en *N*. Ademas de esto, es evidente que á todos los demás puntos de la circunferencia corresponden dos fuerzas análogas é iguales, cada una á la suya, á las dos fuerzas *NT*, *NR*. Pero por razon de los triángulos *NRT*, *NOC* que son semejantes por ser iguales los ángulos *RNT*, *ONC*, y tambien los ángulos *NRT*, *NOC*, por quanto *CO* se puede considerar como paralela á *CN*; tenemos la proporcion $NR : TN :: NO : CN$. Luego, llamando n el número de todas las potencias *NR* aplicadas á todos los puntos de la circunferencia, es patente que la suma de las mismas potencias es á

la

la tension de la circunferencia en cada uno de sus elementos como $n \times NO$ es á CN, esto es como la circunferencia $AMNOPB$ es al radio CN. Fig.

38 4.° Si $ABCD$, $abcd$ fueren dos cilindros flexibles 21.
rectos ó inclinados, cuyas bases sean orizontales, llenos de 22.
licores de diferente especie; las tensiones de las dos circunferencias $BMNC$, $bmnc$ estarán entre sí en razon compuesta de las alturas de los licores, de sus pesanteces específicas, y de los radios BH, bh de las mismas circunferencias.

Porque sean AB, ab las alturas verticales de lös dos cilindros propuestos, p y p' las pesanteces específicas de los dos licores; la espresion de la suma de las presiones con que el fluido $ABCD$ obra en todos los puntos de la circunferencia $BMNC$ es $p \times AB \times BMNC$, y la espresion de la suma de las presiones con que el fluido $abcd$ obra en todos los puntos de la circunferencia $bmnc$ es $p' \times ab \times bmnc$ (22). Llamemos F y f las tensiones de las dos circunferencias $BMNC$, $bmnc$ en cada uno de sus elementos; tendremos las dos proporciones (37)

$$p \times AB \times BMNC : F :: BMNC : BH$$
$$p' \times ab \times bmnc : f :: bmnc : bh$$

Pero $BMNC : BH :: bmnc : bh$. Luego $F : f :: p \times AB \times BMNC : p' \times ab \times bmnc :: p \times AB \times BH : p' \times ab \times bh$.

39 5.° Sean las dos coronas ó ánulos $BSERKM$, 23.
$bserkm$, los anillos elementales de que se componen los 24.
gruesos de los dos cilindros de que acabamos de hablar. Imaginemos que dichas coronas se compongan tambien de una in-

Fig. infinidad de filetes figurados en las circunferencias $XYVZ$, $xyvz$. Es evidente que las resistencias que los dos tubos cilíndricos oponen á su rompimiento en la direccion de sus gruesos BS, bs, estan en razon compuesta del número de filetes de que se forman los anillos elementales, y de la tenacidad de las materias de que son. Luego llamando R y r las dos resistencias de que hablamos; E y e, los gruesos BS, bs; T y t, las tenacidades de las materias de que se componen los tubos; tendremos $R : r :: ET : et$. Pero para que se verifique el equilibrio es forzoso que las fuerzas R y r sean iguales respectivamente á las fuerzas F y f de que se habló antes (38). Luego si llamamos H y h las alturas de los licores en los dos cilindros; D y d, los diámetros de las bases de estos mismos cilindros; tendremos $ET : et :: \frac{pHD}{2} : \frac{p'hd}{2}$. Luego $E : e :: \frac{pHD}{T} : \frac{p'hd}{t}$; esto quiere decir que *los gruesos de los dos cilindros estan en razon compuesta de la directa de las pesanteces específicas de los licores, de sus alturas, de los diámetros de los cilindros, y de la inversa de las tenacidades de las materias de que se componen los tubos.*

Quando los licores y las materias de los tubos son de una misma especie, se puede simplificar esta proporcion y reducirla á $E : e :: HD : hd$.

40 Se infiere de esta teórica que quando se conocen las tenacidades de las diferentes materias de que se pueden formar los tubos, y se conoce ademas, por medio de un esperimento inmediato, el grueso que debe tener un tubo determinado para aguantar el peso de un fluido dado, conoce-

ce-

ceremos, solo con hacer una proporcion, el grueso de otro tubo qualquiera, con tal que sean dadas sus demas dimensiones. Entre los muchos medios que hay para esperimentar la tenacidad de una materia propuesta, el mas sencillo consiste en determinar el peso que se necesita para romper un filete ó hebra de dicha materia, de grueso determinado. Fig.

Manifestemos con algunos egemplos la aplicacion de la doctrina antecedente.

EGEMPLO I.

Determinar el grueso que se le debe dar á un tubo de plomo de 6 pulgadas de diámetro, el qual ha de aguantar el esfuerzo de una columna de agua de 100 *pies de altura.*

Es evidente que podemos considerar el grueso del tubo como compuesto de una infinidad de filetes flexibles. Pero, segun esperimentó *Parent*, un tubo de plomo de 12 pulgadas de diámetro, y de 60 pies de altura, debe tener 6 lineas de grueso, para sostener verticalmente, sin rebentarse, el esfuerzo del agua. Tendremos, pues, (39) llamando x el grueso que se busca, $60 \times 12 : 100 \times 6 :: 6$ lin $: x = 5$ lin.

EGEMPLO II.

Determinar el grueso que se le debe dar á un tubo de cobre de 4 pulgadas de diámetro, para que aguante el esfuerzo de una columna de mercurio de 30 pies de altura.

La tenacidad del plomo es á la del cobre como 1 es á 28, con corta diferencia; y la pesantez específica del agua

es

Fig. es á la del mercurio, como 1 es á 14, ó allá se vá. Así, admitiendo como antes el esperimento de Parent, y llamando x el grueso que se busca, tendremos (39) $\frac{1 \times 12 \times 60}{1}$: $\frac{14 \times 4 \times 30}{28}$ :: 6 lin: $x = \frac{1}{2}$ lineas.

Del equilibrio de los fluidos elásticos.

41 Los *Fluidos elásticos* son aquellos que sin mudar de masa pueden mudar de volumen, ó, lo que viene á ser lo propio, que se reducen á menos volumen, quando se les comprime, y despues se dilatan en cesando ó menguando la presion. De esta clase son el ayre, el espíritu de vino, el vapor del agua &c.

42 No es facil señalar la causa primera y esencial de la virtud elástica, y por lo mismo no nos detendremos en averiguarla. Para lo que llevamos animo de declarar nos basta saber que hay una virtud elástica, y que sus efectos nos la dan á conocer. Así, supondremos [conforme hicimos en otro lugar (IV. 214)] como un hecho constante que algunos cuerpos se reducen á menos volumen, quando se hallan comprimidos de alguna fuerza esterior; que en cesando esta compresion, se restituyen á su primer estado por una virtud, llamada *Elasticidad*, que en ellos reside; y que esta virtud *espansiva* obra en todas las direcciones con una misma fuerza.

43 El equilibrio de los fluidos elásticos sigue las mismas leyes que el de los fluidos incompresibles. Todas estas leyes se fundan, conforme hemos prevenido, en aquella propiedad primordial comun á todos los licores, en virtud de la

qual-

qual una partícula qualquiera de una masa fluida en equilibrio está igualmente comprimida en todas las direcciones. Declaremos todo esto con alguna individualidad. Fig.

Propiedades generales del equilibrio de los fluidos elásticos.

44 *Si en todos los puntos de la superficie de una masa fluida elástica, no pesada, se aplican perpendicularmente potencias iguales, estas potencias forman equilibrio.*

Esto, del mismo modo que lo dicho (12), es una consecuencia manifiesta de la perfecta mobilidad de las partes del fluido, y de la presion igual que cada partícula padece en todas las direcciones.

45 Se sacarán de aquí consecuencias análogas á las de antes (13, 14, 15, 16, 17).

46 *La superficie (suponiéndola perfectamente libre) de un fluido elástico, pesado, y en equilibrio dentro de un vaso sólido ó flexible, es orizontal.*

Pruébase del mismo modo que las proposiciones (18 y 32).

47 Se echa de ver, como antes (20 y 33), que un fluido elástico se debe poner á nivel en las dos piernas de un sifon sólido ó flexible.

48 *Sean las que fueren las fuerzas que obren en un fluido elástico; despues que ha tomado una forma permanente, la fuerza elástica en cada punto de su masa es igual y contraria á la presion que en dicho punto se esperimenta.*

Porque si estas dos fuerzas no fuesen iguales y contrarias

Fig. rias, la mayor venceria á la menor, y no habria equilibrio; cuya consecuencia repugna con el supuesto.

49 Luego 1.° Si un fluido elástico que se halla comprimido de alguna causa esterior, llega á estar libre y obra con su elasticidad contra algun obstáculo, la fuerza que gastará será igual á la que causaba su compresion.

50 2.° Sea un fluido elástico que se comprime á sí
25. mismo en virtud de su propio peso; por egemplo, sea la columna cilíndrica y vertical *EKBA* de fluido elástico, que no esperimenta mas accion que la de su pesentez; la fuerza elástica de una rebanada qualquiera *Mmba*, de una altura infinitamente pequeña, es igual al peso absoluto de la columna superior *EKmM*, pues este peso es la fuerza que comprime la rebanada propuesta.

51 3.° Figurémonos que la columna *EKba* está dividida en una infinidad de rebanadas *abmM*, *Mmcd*, *cdef* &c. y llamemos p, p', p'' &c. las gravedades específicas de dichas rebanadas; sus pesanteces absolutas serán (IV.48) respectivamente $p \times abmM$, $p' \times Mmcd$, $p'' \times cdef$ &c. Así, una vez que el peso absoluto de la columna *EKba* es igual á la suma de estos mismos productos, síguese que la fuerza elástica de la rebanada *abmM* es igual á la suma de los productos de los volúmenes de las rebanadas superiores, multiplicado cada uno respectivamente por la gravedad específica de la rebanada á que pertenece.

26. 52 Cuestion. *Hallar la presion con la qual un fluido elástico que está en un vaso* ANE, *obra en una parte*

qual-

qualquiera fyr *de las paredes ó del fondo del mismo vaso.* Fig.

1.° Como el fluido no esperimenta mas impulso que el de su pesantez, su superficie *AE* es orizontal (46).

2.° Despues de dividida la superficie *fyr* en una infinidad de elementos *fg* , *gx* , *xy* &c. levántense las verticales *ft* , *gu* , *xz* &c. Imaginemos despues que el fluido , en toda la longitud que coge desde su superficie hasta el punto mas bajo de *fyr* , está dividido en una infinidad de rebanadas orizontales *AEea* , $ace'a$, $a'e'e''a''$ &c. que tendrán todas indispensablemente una misma densidad , y una misma gravedad específica en toda su estension. Hagamos á mas de esto un supuesto muy lícito , es á saber , que los gruesos ó alturas verticales de todas estas rebanadas son iguales entre sí. Ahora bien , es evidente , como en lo dicho antes (22) que el elemento *fg* está comprimido perpendicularmente en cada uno de sus puntos con una fuerza igual al peso del filete vertical correspondiente ; y como se puede suponer que todas las columnillas correspondientes á *fg* tienen una misma altura *ft* , síguese que si llamamos *P* la pesantez absoluta de la columnilla *ft* , la presion que aguanta *fg* será $fg \times P$. Pero la gravedad absoluta *P* es evidentemente igual á la suma de los pesos de las partes iguales *tb* , *bd*, *dk* &c. que componen la columnilla *ft* ; y estos últimos pesos que residen en volúmenes iguales pueden representar (IV.45) las gravedades específicas de las rebanadas correspondientes *Aeea* , $aee'a'$, $a'e'e''a''$ &c. Así , es patente que si llamamos *S* la suma de las gravedades específicas de

las

Fig. las rebanadas que corresponden á la altura ft, la presion que fg aguanta será $fg \times S$. Y si llamamos S', S'' &c. respectivamente las sumas de las gravedades específicas de las rebanadas que corresponden á las alturas gu, xz &c. la presion de gx será $gx \times S'$, la de xy será $xy \times S''$ &c. Luego finalmente la presion que sufre el espacio finito $fyr = fg \times S + xyS' + xy \times S'' +$ &c.

Síguense de aquí varias consecuencias.

53 1.° Supongamos, por egemplo, que queramos
27. determinar la presion que padece el fondo orizontal NQ del vaso $ANQE$, y que las pesanteces específicas de las rebanadas sean entre sí como las alturas tb, td, tk &c. contadas desde la superficie del fluido. Es evidente que corresponde un mismo número de rebanadas á todos los puntos del fondo NQ, y que sus pesanteces específicas forman una progresion arismética, cuyo número de términos es Nt. Luego si llamamos p' la gravedad específica de la rebanada que descansa inmediatamente en el fondo NQ, la espresion de la suma de las gravedades específicas de todas las rebanadas será $\left(p' + \frac{p' \times tb}{Nt}\right) \times \frac{Nt}{2}$, ó $\frac{p' \times Nt}{2}$, porque el término $\frac{p' \times tb}{Nt}$ es infinitamente pequeño en comparacion de p'. Por consiguiente la presion del fondo $NQ = NQ \times \frac{p' \times Nt}{2}$.

Apliquemos esta resolucion á un egemplo. Supongamos la superficie $NQ = 1$ pie en quadro; la altura $Nt = 100$ pies; y que la gravedad específica p' sea $\frac{1}{800}$ de la del agua. Tendremos desde luego $\frac{NQ \times Nt}{2} = 50$ pies cúbicos; y como el pie cúbico de agua pesa 70 libras, si multiplicamos

50 pies cúbicos por $\frac{1}{800}$ de 70 libras, el producto $4\frac{3}{8}$ libras será el valor de la presión que aguanta el fondo *NQ*. Fig.

54 2.ª Sea *ANQE* un vaso rectangular; sean las pe- 28.
santeces específicas de las rebanadas proporcionales á las alturas como poco ha (53), y supongamos que se haya de determinar la presion que esperimenta la parte *fr* de la pared vertical *AN*. Despues de dividida *fr* en una infinidad de elementos iguales *fg*, *gx*, *xy* &c, llamaremos p' la gravedad específica del fluido á la profundidad *Af*, y repararemos que la pesantez específica en $g = \frac{p' \times Ag}{Af}$; la gravedad en $x = \frac{p' \times Ax}{Af}$ &c. A mas de esto, se echa de ver lo mismo que poco ha, es á saber, que la suma de las pesanteces específicas de las rebanadas que corresponden á $Af = \frac{p' \times Af}{2}$; la suma de las gravedades específicas de las rebanadas que corresponden á $Ag = \frac{p' \times Ag}{Af} \times \frac{Ag}{2}$; la suma de las pesanteces específicas de las rebanadas que corresponden á $Ax = \frac{p' \times Ax}{Af} \times \frac{Ax}{2}$ &c. Luego la suma de las presiones que padecen todas las partes de $fr = fg \times \frac{p' \times Af}{2} + gx \times \frac{p' \times Ag}{Af} \times \frac{Ag}{2} + xy \times \frac{p' \times Ax}{Af} \times \frac{Ax}{2} + \&c. = \frac{p'}{2Af} \times \left(fg \times (Af)^2 + fg \times (Ag)^2 + fg \times (Ax)^2 + \&c\right)$. Pero como los productos $fg \times (Af)^2$, $fg \times (Ag)^2$, $fg \times (Ax)^2$ &c. crecen como los quadrados de las lineas *Af*, *Ag*, *Ax* &c. ó en la razon de los elementos de un tronco de pirámide de bases paralelas, tendremos $fg \times (Af)^2 + fg \times (Ag)^2 + fg \times (Ax)^2 + \&c. = \frac{(Ar)^3 - (Af)^3}{3}$. (I.607) Luego la suma de las presiones que padece $fr = \frac{p'}{2Af} \times \frac{[(Ar)^3 - (Af)^3]}{3} = \frac{p'[(Ar)^3 - (Af)^3]}{6Af}$.

Fig. Si miramos p' como un número, esta cantidad no es mas que de dos dimensiones, porque en el cálculo no hemos considerado mas que la dimension vertical del espacio *fr*. Pero si suponemos que este espacio sea rectangular, y llamamos A su dimension orizontal, la presion que padece en toda su superficie será $\frac{p' \times A \times [(Ar)^3 - (Af)^3]}{6Af}$.

Sea $A = 10$ pies, $Ar = 100$ pies, $Af = 50$ pies, y $p' = \frac{1}{800}$ de la gravedad específica del agua, como antes. Hallaremos $\frac{p' \times A \times [(Ar)^3 - (Af)^3]}{6Af} = 2552\frac{1}{12}$ libras.

55 La cuestion general, y la aplicacion que de ella hemos hecho están manifestando que en conociendo la ley que hay entre las gravedades específicas, ó las densidades de las rebanadas de un fluido elástico pesado, se podrá determinar geométricamente la presion con que obra en una superficie dada. Pero las determinaciones de esta naturaleza se pueden aplicar pocas veces á la práctica, por fundarse todas ellas en supuestos siempre precarios, y las mas veces inciertos. Lo mas acertado es acudir á la esperiencia. Despues de averiguado por este medio con qué presion un fluido elástico obra en una superficie orizontal dada, bastará una simple proporcion para inferir la presion con que obrará en otra qualquiera superficie orizontal, vertical ó inclinada, en el supuesto de que permanezca la misma su densidad, ó sensiblemente la misma, en todos los casos.

Pero sea el que fuere el método por el qual se determinare estas presiones, es de advertir que en quanto á sus efectos, están arregladas á la misma ley que las de los

los fluidos incompresibles. Por consiguiente, podemos inferir, en virtud del principio general (30), que dos columnas fluidas elásticas, del mismo modo que dos columnas fluidas incompresibles, forman equilibrio quando las presiones con que obran en sus bases, son proporcionales á las mismas bases. Esta ley que tambien abraza el caso en que las dos columnas fluidas son de diferente especie, manifiesta que si dichas dos columnas fuesen de la misma especie, é igualmente densas, siempre formarán equilibrio, haya la razon que hubiere entre sus bases; porque entonces sus presiones son con evidencia proporcionales á las mismas bases; esto viene á ser lo mismo que probamos (20), y es de suma utilidad en algunas máquinas hydráulicas. Fig.

56 Si un fluido elástico, ademas del impulso de su propia gravedad, esperimentase el de una fuerza esterior, se averiguaría el esfuerzo que resultaría contra las paredes del vaso, considerando que el impulso de la causa esterior se reparte igualmente entre todos los puntos del fluido, y combinando esta fuerza con la que procede de la gravedad, del mismo modo que lo hemos practicado respecto de los fluidos incompresibles.

Del equilibrio del Ayre.

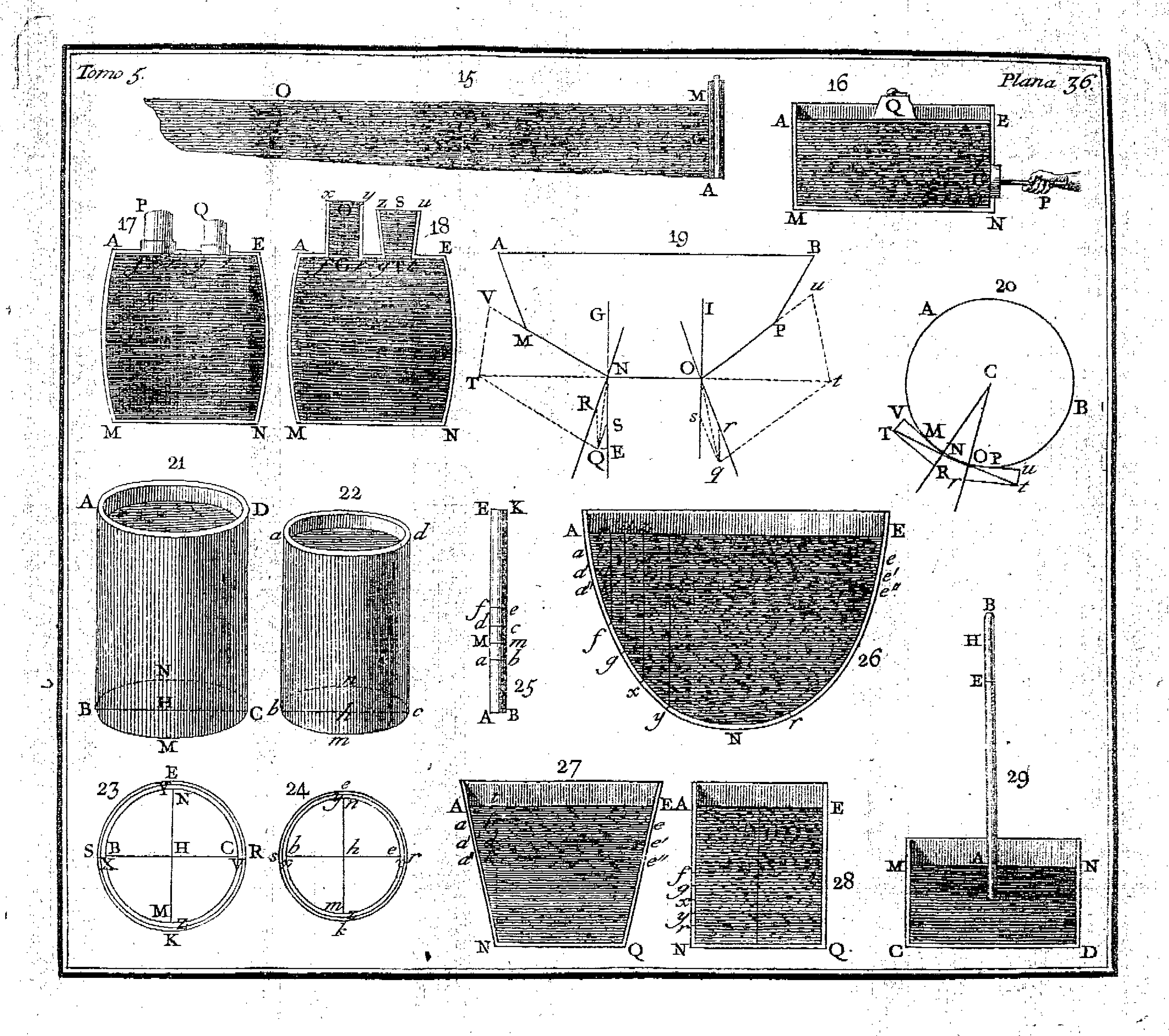
57 Como el ayre es el mas conocido de todos los fluidos elásticos, el que mas espacio coge, el mas util para nosotros, es acreedor á que nos detengamos en considerar

Fig. sus propiedades con alguna individualidad. Pero para tratra este asunto con rigor geométrico, sería indispensable conocer la figura de las moléculas *aereas*, y la ley precisa con que se encogen ó dilatan, por razon del frio, del calor, ú de otras causas físicas; pero acerca de todos estos puntos lo que se sabe es muy poco é incierto. No hay, pues, que esperar en esta materia una teórica matemática y rigurosa. No obstante, no seguiremos hypótesi ninguna, y quanto digéremos estará fundado en la esperiencia.

58 *El ayre es un fluido pesado.* La pesäntez es una fuerza universal que abraza toda la naturaleza; no hay cuerpo ninguno que esté libre de su impulso. Sin embargo los antiguos no conocieron la pesantez del ayre: *Galileo* tuvo sospechas de ella á principios del siglo pasado; pero su discípulo *Torricelli* fue el primero que la demostró en el año de 1643. Cogió un tubo de vidrio

9. *AB*, de unos tres pies de largo, abierto en el estremo *A*, y tapado exactamente en el estremo *B*; le volvió boca arriba para llenarle de azogue ó mercurio, procurando, quanto pudo, no entrase ni quedase en él ayre ninguno; tapando despues el estremo *A* con el dedo, puso el tubo en una situacion vertical, estando arriba el estremo *B*; metió el estremo *A* en un vaso *MCDN* en que habia azogue, y quitando el dedo dejó el mercurio que habia en el tubo entregado al impulso de su pesantez. Entonces la columnä *AE* de mercurio que habia en el tubo, se mantuvo unas 28 pulgadas mas alta que el nivel *MN* del mercurio

del


Tomo 5.
Plana 36.
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29

del vaso *MCDN*. De aquí infirió Torricelli con mucha razon, que la columna de mercurio se mantiene elevada dentro del tubo, en virtud de la presion del ayre esterior en la superficie del mercurio que hay en el vaso *MCDN*, cuya presion no padece la columna contenida en el tubo por estar sellado herméticamente su estremo superior. Con efecto, si se le hace una abertura en el estremo superior del tubo para que el ayre se le pueda introducir, la columna de mercurio se cae al instante, y se vierte en el vaso. Los barómetros comunes * no son otra cosa que el esperimento de Torricelli continuado. Fig.

Quando tratemos en adelante particularmente del barómetro, hablaremos de las variaciones locales y físicas que padece la altura del mercurio en este instrumento.

59 Síguese de la última proposicion 1.° que por ser pesado el ayre, y su presion en cada punto de la superficie de la tierra equivalente al peso de una columnilla de mercurio, cuya altura media suponemos que se conozca, es fácil averiguar todo el peso de la masa de ayre que circunda el globo terrestre. Porque sea R el radio del globo terrestre; r, la altura dada de la espresada columnilla de mercurio; P, la razon entre el diámetro y circunferencia; p, la gravedad específica del mercurio. Se buscarán las solideces de dos esferas tales que el radio de la una sea $R + r$, y el de la otra, R; se restará el segundo sólido del primero,

* Mas adelante manifestaremos la construccion, y los usos de este instrumento.

Fig. y saldrá la resta $\frac{4P(R+r)^3}{3} - \frac{4PR^3}{3}$ ó $4P\left(R^2r + r^2R + \frac{r^3}{3}\right)$. Se multiplicará esta resta por p, y considerando que los términos en que están r^2 y r^3 se pueden omitir, sin recelo de error sustancial, será $4pPR^2r$ la espresion general y muy aproximada del peso que se busca.

Sea, por egemplo, $r = 28$ pulgadas; el peso de un pie cúbico de mercurio $= 960$ libras. A mas de esto, supongamos que un grado de círculo máximo de la tierra (I. 786) contiene 56979 toesas, ó 57000 toesas. Se sacará, despues de egecutados todos los cálculos indicados en la fórmula precedente, que el peso total de la atmósfera es de 11028854877090909091 libras, ó allá se vá.

60 2.° Quando dos columnas, la una de mercurio, y la otra de agua se equilibran, sus alturas son recíprocamente proporcionales á sus gravedades específicas (31); por manera que si la altura de la columna de azogue es de 28 pulgadas, la de la columna de agua deberá ser de unos 32 pies. Y como la presion de la atmósfera contraresta la primera de estas dos columnas, conforme acabamos de manifestar, tambien contrarestará la segunda. Por consiguiente en el vacío la presion de la atmósfera ha de sostener una columna de agua de unos 32 pies de alto.

30. La esperiencia confirma esta ilacion. Sea HQ un tubo ó cuerpo de bomba vertical *, cuyo estremo Q, que está abierto, está metido dentro del agua. Córrase de abajo arriba á lo

* Yá declararemos á su tiempo quanto importa saber acerca de las bombas.

lo largo del tubo un émbolo *KO* que llene exactamente todo Fig.
su hueco: el agua subirá por el tubo hasta la altura de unos 32 pies mas arriba del nivel *MN*; y no pasará de allí, aunque se suba mas arriba el émbolo. La razon de esto es muy patente. Quando el émbolo sube, deja detrás de sí un vacío en el qual el ayre esterior no se puede introducir, y la presion libre de este ayre en la superficie *MN* del depósito, impele el agua, obligándola á introducirse por la abertura *Q*, y subirse por el tubo. El agua no sube mas arriba de los 32 pies, porque entonces su peso está en equilibrio con la presion de la atmósfera.

*6*1 3.° Supongamos que en el esperimento antecedente el agua haya subido á la altura *AB* de 32 pies; que despues se suba mas arriba el émbolo, y quede entre la superficie *BT* del agua, y la base del émbolo un hueco ó vacío como *BP*. Si entre los puntos *A* y *B* se hace una abertura lateral *E* en el tubo, el ayre esterior entrará con ímpetu por la espresada abertura, y dividirá en dos partes *AF*, *ET* la columna *AT* que se compone de moléculas muy móbiles. La primera *AF* caerá por su peso en el depósito *MCDN*, porque la presion del ayre que se introduce por *E*, está en equilibrio con la presion del ayre que impele el agua para que se introduzca por el estremo *Q* del tubo. Pero la segunda porcion *ET* hallándose impelida del ayre que entra por *E*, y obra en todas las direcciones de arriba abajo, y de abajo arriba, subirá indispensablemente al espacio vacío *BP*, que está mas arriba. Esta elevacion de la co-

Fig. lumna *ET* se parèce á la suspension del agua de una botella destapada puesta boca abajo. La presion del ayre esterior en la boca de la botella es la que sostiene el agua.

La consecuencia que acabamos de sacar se puede confirmar con un hecho que años pasados fue muy sonado. Un Hojalatero de Sevilla se empeñó en hacer subir el agua á la altura de 60 pies por medio de una bomba de las que llaman *Aspirantes*; pero despechado de que no subiese el agua lo que él esperaba, dió un martillazo al tubo de aspiracion, y le hizo un agugero de una linea de diámetro, diez pies mas arriba del depósito. Volviendo despues á maniobrar con la bomba, subió el agua á la altura de 60 pies. Muchos físicos que han hecho este esperimento, ú otros equivalentes, han hallado que con diferencia de una corta merma, sale por el desembocadero de la bomba el valor de la columna *ET*; despues cesa la evacuacion, y es menester que vuelva á obrar la bomba, tapando primero la abertura *E*. La merma que padece el producto de la bomba, es efecto de la resistencia del rozamiento que el agua esperimenta al tiempo de subir tubo arriba. Fuera de esto, es preciso que por la abertura *E* entre ayre que se mezcla con el agua, y contraresta con su elasticidad parte del efecto del ayre esterior. Se echa de ver que con cerrar y abrir succesivamente el agugero *E*, se puede construir una especie de bomba que suba el agua muy alto; pero dará poca agua, y con mucha interrupcion.

31. 62 4.° Sea *ABO* el *Sifon* ó la bomba que sirve comun-

munmente para sacar licores de los vasos en que están. Compónese este instrumento de dos piernas ó brazos desiguales *AB*, *BO*. Se mete la mas corta *AB* dentro de la cuba, del tonel, ó en general del vaso *MCDN* que contiene el licor; y echando, con chupar ó de otro modo, el ayre que hay dentro del sifon, sube el licor tubo arriba, y sale por el orificio *O* hasta vaciarse todo el vaso, con tal que el punto *O* esté mas bajo que el fondo del vaso. Fig.

Esto es muy facil de esplicar. Figurémonos que el estremo *O* del tubo está metido dentro de un vaso *EF* donde está el licor. Se echa de ver que cada una de las partes *AB*, *BO* de la bomba se puede considerar como un tubo particular, parecido al de Torricelli. Por consiguiente, si representa *KX* la presion de la atmósfera; *KV*, el peso de la columna fluida *AB*; *KZ*, el peso de la columna *BO*, es evidente que *VX* espresa la fuerza que levanta el fluido dentro del tubo *AB*, y que *ZX* representa la fuerza que impele el fluido para que suba por el tubo *OB*. Pero como estas dos últimas fuerzas son contrarias, la menor queda destruida; y *ZV* es la fuerza residua que causa la evacuacion en la direccion *ABO*.

Síguese de aquí 1.° que si $KV = KZ$, no saldrá el licor. 2.° que si el peso de la pierna mas corta fuese mayor que el de la atmósfera, tampoco saldrá el licor, porque entonces no tendrá la presion de la atmósfera bastante fuerza para levantar el licor hasta *B*. Así, por egemplo, si el licor fuese agua, será preciso que la altura de la pierna mas corta *AB* no llegue á 32

pies;

Fig. pies: si fuese azogue, *AB* no deberá llegar á 28 pulgadas &c.

63 *El ayre es un fluido elástico.* Llénese de ayre una vegiga hasta que se hinche ; resultará una pelota que se comprime apretándola, y se dilata en cesando la compresion. Luego &c.

64 *La fuerza elástica del ayre comprimido es igual á la fuerza que causó la compresion.*

Esto es una consecuencia inmediata de lo dicho (48 y 49).

32. 65 Entre varias pruebas de esta proposicion, que suministra la esperiencia, se saca una muy patente de la *Fuente de Heron.* Compónese esta máquina de un cajon ó arca *ABCD* cerrada por todos lados, llena de agua hasta *EF* un poco mas abajo de *AB* ; de otro cajon *GHKI*, cerrado tambien por todos lados, igual con el primero, y lleno de ayre; de un tubo *OT* soldado exactamente con las platinas *AB*, *DC*, *GH*, que por el estremo *O* se comunica con la parte de afuera, y con el cajon inferior por el estremo *T* que está muy inmediato al fondo *IK* ; de un tubo *XY* soldado con las dos arcas, y cuyo estremo superior *X* está cerca del fondo ó suelo *AB* ; de un tubo *QP* cuyo estremo inferior *P* está cerca del fondo *DC*, y el estremo superior *Q*, soldado con el fondo *AB*, lleva un tubo aditicio. Todo esto supuesto, tápese con el dedo el tubo aditicio *Q*, y échese una poca de agua en la boca *O* del tubo *OT* ; bajará hasta *IK*, y subirá por egemplo hasta *VS.* Entonces no habrá mas comunicacion entre el ayre esterior, y el que está dentro de los

los dos cajones. Prosígase echando agua; el ayre que ocupa los espacios *GHSV*, *ABFE*, *XY* se condensará, contraherá ó comprimirá poco á poco hasta que su fuerza elástica forme equilibrio con la presion del agua que se echó por *OT*. Si la superficie del agua en el cajon *GHKI* fuere *MN*, el ayre de que acabamos de hablar comprimirá perpendicularmente cada parte de la superficie que le circunda con una fuerza igual al peso de una columna de agua, cuya base fuese la parte comprimida, y *OL* la altura. Así la superficie *EF* del agua del cajon superior es impelida de arriba abajo por el mismo ayre, é intenta subirse por el tubo *PQ*; por manera que si se quita el dedo de la boca del tubo aditicio, saldrá un chorro de agua que llegará á la altura $RZ = OL$. Queda, pues, probado que la elasticidad ó resorte del ayre produce el mismo surtidor que produciría el peso del agua que le comprimió. Fig.

Si se hiciera que el agua que cae del chorro volviera á entrar por *O*, esta agua pasaría al cajon inferior, y por consiguiente el surtidor duraría hasta que toda el agua que hay desde el punto *P* á *EF* saliese por el mismo surtidor.

66 *El ayre se comprime á sí mismo con su propio peso.*

Porque como el ayre es un fluido pesado, si nos figuramos la atmósfera dividida en una infinidad de rebanadas, ó, lo que mas hace al caso, de camas perpendiculares á la direccion de la pesantez, es patente que las camas inferiores aguantarán el peso de las superiores; de donde se originará una presion que será tanto mayor, siendo todo lo demas

Fig. mas igual, quanto mas abajo estuviere en la atmosfera la cama comprimida.

Hemos dicho *siendo todo lo demas igual*, porque otras causas como el frio, el calor contribuyen para comprimir ó dilatar el ayre. Es sumamente variable la densidad de este fluido, y viene á ser ochocientas ó novecientas veces menor que la del agua. La razon media entre estas dos densidades puede suponerse en nuestros climas igual á la fraccion $\frac{1}{850}$.

67 Síguese de aquí y de lo dicho (64) que si el ayre despues que se comprimió á sí mismo con su peso, llega á obrar con sola su elasticidad, producirá el mismo efecto que obraba con su peso. Confirmase con el esperimento siguiente.

33. Tómese una botella de vidrio *ABCD* de figura cilíndrica; échesela azogue *AEFD*; introdúzcasela un tubito de vidrio *K* que tenga 29 ó 30 pulgadas de alto, abierto por ambos estremos, de modo que el inferior se meta algunas lineas dentro del azogue; séllese el tubo exactamente con el cuello de la botella, de modo que el ayre que ocupa el espacio *EBCF* no tenga comunicacion ninguna con el ayre esterior; plántese despues la botella con su tubo debajo del recipiente *LIHM* de la máquina pneumática, cuya descripcion daremos á su tiempo; sáquese quanto se pueda el ayre que hubiere en el recipiente; entonces el mercurio bajará á *NO*, y subirá por el tubo mas arriba de *NO*, á la misma altura con poca diferencia, á la qual se mantiene en el barómetro, en el lugar donde se hace el esperimento.

La

La razon de esto es muy obvia; porque antes que se empiece á hacer el vacuo en la máquina pneumática, el ayre que ocupa el espacio *EBCF* está en el mismo estado que el ayre esterior; quando se hace despues el vacío dentro del recipiente, el mismo ayre *EBCF* dá curso, digámoslo así, á su elasticidad, obliga en consecuencia de esto al mercurio á que baje á *NO*, y suba por dentro del tubo vacío; y esta ascension es con corta diferencia igual á la que causa en el barómetro el peso del ayre. Digo *con corta diferencia*, porque no es posible, por mas que se intente, dejar de todo punto sin ayre el recipiente de la máquina pneumática. Fig.

68 *Si se comprime una misma masa ó cantidad de ayre, y se la reduce á que ocupe diferentes espacios ó volúmenes; estos volúmenes serán entre sí en razon inversa de las fuerzas comprimentes.*

Pruébase con el esperimento siguiente. Sea *ABC* un tubo de vidrio recurvo, sellado herméticamente en su estremo *C*, y abierto en el estremo *A*. Las dos piernas *DA*, *EC* son verticales; pero el tubo *DE* que une la una con la otra es orizontal. Se le dan por lo comun tres ó quatro líneas de diámetro interior á este tubo. La pierna corta *EC* ha de ser perfectamente cilíndrica para que se puedan comparar exactamente unos con otros los diferentes volúmenes de ayre, que en ella se condensan. Suponemos que tenga 12 pulgadas de alto; la otra *DA* es mucho mas alta. Echese poco á poco en el tubo un poco de azogue para llenar el tubo

Fig. bo orizontal, y procúrese que las dos superficies *DV*, *IE* de este fluido, en ambas piernas verticales, estén á nivel, á fin de que el ayre encerrado en el espacio *EC* esté en el mismo estado que el ayre esterior; porque se viene á los ojos que si el resorte del ayre interior estuviese mas ó menos contraido que el del ayre esterior, las superficies *IE*, *DV* padecerían presiones desiguales, y no podrian por lo mismo ponerse á nivel. Prosígase echando mercurio en la otra pierna *DA*, y se reparará que á medida que sube á *H*, la superficie *EI* sube á *F*. En el supuesto de que la presion de la atmósfera equivalga al peso de una columna de mercurio de 28 pulgadas de alto, se hallará que si, despues de tirada la orizontal *FG*, la altura *GH* = 14 pulgadas, la altura *FC* del espacio que el ayre ocupare, será = 8 pulgadas; si *GH* = 28 pulgadas, *FC* = 6 pulgadas &c. Pero de aquí se sigue que los diferentes volúmenes del ayre encerrado al principio en *EC* siguen la razon inversa de los pesos comprimentes; porque en el primer instante quando dicho ayre no padece mas que la presion de la atmósfera, se le puede considerar como que sostiene el peso de una columna de mercurio, que coge 28 pulgadas de alto; quando se echa despues en la pierna *DA* mercurio hasta la altura de 14 pulgadas mas arriba de la linea de nivel *FG*, la presion que esperimenta la masa espresada de ayre es igual al peso de una columna de mercurio cuya altura es de 28 pulgadas + 14 pulgadas, esto es de 42 pulgadas: quando la altura del mercurio en la pierna *DA* mas

ar-

arriba de *FG* = 28 pulgadas, la presion de la misma masa de ayre es igual al peso de una columna de mercurio, cuya altura es de 28 pulgadas + 14 pulgadas + 14 pulgadas, ó 56 pulgadas &c. De donde se sigue que si los números 28, 42, 56 representan los pesos comprimentes, los números 12, 8, 6 espresarán los volúmenes de la masa de ayre. Pero tenemos estas diferentes proporciones 12 : 8 :: 42 : 28; 12 : 6 :: 56 : 28; 8 : 6 :: 56 : 42. Luego los volúmenes siguen la razon inversa de los pesos comprimentes. Fig.

Del mismo modo se discurrirá respecto de alturas de mercurio que estuviesen en las dos piernas del tubo en otra razon qualquiera; y fundándose el discurso en la esperiencia, se sacará la misma conclusion final.

Todos estos esperimentos se deben hacer de modo que el ayre encerrado en *FC* sea del mismo temple que el ayre esterior, y que por consiguente su volumen no padezca mas variacion que la que pueden ocasionar los pesos comprimentes. Sin esta precaucion, como el calor y el frio no obrarán igualmente en los dos ayres, no serán los mismos los resultados, y sería dificultoso hallar un método seguro, y no hypotético, por cuyo medio se pudiesen distinguir sus efectos de los que causan los pesos comprimentes.

69 Por consiguiente, siendo una misma la masa, las densidades están en razon inversa de los volúmenes (IV. 32). Luego las densidades de una misma masa de ayre comprimida de diferentes pesos, son directamente proporcionales á los

Fig. los mismos pesos, ó (64) á las fuerzas elásticas que tiene en estos diferentes casos.

70 Una vez que el ayre se comprime á sí mismo con su propia gravedad (66), se sigue que si una columna vertical de la atmósfera tuviese un mismo temple en toda su altura, las densidades de sus diferentes puntos formarán una progresion geométrica; porque si nos figuramos que dicha columna se componga de una infinidad de rebanadas orizontales de igual masa, la densidad de cada una de estas rebanadas será proporcional al peso que sostiene (69). Pero este peso es cabalmente la suma de los pesos de las rebanadas superiores; luego la densidad de cada rebanada es proporcional á la suma de las rebanadas superiores. Por consiguiente las densidades de las diferentes rebanadas, al bajar, componen una serie de tal naturaleza que dos términos consecutivos tienen entre sí la misma razon que las sumas de los términos que los preceden respectivamente. Luego la espresada serie es una progresion geométrica (I. 190 y 218).

71 De todos los esperimentos que se han hecho acerca de la compresibilidad del ayre resulta que una misma masa de este fluido se comprime en la proporcion de los pesos que sostiene; pero hemos de prevenir que esto se debe entender de las condensaciones *medias*; porque parece que en los casos estremos no puede salir verdadera la regla. Con efecto, figurémonos primero que la presion crece al infinito: sería preciso que la condensacion creciese otro tanto, y que por último el ayre no ocupase mas que un espacio infinita-

támente pequeño. Pero déselas á las moléculas aereas la figura que se quisiere, es patente que quando sus resortes estuvieren contrahidos hasta que todas sus partes se toquen, la impenetrabilidad mutua de las mismas partes no dará mas lugar á compresion ninguna. Añádase á esto que con el ayre pueden estar mezcladas partes duras faltas de resorte, ó dotadas de un resorte muy imperfecto. Por el contrario, si suponemos que la compresion mengua al infinito, no se podrá suponer que por lo mismo el ayre se dilata al infinito; porque el resorte perfecto ó imperfecto de las moléculas aereas ha de tener una espansion determinada, y no alcanza la imaginacion como una masa finita puede llegar á ocupar un espacio infinito. Luego no se verifica, hablando con rigor, que las condensaciones del ayre sigan generalmente la razon de los pesos comprimentes. Pero como las fuerzas comprimentes de que nosotros nos podemos valer, están ceñidas dentro de unos límites determinados, se puede mirar como verdadera, sin restriccion ninguna, la proposicion sentada (68). Fig.

72 De la propiedad que goza el ayre de condensarse, conforme hemos dicho, en la proporcion de los pesos comprimentes, se sigue (70) que si suponemos que en las diferentes camas de la atmósfera no obran mas que la pesantez y la elasticidad, sus densidades compondrán una progresion geométrica. Pero en el estado físico y natural de las cosas, no se verifica generalmente esta progresion, y lo manifestará mas adelante la esperiencia. Quando el calor,

Fig. ó el frio varian de una cama á otra, se turba el equilibrio del ayre, se forman en su masa corrientes, ó vientos ácia varias direcciones, y la densidad del mismo fluido entra indispensablemente á la parte de estas variaciones.

Del equilibrio de los fluidos con los cuerpos sólidos sumergidos.

73 La superficie de un cuerpo sólido sumergido en un fluido está oprimida perpendicularmente en todos sus puntos por el fluido adyacente, del mismo modo, y por las mismas razones que están oprimidos el fondo y las paredes de un vaso por el licor que contiene. De todas estas presiones resulta una fuerza que empuja ácia arriba el cuerpo, cuya fuerza solo puede contrarestarla la pesantez del mismo cuerpo, ó alguna causa esterior, ó finalmente la pesantez combinada con una causa esterior. Determinaremos primero el modo verdadero de establecer este equilibrio; despues declararemos como se puede conservar ó renovar, en el supuesto de que le haya alterado alguna causa. Aclararemos los principios generales, quando sea menester, aplicándolos á egemplos útiles ó conducentes para enseñar con facilidad el uso de la teórica.

Leyes del equilibrio de un cuerpo sólido sumergido en un fluido.

74 Daremos principio á este asunto con la siguiente proposicion, que nos hace al caso.

Si

Si en los medios de los lados EA, AB, BC, CD, DE *de un polýgono inflexible* EABCD *se aplican perpendicularmente las potencias* P, Q, R, S, T, *proporcionales á dichos lados, cada una al suyo, y tales que todas sus direcciones de afuera ácia adentro, ó de adentro ácia afuera estén en el plano del polýgono; dichas potencias formarán equilibrio.* Fig. 35.

Tírense las diagonales *BE*, *BD*. Es evidente por el principio de la composicion y resolucion de las fuerzas (IV. 105) que dos fuerzas que concurren en un punto, y su derivada que pasa indispensablemente por el mismo punto, pueden figurarse en los lados de un triángulo, perpendiculares á las tres fuerzas propuestas, cada uno á la suya. Así, siendo las dos fuerzas *P*, *Q* perpendiculares y proporcionales á los lados *EA*, *AB* del triángulo *EAB*, su derivada será una fuerza que llamaremos *X*, perpendicular y proporcional al lado *BE* del mismo triángulo. A mas de esto, la fuerza *X* es perpendicular al medio de *BE*; porque debe pasar por el punto de concurso *a* de las dos fuerzas componentes *P*, *Q*, que es evidentemente el centro de un círculo que se circunscribiría al triángulo *EAB*; de donde se sigue que la fuerza *X* es perpendicular al medio de la cuerda *EB*. Del mismo modo demostraremos que la derivada de las dos fuerzas *T*, *X* es una fuerza, que llamaremos *Y*, proporcional á *BD*, y perpendicular al medio de *BD*; que la derivada de las dos fuerzas *R*, *S* es una fuerza, que llamaremos *Z*, proporcional á *BD*, y perpendicular al medio de *BD*. Pero

Fig. quando todas las potencias P, Q, R, S, T obran desde afuera ácia adentro, ó desde adentro ácia afuera del polýgono, las dos derivadas finales Y y Z son evidentemente iguales, y directamente opuestas. Luego se destruyen, y está en equilibrio el systema de todas las fuerzas.

75 La demostracion sería la misma aun quando fuese otro qualquiera el número de los lados del polýgono. Luego tambien subsiste quando llega á ser infinito el número de los lados del polýgono. Pero toda curva cerrada, sea la que fuere, se puede considerar como un polýgono de una infinidad de lados. Luego si concebimos una curva cerrada qualquiera, inflexible, dividida en una infinidad de elementos, y en el medio de dichos elementos se aplican perpendicularmente potencias que sean proporcionales con ellos; dichas potencias están en equilibrio.

76 Tambien se puede inferir de aquí, que si á todos los puntos de una curva cerrada, inflexible, se aplican perpendicularmente fuerzas iguales, estas fuerzas forman equilibrio; porque de esto resultan con evidencia potencias proporcionales á los elementos de la curva, y perpendiculares á sus medios.

77 *Quando un cuerpo sólido está metido dentro de un fluido* 1.° *la fuerza con que el fluido intenta levantarle en alto verticalmente, es igual al peso del volumen del fluido cuyo lugar ocupa el sólido.* 2.° *La direccion vertical de dicha fuerza pasa por el centro de gravedad del volumen fluido echado de su lugar, ó, lo que viene á ser lo mismo, por el*

el centro de gravedad de la parte del cuerpo sumergida en el fluido, y considerada como homogenea. Fig.

Concibamos que la parte del cuerpo sumergida en el fluido está dividida en una infinidad de rebanadas por planos orizontales. Imaginemos despues que la superficie convexa de cada una de estas rebanadas está dividida en una infinidad de trapecios por planos verticales, y al mismo tiempo perpendiculares á estos mismos trapecios. Es facil figurarse la posicion de estos planos considerando que en cada punto de la superficie convexa de una rebanada se puede levantar una linea vertical, y una linea perpendicular en el mismo punto á la superficie convexa de la rebanada; el plano que pasare por estas dos lineas, será á un tiempo vertical y perpendicular á la superficie convexa de la rebanada.

Sea *MNYZ* la base inferior y orizontal de una de las 36.
rebanadas de que acabamos de hablar; *Ma*, la base de uno 37.
de los trapecios elementales, que componen la superficie convexa de la misma rebanada. Llamaremos *X* este trapecio. Por el punto *M* levántese el plano *AMDB* vertical y 37.
perpendicular al mismo tiempo al trapecio *X*; de donde resulta que este mismo plano *AMDB* corta el plano orizontal *MNYZ* en la direccion de una recta *MY* perpendicular al elemento *Ma*. Hágase que por el punto *m* infinitamente próximo á *M*, pase el plano orizontal *my* que representa la base superior de la rebanada propuesta. Desde el punto *M* levántese la vertical *MP* hasta la superficie *AB* del fluido.

Sentado esto, es evidente por los principios arriba sen-

Fig. tados, que todos los puntos de la superficie metida en el licor están perpendicularmente oprimidos con fuerzas proporcionales á sus distancias al nivel AB del mismo licor. Así, tomando por unidad la densidad ó pesantez específica del fluido, el trapecio X cuya base es Ma, y la altura Mm, padece una presion perpendicular, cuya espresion es $Ma \times Mm \times MP$. Represente esta fuerza la MF perpendicular á Mm, y resolvámosla en otras dos fuerzas ME, MG, la una orizontal, y la otra vertical. Los dos triángulos semejantes MHm, MEF dán estas dos proporciones $Mm : MH :: MF : ME$, y $Mm : Hm :: MF : EF$ ó MG. Luego $ME = MF \times \frac{MH}{Mm} = Ma \times Mm \times MP \times \frac{MH}{Mm} = Ma \times MP \times MH$; y $MG = MF \times \frac{Hm}{Mm} = Ma \times Mm \times MP \times \frac{Hm}{Mm} = Ma \times MP \times Hm$. Pero la espresion $Ma \times MP \times MH$ significa, segun se echa de ver, que á todos los puntos del elemento Ma están aplicadas perpendicularmente potencias iguales, cada una de las quales tiene por espresion el producto constante $MP \times MH$. Lo mismo diremos de todos los elementos de la curva $MNYZ$. Cada uno de sus puntos esperimenta la presion perpendicular y orizontal de una fuerza cuya espresion es el mismo producto $MP \times MH$. Luego se destruyen todas estas presiones (76). No queda, pues, de las dos fuerzas en que se ha resuelto la fuerza MF, mas que la fuerza vertical MG ó $Ma \times Hm \times MP$. Pero es evidente que la suma de todos los productos de esta última clase compone el volumen del fluido, cuyo lugar ocupa el cuerpo. Luego

1.° La suma ó la derivada vertical de las fuerzas con Fig. que intenta el fluido levantar en alto al cuerpo, es igual á la suma de los pesos pequeños que componen el peso total del fluido que dicho cuerpo ha echado de su lugar.

2.° Las direcciones de estas dos fuerzas están en una misma linea vertical; porque las direcciones de sus fuerzas elementales correspondientes están en una misma linea vertical. Así, la fuerza vertical con que el fluido intenta levantar ácia arriba el cuerpo, pasa por el centro de gravedad del volumen de fluido echado de su lugar, ó por el centro de gravedad de la parte del cuerpo sumergida en el fluido, y considerada como homogenea.

78 De aquí se infiere 1.° que si un cuerpo abandonado á la accion de la pesantez, y que fluctua sobre un fluido, está en una inmobilidad absoluta, siempre se verificarán estas dos condiciones á un tiempo. 1.° El peso del cuerpo es igual al peso del volumen del fluido echado de su lugar. 2.° El centro de gravedad del cuerpo, y el de la parte sumergida, considerada como homogenea, están en una misma linea vertical. Porque para el equilibrio es menester 1.° que el peso del cuerpo sea igual al conato del fluido que intenta levantarle verticalmente. 2.° Es preciso que sean directamente opuestas estas dos fuerzas.

Quando no se verifican estas dos condiciones á un tiempo, el cuerpo oscila, y no llega al estado de equilibrio hasta que despues de aniquilados todos sus movimientos por la resistencia del agua y del ayre, ú otras causas, encuentra

Fig. y conserva finalmente una situacion tal que se destruyen mutuamente el peso y el impulso vertical del fluido.

En las consecuencias generales que siguen suponemos que el centro de gravedad del cuerpo sólido y el de su parte sumergida en el fluido, están en una misma linea vertical; pero mas abajo esplicaremos el modo de cumplir con esta condicion respecto de cuerpos particulares de figura dada.

79 2.° Si llamamos M el volumen total del cuerpo que fluctúa; N, su parte sumergida en el fluido, y considerada siempre como homogenea; p, su pesantez específica; p', la del fluido; es evidente (IV. 48) que $p \times M$ es la espresion del peso absoluto del cuerpo propuesto, y $p' \times N$ es la del peso del fluido echado de su lugar. Así, la condicion de equilibrio que se ha de verificar aquí, dá la equacion $p \times M = p' \times N$. De donde resulta

1.° Que si la pesantez específica del fluido fuese mayor que la de dicho cuerpo; este nadará; porque tendremos $N < M$.

2.° Que si fuere una misma la gravedad específica del cuerpo y del fluido, se sumergirá enteramente el cuerpo en el fluido, y por otra parte se mantendrá en él indiferentemente á la profundidad que se quiera, porque en este caso debe salir $N = M$.

3.° Que quando la pesantez específica del cuerpo fuere mayor que la del fluido, no podrá dicho cuerpo quedarse como en el ayre dentro del fluido sin el auxilio de una

po-

potencia que le sostenga; porque entonces $p \times M > p' \times N$. Fig.
De donde se sigue que el cuerpo abandonado á sí mismo, deberá sumergirse enteramente, y bajar hasta el fondo del vaso, prescindiendo de toda resistencia.

80 3.° Supongamos que el cuerpo nade libremente, ó que su pesantez específica sea menor que la del fluido. De la equacion $p \times M = p' \times N$ se saca la proporcion $p : p' :: N : M$, esto es, que *la pesantez específica del cuerpo es á la del fluido, como el volumen de la parte del cuerpo metida en el fluido es al volumen total del mismo cuerpo.* Con tres términos que se conozcan de esta proporcion, se podrá determinar el quarto que no fuese conocido.

81 4.° La misma equacion $p \times M = p' \times N$ está diciendo que basta conocer el peso absoluto de un cuerpo fluctuante sobre un fluido, y la pesantez específica de este para hallar el volumen de la parte sumergida del fluido.

Supongamos, por egemplo, que pese 20 libras dicho cuerpo, que esté metido en el agua, y que pese el pie cúbico de agua 70 libras. Tendremos, en virtud del supuesto $p \times M = 20$ libras, y por consiguiente tambien $p' \times N = 20$ libras. Solo nos falta hallar el volumen de un cuerpo de agua que pese 20 libras, y para conseguirlo haremos esta proporcion 70 libras : 1 pie cúbico ó 1728 pulgadas cúbicas :: 20 libras : $N = 493\frac{5}{7}$ pulgadas cúbicas.

82 5.° Si añadimos ó quitamos una cantidad n al volumen N que el cuerpo fluctuante tiene sumergido en el fluido, será menester, para que subsista el equilibrio, añadir

Fig. dir ó quitar un peso q al peso absoluto $p \times M$ del mismo cuerpo, de modo que salga $p \times M \pm q = p' \times N \pm p' \times n$, ó si no $q = p' \times n$. Es, pues, el peso añadido ó quitado q siempre igual al peso del volumen n de fluido que el cuerpo echa de su lugar de mas ó de menos que en su primer estado.

83 6.° Esta *tendencia* ó propension que tienen los fluidos á levantar los cuerpos fluctuantes, se está aprovechando á cada paso para sacar del fondo de un rio ó de la mar fardos muy pesados. Para esto sirve un batel de mucho volumen, cargándole hasta que se sumerja muy adentro. Despues se le quita en parte, ó todo el peso que le obligó á sumergirse; entonces, en virtud del impulso vertical del fluido, vá subiendo, y con él sube el peso á que está atado, con una fuerza igual en el primer instante á la suma de los pesos que se le han quitado.

84 7.° Una vez que un cuerpo sólido de una gravedad específica mayor que la del fluido en que está metido, se sumerge enteramente, y no puede permanecer suspenso sin el auxilio de una fuerza esterior (79. 3.°), es evidente que si llamamos M su volumen total; p, su pesantez específica; p', la del fluido; Q, el peso que se le debe aplicar al uno de los brazos iguales de unas balanzas que sostienen con el otro brazo el cuerpo propuesto, metido enteramente en el fluido; es evidente, digo, que siendo $p \times M - p' \times M$ el peso que le queda al cuerpo en el fluido, debe resultar para que haya equilibrio, $Q = p \times M - p' \times M$, ó $p \times M - Q = p' \times M$, ó $p \times (p \times M - Q) = p \times p' \times M$. Luego $p : p' ::$

p

$p \times M : p \times M - Q$, y quiere decir, que *la pesantez específica del cuerpo es á la del fluido, como el peso absoluto del mismo cuerpo es á la parte de su peso que pierde en el fluido.* Por consiguiente, en conociendo la pesantez específica del cuerpo, su peso absoluto, el peso que pierde en el fluido en que está enteramente metido, conoceremos la pesantez específica de dicho fluido. Fig.

Es de advertir que quando se pesa un cuerpo en el ayre en contraposicion de otro que está metido en un fluido, el primero parece algo mas ligero de lo que es en realidad, porque el ayre como fluido pesado disminuye algo el peso de los cuerpos que están metidos en él; pero esta diminucion es tan corta que puede despreciarse comunmente sin recelo de error sustancial. Pero si se quisiere hacer esta operacion con toda la precision que cabe en este asunto, se podrá hacer dentro del recipiente de la máquina pneumática, cuya descripcion daremos mas adelante, despues de sacado el ayre; ó si no, se valuará el peso del volumen de ayre cuyo lugar ocupa el cuerpo que está metido en él, y se añadirá este peso al peso del mismo cuerpo.

85 8.º Métase el cuerpo sólido de que se habló poco ha en otro fluido todavia mas ligero específicamente que él, y cuya pesantez específica sea p'', y el contrapeso Q sea ahora Q'. Tendremos estas dos equaciones $Q = p \times M - p' \times M$, $Q' = p \times M - p'' \times M$, que dán $p'(p \times M - Q') = p''(p \times M - Q)$; y por consiguiente $p' : p'' : p \times M - Q : p \times M - Q'$; y quiere decir, que *las pesanteces específi-*

cas

Fig. *cas de los dos fluidos son entre sí como las porciones que pierde de peso en dichos fluidos un mismo cuerpo sólido de mayor pesantez específica que cada uno de ellos.*

86 9.° Qualquiera de las dos equaciones fundamentales de los dos artículos precedentes; por egemplo, la equacion $Q = p \times M - p' \times M$ puede servir para hallar el volumen M de un cuerpo sólido que se sumerge enteramente en un fluido, quando es dada la pesantez específica de dicho fluido. Porque una vez que tenemos $p' \times M = p \times M - Q$, es evidente que si del peso absoluto $p \times M$ del cuerpo restamos el peso Q que tiene en el fluido, la resta $p' \times M$ será el peso del volumen de fluido que echa de su lugar. Pero siendo dada la pesantez específica del fluido, se puede determinar con facilidad dicho volumen que es el mismo que el del cuerpo. Esto es análogo á lo dicho (81).

De aquí se colige evidentemente que si el cuerpo propuesto fuese homogeneo, y no tuviere huecos interiores, se conocerá su pesantez específica, pues suponemos que se conoce su peso absoluto, y se puede determinar su volumen.

87 10.° Métanse en un mismo fluido dos cuerpos sólidos de mayor pesantez específica que él. Llamemos M y M' sus volúmenes; p y p' sus pesanteces específicas; Q y Q' sus contrapesos, esto es, las fuerzas que se necesitan para mantenerlos en equilibrio dentro del fluido; p'' la pesantez específica de dicho fluido. Tendremos las equaciones $Q = p \times M - p'' \times M$, $Q' = p' \times M' - p'' \times M'$. Luego si suponemos que los dos cuerpos pierden partes iguales de sus pe-

sos

sos en el fluido, ó que tengamos $p \times M - Q = p' \times M' - Q'$, tendremos tambien $p'' \times M = p'' \times M'$, ó $M = M'$. De donde resulta que los cuerpos que pierden partes iguales de sus pesos en un mismo fluido, tienen iguales sus volúmenes. Fig.

88 11.° En esto se funda el modo de resolver la cuestion que *Hieron*, Rey de Siracusa, propuso á *Archimedes*.

El caso fue, que habiendo mandado Hieron á un Platero le hiciese una corona de oro puro, y sospechando que tenia alguna mezcla de plata, le preguntó á Archimedes el modo de salir de esta sospecha, sin echar á perder la corona. No se sabe á punto fijo de qué medios se valió Archimedes para responder; pero todas las apariencias son de que apeló al método siguiente.

Ya que tienen volúmenes iguales los cuerpos que pierden partes iguales de sus pesos en un mismo fluido (87), es evidente que si cogemos una barra de oro, tal que el exceso de su peso en el ayre ó en el vacío respecto de su peso en el agua sea igual al exceso del peso de la corona en el vacío respecto de su peso en el agua, serán de volúmenes iguales la corona y la barra. Del mismo modo se determinará una barra de plata del mismo volumen que la corona.

Sentado esto, si se halla que la corona de oro pesa menos en el vacío que la barra de oro, y mas que la barra de plata, y si por otra parte se tiene certeza de que la corona no se compone mas que de oro y plata, se inferirá que ni

es

Fig. es de oro, ni de plata pura, sino un compuesto de ambos metales, y se hallará qué porcion de cada metal hay en la mezcla, practicando una regla de aligacion del modo siguiente. Del peso de la barra de oro se restará el peso de la barra de plata; la resta servirá de denominador comun á dos fracciones, una de las quales tendrá por numerador el exceso que el peso de la barra de oro lleva al peso de la corona; el numerador de la otra será el exceso que el peso de la corona lleva al peso de la barra de plata. La primera fraccion espresa la cantidad de oro, y la segunda la cantidad de plata de que se compone la corona.

Por los mismos principios se resolvería la cuestion, si se compusiera la corona de otros dos metales de especie conocida. Pero sería insuficiente este método, si no supiésemos de qué especie son los metales; por egemplo, si no supiéramos en el caso antecedente que la corona no se componia mas que de oro y plata; porque es evidente que con el oro y otro metal, tal como el cobre, se puede hacer un mixto del mismo peso y del mismo volumen que un mixto compuesto de oro y plata. Fuera de esto, si la corona contuviera mas de dos especies de metales; por egemplo, si en la mezcla entrára oro, plata y cobre, la cuestion sería indeterminada; porque con estos tres metales se pueden hacer muchísimas combinaciones de modo que el mixto que de ellas resulte, tenga siempre un mismo peso, y un mismo volumen. Lo mismo diremos, y con mas razon de un número de metales mayor.

89 12.° Sin embargo de que los medios propuestos (84 y 85) son los mas exactos que se conocen para averiguar las pesanteces específicas de los fluidos, no por esto son los únicos de que se hace uso. En el comercio sirven regularmente para este mismo fin unos instrumentos llamados *Areometros* ó *Pesalicores*, que son muy sencillos y muy acomodados para la práctica. Fig.

Aunque la forma de un areometro es arbitraria hasta cierto punto; sin embargo debe ser tal, que divida con facilidad el fluido sumergiéndose mas ó menos, y se mantenga en situacion vertical. Todas estas circunstancias concurren en el de *Fahrenheit*. Compónese de un tubo largo cilíndrico *CD*, y de dos bolas huecas *A* y *B*; en la bola *B*, 38.
que es la mas baja y la menor, se echa mercurio ó alguna otra materia pesada que sirve de lastre al instrumento, y le dá estabilidad; la otra *A*, que siempre está sumergida, levanta el centro de gravedad de la parte del areómetro, metida en el fluido, y con esto es mayor todavía su estabilidad. Este instrumento puede servir para averiguar las pesanteces específicas de los fluidos, ó yá metiéndole siempre á una misma profundidad por medio de pesos que se le añaden, ó se le quitan, ó yá conservándole el mismo peso, y dejándole que se meta por sí á diferentes profundidades. Consideremos ambos casos.

I. Supongamos que se meta el areómetro hasta el punto *M* en dos fluidos diferentes. Sean P y $P \pm q$ los pesos absolutos que debe tener para este efecto; p y p' las pesante-

Fig. teces específicas de los dos fluidos; G, el volumen de la parte constante $MABN$ del areómetro. Tendremos (79) $P = p \times G$, $P \pm q = p' \times G$. Luego $p' = \frac{p \times (P \pm q)}{P}$. Así, en conociendo P, p, y el peso añadido ó quitado q, conoceremos p'.

II. Si se quiere que el areómetro tenga siempre un mismo peso, se meterá á diferentes profundidades en dos fluidos distintos. Sean K, M los puntos hasta donde se sumerge, y llamemos P su peso absoluto; H y G, los volúmenes $KABH$ y $MABN$ que sumerge en ambos fluidos; p y p', las pesanteces específicas de estos fluidos. Tendremos (79) $P = p \times H$, $P = p' \times G$. Luego $p' = \frac{p \times H}{G}$. Luego en conociendo p, H, G, conoceremos p'.

Quando el areómetro es de figura regular y conocida, es facil valuar por los métodos declarados en la Geometría, los volúmenes H, G. Pero comunmente no se pueden usar con exactitud estos métodos por razon de la forma del instrumento. Entonces se puede graduar el areómetro por estotro medio, fundado en lo dicho (81), cuya práctica es muy facil. Sean V, K los puntos estremos hasta donde se sumerge el areómetro en dos licores, uno de los quales es el mas ligero, y el otro el mas pesado de todos aquellos, cuyas pesanteces específicas se quieren averiguar. Se dividirá el intervalo VK en quantas partes iguales ó desiguales se quisieren; se meterá despues succesivamente el areómetro (aumentando ó disminuyendo su lastre) hasta todos los puntos de division en un fluido cuya pesantez es-

pe-

pecífica sea dada; y determinando con las balanzas ordinarias Fig.
los pesos absolutos y succesivos del instrumento, hallaremos por el método dado (81) los volúmenes determinados que mete en el fluido. Es evidente que se puede conseguir que crezcan ó menguen dichos volúmenes en la razon que se quisiere, tomando los pesos en la razon correspondiente.

Los areómetros se hacen comunmente de vidrio, cobre, ú hoja de lata &c. Es muy del caso hacer de vidrio los que se hubieren de meter con frecuencia en licores corrosivos.

Indaguemos ahora en particular la situacion que debe ó puede tener un cuerpo sólido, de figura dada, colocado libremente sobre un fluido, para cumplir á un tiempo con las dos condiciones de equilibrio espresadas (78). Solo trataremos de los cuerpos fluctuantes, ó cuya pesantez específica es menor que la de los fluidos en que están metidos.

Por lo que mira á la situacion de los cuerpos enteramente sumergidos, rara vez importa considerarla; además de que se puede hallar con facilidad en virtud de los mismos principios.

90 *Toda figura plana homogenea, dividida en dos partes iguales, y semejantes por su ege que se supone vertical; todo sólido homogeneo formado por la revolucion de una curva qualquiera al rededor de un ege vertical, permanecerá en equilibrio fluctuando en esta situacion sobre un fluido.*

 Por-

Fig. Porque es evidente, que entonces 1.° el peso de la figura ó del sólido está sostenido por el impulso vertical y contrario del fluido. 2.° El centro de gravedad de la figura ó del sólido, y el de su parte sumergida en el fluido están en una misma linea vertical.

Esto manifiesta que un triángulo isósceles, una parábola, un cono recto, un cilindro recto, una esfera &c. suponiéndolos homogeneos, subsistirán en equilibrio sobre un fluido quando sus eges estuvieren verticales.

91 Prevenimos que no es generalmente cierta la proposicion inversa; esto es, que no porque esté en equilibrio sobre un fluido un cuerpo homogeneo dividido por su ege en partes simétricas, se seguirá siempre que esté vertical su ege. Porque muy en breve veremos que en algunos casos puede tener este mismo cuerpo otras muchas situaciones de equilibrio.

92 *Todo cuerpo prismático homogeneo, cuyo ege estuviere en situacion orizontal, permanecerá en equilibrio sobre un fluido, quando el centro de gravedad de la seccion hecha en su medio paralelamente á sus bases, estuviere en una misma linea vertical con el de la parte de la seccion que está metida dentro del fluido.*

Porque podemos considerar los centros de gravedad del prisma, y de su parte sumergida en el fluido como confundidos con los dos puntos de que acabamos de hablar. Está, pues, entonces el prisma en equilibrio. Así, para determinar la situacion de equilibrio de estas especies de prismas,

bas-

basta determinar la de la seccion hecha por su medio. Fig.

93 Cuestion I. *Hallar en qué posicion deberá poner-* 39.
se un triángulo homogeneo ESG *fluctuante sobre el fluido* MN, *para subsistir en equilibrio, en el supuesto de que no tenga sumergido en el fluido mas que un ángulo* S.

La primera de las dos condiciones que se requieren para el equilibrio (78), es que el peso absoluto del triángulo *ESG* sea igual al peso absoluto del triángulo *MSN*.

La segunda es que los centros de gravedad *R* y *O* de los dos triángulos *ESG*, *MSN* estén en una misma linea *RO* vertical, y por consiguiente perpendicular á la superficie *MN* del fluido. Se cumplirá con ambas condiciones del modo siguiente.

Divídase cada una de las bases *EG*, *MN* de los dos triángulos *ESG*, *MSN* en dos partes iguales en *P* y *Q*, y tírense las rectas *SP*, *SQ*, en las quales se tomarán las partes $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, para determinar los centros de gravedad *R*, *O* de estos mismos triángulos. Tírense las rectas *RO*, *PQ* que serán paralelas entre sí, una vez que están cortados proporcionalmente en *R* y *O* los lados del triángulo *SPQ*; y además de esto serán perpendiculares á *MN*, yá que *RO* debe ser vertical. Bágense desde el punto *P* las perpendiculares *PA*, *PD* á los lados *SE*, *SG* del triángulo *ESG* prolongados, si fuere menester; y tírense las rectas *PM*, *PN* que evidentemente son iguales entre sí, porque $QM = QN$, y *PQ* es perpendicular á *MN*.

 Su-

Fig.

Supongamos
- SE . . . . $= a$
- SG . . . . $= b$
- SP . . . . $= c$
- El seno total . . . . $= 1$
- El ángulo dado PSE . . . . $= m$
- El ángulo PSG dado tambien . . . . $= n$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- La pesantez específica del triángulo $= p$
- La pesantez específica del fluido . . $= p'$.

Los dos triángulos ESG, MSN que tienen el ángulo S comun son entre sí como los productos $SE \times SG$, $SM \times SN$. Así, por la primera condicion del equilibrio tendremos $pab = p'xy$.

En el triángulo rectángulo PAS, tenemos (I. 665) $PA = PS.$ sen $PSA = c.$ sen m; $SA = PS.$ cos $PSA = c.$ cos m. En el triángulo rectángulo PDS tenemos igualmente $PD = c.$ sen n; $SD = c$. cos n. Luego $AM = c$. cos $m - x$; $DN = c$. cos $n - y$; $(PM)^2 = (c \text{ sen } m)^2 + (c \cos m - x)^2$; $(PN)^2 = (c \text{ sen } n)^2 + (c \cos n - y)^2$). Pero $(PM)^2 = (PN)^2$; luego tendremos la equacion $(c \text{ sen } m)^2 + (c \cos m - x)^2 = (\text{sen } n)^2 + (c \cos n - y)^2$, ó $xx - 2cx \cos m = yy - 2cy \cos n$; porque $(\text{sen } m)^2 + (\cos m)^2 = 1$, y $(\text{sen } n)^2 + (\cos n)^2 = 1$. Esta equacion cumple con la segunda condicion del equilibrio.

Se hallarán con facilidad los valores de x acudiendo al mé-

método de la eliminacion para echar y, porque sacarémos la equacion determinada $x^4 - 2cx^3 \cos m + \frac{2cpabx \cos n}{p'} - \frac{p^2a^2b^2}{p'^2} = 0$, cuyas raices combinadas con la equacion $y = \frac{pab}{p'x}$ darán á conocer las diferentes posiciones del triángulo, que se componen con el equilibrio. Fig.

Síguense de aquí dos consecuencias importantes.

94 1.ª Por lo dicho (II. 243) consta que toda equacion cuyas raices son reales, tiene tantas raices positivas, como veces alternan en ella los signos $+$ y $-$; y tantas raices negativas como veces ván seguidos dos signos $+$, ó dos signos $-$. Así, yá que falta en la equacion que sacamos el término que debería llevar x^2, síguese que si son reales todas sus raices, habrá forzosamente tres positivas y una negativa. La raiz negativa no puede servir, porque no suponemos que MS esté prolongada hasta mas allá del punto S. Pero las raices positivas manifestarán posiciones reales de equilibrio, con tal que concurra además la circunstancia de ser $x < a$, é $y < b$.

95 2.ª Para hacer alguna aplicacion sencilla de la equacion general, supongamos que sea isósceles el triángulo ESG propuesto. Tendremos $b = a$, $\cos n = \cos m$, y la equacion general se reducirá á $x^4 - 2cx^3 \cos m + \frac{2cpa^2x \cos m}{p'} - \frac{p^2a^4}{p'^2} = 0$; de donde se sacan (II. 260) estas dos equaciones de segundo grado $x^2 - \frac{a^2p}{p'} = 0$, $x^2 - 2cx \cos m + \frac{a^2p}{p'} = 0$, que se deben resolver separadamente.

I. La primera dá $x = \pm a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, ó $x = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$, porque solo sirve la raiz positiva. Pero como siempre es $y = \frac{pab}{p'x}$, será tambien $y = a\sqrt{\frac{p}{p'}}$. Luego $y = x$. Así, es isós-

Fig. celes tanto el triángulo *MSN* como el triángulo *ESG*, ó lo que es lo mismo, la base *EG* del triángulo propuesto es paralela á la superficie del fluido.

II. La segunda equacion dá $x = c \cos m \pm \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$. Así, por ser $y = \frac{pa^2}{p'x}$, sacaremos

$$y = \frac{pa^2}{p'\left(c \cos m \pm \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}\right)}$$

$= c \cos m \mp \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$. Dá, pues, este segundo caso las dos combinaciones siguientes.

$$\left\{\begin{array}{l} x = c \cos m + \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ y = c \cos m - \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = c \cos m - \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \\ x = c \cos m + \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]} \end{array}\right\}$$

que indican dos nuevas situaciones de equilibrio, quando son reales los valores de x é y, y es además $x < a$, é $y < a$. Pero para cumplir con estas condiciones es forzoso que

1.° $\frac{a^2 p}{p'} < (c \cos m)^2$, ó $\frac{p}{p'} < \frac{(c \cos m)^2}{a^2}$.

2.° $a > c \cos m + \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2 p}{p'}\right]}$, ó $\frac{p}{p'} > \frac{2ac \cos m - aa}{aa}$.

Son, pues, $\frac{(c \cos m)^2}{a^2}$ y $\frac{2ac \cos m - aa}{aa}$ los límites entre los quales está entonces el valor de $\frac{p}{p'}$.

Por egemplo, quando es equilátero el triángulo propuesto, $c \cos m = \frac{3}{4} a$; y dicho triángulo podrá tener otras dos situaciones de equilibrio, además de la que indica la primera equacion, con tal que sea $\frac{p}{p'} < \frac{9}{16}$, y $\frac{p}{p'} > \frac{8}{16}$, ó con

tal

tal que el valor de $\frac{p}{p'}$ esté entre las dos fracciones $\frac{9}{16}$ y $\frac{8}{16}$. Fig.

96 Cuestion II. *Hallar la situacion en que debe ponerse el triángulo homogeneo* SEG *fluctuante sobre un fluido* MN *para que permanezca en equilibrio, suponiendo que estén metidos en el fluido los dos ángulos* E, G. 40.

Para aplicar á la resolucion de esta cuestion la de la 39. antecedente, bastaría imaginar trastornada la figura que la corresponde; pero para mayor claridad resolveremos directamente, y con toda individualidad esta nueva cuestion.

Los tres centros de gravedad del triángulo *SEG*, del trapecio *MNGE*, y del triángulo *SMN* siempre están en una misma linea recta. Pero para que se verifique el equilibrio, es preciso que el centro de gravedad del triángulo propuesto *SEG*, y el de su parte *MNGE* metida en el fluido, estén en una misma linea vertical. Luego los centros de gravedad de los dos triángulos *SEG*, *SMN* están colocados tambien en una misma linea vertical. Tírense desde el vértice *S* á los medios de las bases *EG*, *MN* las rectas *SP*, *SQ*; despues de tomar $SR = \frac{2}{3}SP$, $SO = \frac{2}{3}SQ$, tírese por los centros de gravedad *R*, *O* (IV. 130) de los dos triángulos *SEG*, *SMN*, la recta *RO* que es vertical, ó perpendicular á la superficie del fluido. Tírese desde el punto *P* al punto *Q* la recta *PQ* que es paralela á *RO*, y desde el punto *P* tírense las rectas *PM*, *PN*, y las perpendiculares *PA*, *PD* á *SE*, *SG* respectivamente. Sentado esto,

Fig.

Sean:
- SE . . . . $= a$
- SG . . . . $= b$
- SP . . . . $= c$
- El seno total. . . . . $= 1$
- El ángulo dado PSE. . . . . $= m$
- El ángulo PSG dado tambien. . . . . . $= n$
- SM. . . . . $= x$
- SN. . . . . $= y$
- La pesantez específica del triángulo SEG $= p$
- La pesantez específica del fluido. . . . . . $= p'$

Tenemos $SEG : SMN :: SE \times SG : SM \times SN$, y por consiguiente $SEG - SMN$ ó $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$. Así, el trapecio $EMNG = \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$.

Pero la primera condicion del equilibrio exige que sea $p \times SEG = p' \times EMNG$; tendremos, pues, $p \times SEG = p' \times \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$, ó $pab = p'(ab - xy)$. Tenemos tambien, como antes, $PA = c$ sen m, $SA = c \cos m$, $PD = c$ sen n, $SD = c \cos n$, $AM = c \cos m - x$, $DN = c \cos n - y$, $(PM)^2 = (c \text{ sen } m)^2 + (c \cos m - x)^2$, $(PN)^2 = (c \text{ sen } n)^2 + (c \cos n - y)^2$. Así, por razon de ser $PM = PN$, tendremos $xx - 2cx \cos m = yy - 2cy \cos n$. Comparando esta equacion con la precedente, hallaremos $x^4 - 2cx^3 \cos m + \frac{2c(p'-p)abx \cos n}{p'} - \frac{(p'-p)^2 a^2 b^2}{p'^2} = 0$. Las raices de esta equacion combinadas con la equacion $pab = p'(ab - xy)$ darán las diferentes situaciones de equilibrio del triángulo.

Bien

Bien se echa de ver que se aplica igualmente á este caso la advertencia general de antes (94). Fig.

97 Si fuere *SEG* un triángulo isósceles, será $b = a$, $\cos n = \cos m$, y con esto se reducirá la equacion que sacamos á $x^4 - 2cx^3 \cos m + \frac{2c(p'-p)a^2 x \cos m}{p'} - \frac{(p'-p)^2 a^4}{p'^2} = 0$, de donde se sacan (II. 260) estotras dos equaciones $x^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'} = 0$, $x^2 - 2cx \cos m + \frac{a^2(p'-p)}{p'} = 0$, la primera de las quales dá $x = a\sqrt{\left(\frac{p'-p}{p'}\right)}$, $y = a\sqrt{\left(\frac{p'-p}{p'}\right)}$, y manifiesta que el triángulo está en equilibrio quando su base *EG* es orizontal; la segunda dá estas dos combinaciones

$$\begin{cases} x = c \cos m + \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c \cos m - \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c \cos m - \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \\ y = c \cos m + \sqrt{\left[(c \cos m)^2 - \frac{a^2(p'-p)}{p'}\right]} \end{cases}$$

que representarán dos nuevas situaciones de equilibrio, con tal que sea

1.° $\frac{p}{p'} > \frac{a^2 - (c \cos m)^2}{a^2}$.

2.° $\frac{p}{p'} < \frac{2aa - 2ac \cos m}{a^2}$.

Por egemplo, quando fuere equilátero el triángulo *SEG*, ó quando $c \cos m = \frac{3}{4}a$, y además fuere $\frac{p}{p'} > \frac{7}{16}$ y $\frac{p}{p'} < \frac{8}{16}$; tendrá este triángulo tres situaciones de equilibrio sobre el fluido.

98 Cuestion III. *Hallar la situacion en que debe ponerse el rectángulo homogeneo* BHSK *fluctuante sobre un fluido, para que se quede en equilibrio, en el supuesto de estar metido en el fluido el ángulo* S *no mas.*

Tírese desde el punto *S* al punto *Q* medio de *MN* la 41.

rec-

Fig. recta SQ, y tómese $SO = \frac{2}{3}SQ$; el punto O será el centro de gravedad del triángulo MSN. Pero como el centro de gravedad del rectángulo $BHSK$ está en el punto de interseccion R de las dos diagonales BS, HK, se sigue que si por este punto R, y el punto O se tira la recta RO, por las condiciones del equilibrio esta linea será vertical ó perpendicular á la superficie MN del fluido. Tómese $RP = \frac{SR}{2}$, y tírese la linea PQ, que será con evidencia paralela á RO, y por consiguiente perpendicular al medio de MN. De donde se sigue que serán iguales las rectas PM, PN. Finalmente, bágense desde el punto P las perpendiculares PA, PD á SH, SK respectivamente.

Sean
- SH . . . . $= a$
- SK . . . . $= b$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- La pesantez específica del rectángulo $BHSK$ $= p$
- La pesantez específica del fluido. . . . . $= p'$

La primera condicion del equilibrio dá la equacion $pab = \frac{p' \cdot xy}{2}$. A mas de esto, yá que $SP = \frac{3}{4}SB$, tendremos $PA = \frac{3}{4}BH = \frac{3}{4}b$, $SA = \frac{3}{4}SH = \frac{3}{4}a$, $PD = \frac{3}{4}BK = \frac{3}{4}a$, $SD = \frac{3}{4}SK = \frac{3}{4}b$. Luego $(PM)^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4}a - x\right)^2$, $(PN)^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4}b - y\right)^2$. Así, por razon de ser $PM = PN$, tendremos $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$.

Comparando esta equacion con la precedente, y eliminando y, sacaremos la equacion determinada $x^4 - \frac{3ax^3}{2}$

+

$+\frac{3pab^2x}{p'}-\frac{4p^2a^2b^2}{p'^2}=0$, por cuyo medio se hallarán las diferentes situaciones de equilibrio del rectángulo propuesto. Fig.

99 Sea el rectángulo propuesto un quadrado. Tendremos $b=a$; con esto se transformará la equacion en estotra $x^4-\frac{3ax^3}{2}+\frac{3pa^3x}{p'}-\frac{4p^2a^4}{p'^2}=0$, que se resuelve (II. 260) en estotras dos $x^2-\frac{2pa^2}{p'}=0$, $x^2-\frac{3ax}{2}+\frac{2pa^2}{p'}=0$. La primera dá $x=a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$, $y=a\sqrt{\frac{2p}{p'}}$; por donde se echa de ver que el quadrado está en equilibrio quando su diagonal *HK* está orizontal, lo que es evidente de suyo. La segunda dá $x=\frac{a\left(3\pm\sqrt{\frac{(9p'-32p)}{p'}}\right)}{4}$, $y=\frac{a\left(3\mp\sqrt{\frac{(9p'-32p)}{p'}}\right)}{4}$, de donde resultan dos nuevas situaciones de equilibrio quando $\frac{p}{p'}<\frac{9}{32}$, y $\frac{p}{p'}>\frac{8}{32}$.

100 Es de advertir que por el mismo método se hallaría la posicion de equilibrio de un rectángulo que tuviese sumergidos tres ángulos. Bastaría para este intento concebir trastornada la figura, y sumergidos los tres ángulos 41.
B, *H*, *K*, é imaginar que el triángulo *MSN* fuese la parte del rectángulo que sale de la superficie *MN* del fluido. Así, se echa de ver que guardando las mismas denominaciones, sacaríamos estas dos equaciones $pab=p'\left(ab-\frac{xy}{2}\right)$, $xx-\frac{3ax}{2}=yy-\frac{3by}{2}$ que resolverian este nuevo caso.

101 Cuestion IV. *Hallar la situacion en que debe ponerse el rectángulo homogeneo* BHSK *fluctuante sobre un fluido, para que esté en equilibrio, suponiendo que estén metidos en el fluido los dos ángulos* H *y* S. 42.

Prolónguense las rectas *SH*, *NM* hasta que concurran

en

Fig. en Z; por el punto Z, y el medio L de SN tírese la recta ZL que pasará indispensablemente por los centros de gravedad del triángulo ZSN, del triángulo ZHM y del trapecio $MHSN$. Sea G el centro de gravedad del triángulo ZSN; F, el del triángulo ZHM; y tírense paralelamente á SN, y á HM las rectas GT y FK; y perpendicularmente á ZN las rectas GV, FI. Ya que no puede haber equilibrio sin que el centro de gravedad del rectángulo $BHSK$, y el del trapecio $MHSN$ estén en una misma linea vertical, se sigue que si por el punto R medio de la diagonal HK, y centro de gravedad del rectángulo $BHSK$, se tira la recta RO perpendicular á la superficie MN del fluido, el centro de gravedad del trapecio $MHSN$ estará colocado en esta linea.

Sean:
- SH. . . . . $= a$
- SK. . . . . $= b$
- HM. . . . . $= x$
- SN. . . . . $= y$
- ZN. . . . . $= z$
- La pesantez específica del rectángulo $BHSK = p$
- La pesantez específica del fluido. . . . . $= p'$

Es evidente que el trapecio $MHSN = \frac{a(x+y)}{2}$ (I. 500), y lo es tambien que la primera condicion del equilibrio dá la equacion $pab = \frac{p'(x+y)a}{2}$. Tirando por el punto Z el ege vertical ZY, y considerando los momentos de los triángulos ZSN, ZHM, y del trapecio $MHSN$ respecto de dicho

ege,

ege, sacaremos $MHSN \times ZO = ZSN \times ZV - ZHM \times ZI$. Pero los triángulos semejantes ZSN, ZHM dán $ZS = \frac{ay}{y-x}$, $ZH = \frac{ax}{y-x}$; y por consiguiente $ZSN = \frac{ay^2}{2(y-x)}$, $ZHM = \frac{ax^2}{2(y-x)}$. Además de esto, tenemos $ZM = ZN \times \frac{HM}{SN} = \frac{zx}{y}$; y las propiedades de los centros de gravedad (IV. 130) dán $ZT = \frac{2}{3}ZN = \frac{2z}{3}$, $ZK = \frac{2}{3}ZM = \frac{2zx}{3y}$, $GT = \frac{1}{3}NS = \frac{y}{3}$, $FK = \frac{1}{3}MH = \frac{x}{3}$. Así, de los tres triángulos semejantes ZSN, GVT, FIK sacaremos $VT = \frac{GT \times SN}{ZN} = \frac{yy}{3z}$, $IK = \frac{FK \times SN}{ZN} = \frac{xy}{3z}$. Luego $ZV = ZT - VT = \frac{2zz-yy}{3z}$, $ZI = ZK - IK = \frac{(2zz-yy)x}{3yz}$. Substituyendo todos estos valores en la equacion $MHSN \times ZO = ZSN \times ZV - ZHM \times ZI$, hallaremos $\frac{a(x+y)}{2} \times ZO = \frac{(2zz-yy)a(y^3-x^3)}{6yz(y-x)} = \frac{(2zz-yy)a(yy+xy+xx)}{6yz}$, dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro por $y-x$.

Tírese por el punto R la recta RX paralela á MH ó á SN, y prolónguese OR hasta E. Ya que el punto R es el medio de HK, tendremos $RX = \frac{SK}{2} = \frac{b}{2}$, $HX = \frac{HS}{2} = \frac{a}{2}$. Los dos triángulos semejantes ZSN, RXE dán $XE = \frac{SN \times RX}{ZS} = \frac{b(y-x)}{2a}$. Luego $ZE = ZH + HX + XE = \frac{ax}{y-x} + \frac{a}{2} + \frac{b(y-x)}{2a} = \frac{a(y+x)}{2(y-x)} + \frac{b(y-x)}{2a}$, y de los dos triángulos semejantes ZSN, ZOE, se saca $ZO = \frac{ZE \times ZS}{ZN} = \frac{a^2y(y+x)}{2z(y-x)^2} + \frac{by}{2z}$. De donde resulta $MHSN \times ZO = \frac{a^3y(y+x)^2}{4z(y-x)^2} + \frac{aby(y+x)}{4z}$. Comparando este segundo valor de $MHSN \times ZO$ con el primero, y atendiendo á que $zz = yy + \frac{a^2y^2}{(y-x)^2}$, vendremos á parar despues de hechas todas las reducciones en la equacion $2y^4 + 2x^4 - 2xy^3 - 2yx^3 - 2a^2xy + a^2y^2 + a^2x^2 - 3by^2 + 3bxy^2 + 3byx^2 - 3bx^3 = 0$ que

se

Fig. se resuelve (II. 260) en estotras dos $yy - 2xy + xx = 0$; $2yy + 2xy + 2x^2 + a^2 - 3by - 3bx = 0$. Veamos ahora á qué consecuencias dán lugar.

I. La primera dá $y - x = 0$, ó $y = x$. De donde se sigue que estará en equilibrio el rectángulo quando fuere orizontal el lado que está metido en el fluido; esto es evidente de suyo, y se aplica igualmente á cada uno de los quatro lados del rectángulo.

II. Si en la segunda equacion se substituye en lugar de y su valor $\frac{2pb - p'x}{p'}$, tendremos $x^2 - \frac{2pbx}{p'} + \frac{4p^2b^2}{p'^2} - \frac{3pb^2}{p'} + \frac{a^2}{2} = 0$, de donde se saca

$$x = \frac{pb \pm \sqrt{\left[3b^2(p'p - p^2) - \frac{a^2p'^2}{2}\right]}}{p'},$$

y por consiguiente

$$y = \frac{pb \mp \sqrt{\left[3b^2(p'p - p^2) - \frac{a^2p'}{2}\right]}}{p'}.$$

Así, podrá tener el rectángulo propuesto dos posiciones mas de equilibrio, con tal que 1.º sean reales los valores de x é y; 2.º que sean positivos; 3.º que cada uno de ellos sea menor que b.

102 Supongamos que el rectángulo propuesto se transforme en quadrado, ó que sea $b = a$. Desde luego estará en equilibrio este quadrado, quando estuviere orizontal el lado que tiene metido en el fluido. Tenemos además de esto estas equaciones.

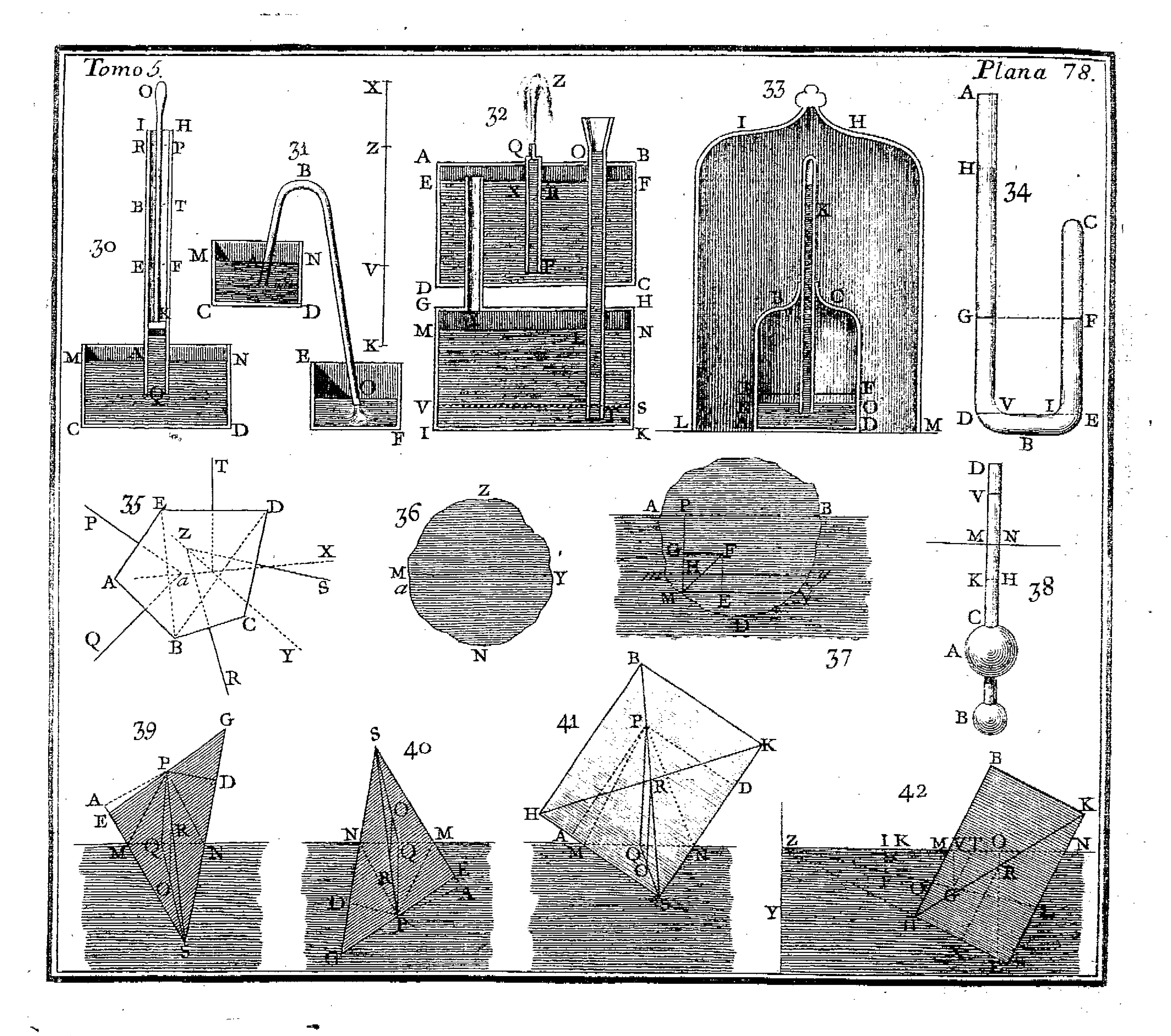

30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42

Fig.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ap + a\sqrt{\left[3(p'p - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]}}{p'} \\ y = \dfrac{ap - a\sqrt{\left[3(p'p - p^2) - \frac{p'^2}{2}\right]}}{p'} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ap - a\sqrt{\left[3(p'p - p)^2 - \frac{p'^2}{2}\right]}}{p'} \\ y = \dfrac{ap + a\sqrt{\left[3(p'p - p)^2 - \frac{p'^2}{2}\right]}}{p'} \end{array}\right\}$$

de donde se sacan dos nuevas situaciones de equilibrio quando la fraccion $\frac{p}{p'}$ estuviere entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

103 Cuestion V. *Hallar la posicion en que debe colocarse la parábola homogenea* ABC *fluctuante sobre un fluido, para subsistir en equilibrio, en el supuesto de que no tenga mas parte sumergida que* FMN, *y que estén fuera del fluido los puntos* B, C. 43.

Desde luego es evidente que estará en equilibrio la parábola *ABC*, que suponemos de menor pesantez específica que el fluido, quando su ege fuere vertical. Pero lo que ahora se pregunta, en general, es si podrá estar tambien en equilibrio quando estuviere inclinado su ege.

Sea *AD* el ege de la curva, y *BD* ó *DC* su última ordenada; despues de tirado por el punto *H* medio de *MN*, y paralelamente á *DA*, el diámetro *HF*, tírese desde el punto *F* la ordenada *FG*, la recta *FX* al focus *X*, y la tangente *FT* que encuentra en *T* el ege *DA* prolongado, y la

qual,

Fig. qual, por la propiedad de la parábola (III. 49 y 61) es paralela á MN. Bágese desde el punto M la MY perpendicular á FH prolongada. Tírese desde el centro de gravedad K de la parábola ABC al centro de gravedad I de su parte FMN, la recta KI que, en virtud del equilibrio, debe ser vertical ó perpendicular á MN.

Sean
- AD. . . . . $= a$
- BD. . . . . $= b$
- El parámetro del ege $AD = \frac{bb}{a}$ . . . . $= c$
- FH. . . . . $= x$
- MH. . . . . $= y$
- FG. . . . . $= z$
- La pesantez específica de la parábola ABC $= p$
- La pesantez específica del fluido. . . . . $= p'$

Por la propiedad de la parábola (IV. 147) será $AK = \frac{3}{5}AD = \frac{3}{5}a$; $FI = \frac{3}{5}FH = \frac{3}{5}x$; $GT = 2GA = \frac{2zz}{c}$; $FT = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c}$. De los dos triángulos semejantes FGT, MYH se saca $FT : FG :: MH : MY = \frac{cy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$. Pero la area parabólica $ABC = \frac{4}{3}BD \times DA$ (III. 570), y la area $FMN = \frac{4}{3}MY \times FH$. Tendremos, pues, por la primera condicion del equilibrio, $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$.

Como se cumple evidentemente con la segunda condicion del equilibrio quando está vertical el ege de la parábola, y por consiguiente quando $z = 0$, la equacion precedente está diciendo que en este caso particular $pab = p'yx = p'x\sqrt{cx}$, observando que entonces $y = \sqrt{cx}$. De donde re-

resulta $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. Pero volvamos al caso de la cuestion general, en el qual el punto F no coincide con el punto A. Fig.

La propiedad de la parábola (III. 37, 44 y 45) dá $FX = \frac{cc+4zz}{4c}$; $yy = x \times 4FX = \frac{x(cc+4zz)}{c}$, é $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{(cc+4zz)}}{\sqrt{c}}$. Substituyendo este valor de y en la equacion general $pab = \frac{p'cyz}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, hallaremos $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. De donde resulta que siempre es uno mismo el valor de x, esté en la posicion que estuviere la parábola sobre el flúido.

Los dos triángulos FGT, ILH, que son semejantes por ser KI perpendicular á MN, dán $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$. Luego $LO = HO - HL = FT - HL = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$. Los dos triángulos semejantes FGT, KLO dán $GT : FT :: LO : OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Por otra parte tenemos $OK = KA - OA = KA - (OT - AT) = \frac{3}{6}a - x + \frac{z^2}{c}$. Igualando uno con otro los dos valores de OK, y reduciendo, hallaremos $zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10}$, ó si nó, poniendo en lugar de x su valor hallado antes, $zz = \frac{6ac - 5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$. De donde resultan dos situaciones mas de equilibrio, con tal que sea $6a > 5c + 6a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$, ó $\frac{p}{p'} < \left(\frac{6a-5c}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$, que suponemos que sea una cantidad real y positiva.

104 Cuestion VI. *Supongamos ahora que el centro de gravedad de la parábola* ABC *no sea el mismo que su centro de figura, ó yá por no ser homogenea toda ella, ó yá por haberla cargado algun cuerpo estraño colocado fuera de su centro de figura, que esté firmemente unido con ella: ¿Qué posicion deberá tomar para estar en equilibrio sobre el flúido* MN? 43.

 Sea

Fig. Sea K' el centro de gravedad del systema de todos los cuerpos que se le han cargado á la parábola, y están en equilibrio con el impulso vertical y contrario del fluido. Si, dado de posicion el punto K', tiramos la recta $K'V$ perpendicular al ege AD de la parábola, serán dadas tambien dicha linea, y la parte correspondiente AV del ege. Sea FMN el espacio parabólico metido en el fluido. Por el centro de gravedad I de dicho espacio considerado como homogeneo, y por el punto K', tiraremos la recta IK' que por razon del equilibrio debe ser precisamente vertical, y vá á encontrar el ege AD en K. Concluiremos la construccion como antes (103); guardaremos las mismas denominaciones, llamando además de esto $K'V = k$, $AV = b$; y observaremos que en este caso p representa la pesantez específica de un cuerpo del mismo peso que la parábola ABC, y cuyo volumen fuese la area ABC suponiéndola homogenea. Hallaremos la misma equacion que poco há, $pab = \frac{p'cyx}{\sqrt{(cc + 4zz)}}$, que cumple con la primera condicion del equilibrio. Despues hallaremos $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{p'^2}}$.

Los tres triángulos semejantes FGT, ILH, KLO dán, del mismo modo que antes, $OK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$; y los dos triángulos semejantes FGT, KVK' dán $GT : FG :: VK' : VK = \frac{ck}{2z}$. Luego $OV = OK - VK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$. Por otra parte $OV = VT - OT = AV + AT - HF = b + \frac{z^2}{c} - x$. Igualando uno con otro los dos valores de OV, hallaremos la equacion $10z^3 - (10cb - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0$, cuyas raices (despues de substituido en

lu-

lugar de x su valor hallado antes) nos darán á conocer las posiciones de equilibrio de la parábola. Fig.

Si hacemos $k = o$, $b = \frac{3}{5}a$, concordará esta resolucion con la precedente, conforme debe ser.

No nos empeñamos mas en estas aplicaciones. En los demás casos se procederá de un modo análogo, sean homogeneos ó no los cuerpos fluctuantes.

Leyes de la estabilidad de los cuerpos fluctuantes.

105 Acabamos de probar que está en equilibrio un cuerpo fluctuante sobre un fluido quando su peso es igual al del fluido cuyo lugar ocupa al meterse en él, y están además de esto en una misma línea vertical los centros de gravedad de estos dos pesos. Pero como la primera condicion solo limita la cantidad y no la figura del volumen fluido echado de su lugar, es patente que si no llevamos mas mira que poner un cuerpo en equilibrio sobre un fluido, lo conseguiremos disponiendo dicho cuerpo de tal suerte que meta en el fluido una parte de magnitud dada que cumpla con la segunda condicion, sin pararnos en la distancia á que están uno de otro los dos centros de gravedad, ni en su posicion respectiva sobre la misma línea vertical. Pero en la práctica es indispensable considerar la cuestion por otro lado. Como siempre hay causas, como el movimiento del ayre, las agitaciones interiores que tal vez esperimenta el fluido &c. que intentan alterar el equilibrio, es forzoso que este estado tenga alguna consistencia ó *estabilidad*; de suerte que

Fig. si acaso se altera, pueda restablecerse en virtud de la pesantez del cuerpo, y del impulso vertical del fluido. Pero en orden á esta estabilidad, la distancia y la posicion respectiva de los dos centros de gravedad son dos puntos dignos de consideracion, conforme se verá dentro de poco. Pero primero recordaremos algunas proposiciones de Mecánica, que necesitamos.

44. 106 Sea *CABDE* un cuerpo sea la que fuere su figura, que oscila con libertad al rededor del punto ó ege fijo *C* en virtud de sola su pesantez. Tiraremos por el punto *C* la vertical *CN*, y la recta *CG* al centro de gravedad *G* del cuerpo; supondremos que la vertical *GL* represente el peso absoluto de dicho cuerpo, y resolveremos esta fuerza en otras dos *GK*, *GF*, la primera cuya direccion sea *CG*, y la aniquilará por consiguiente la resistencia del punto *C*; la segunda, perpendicular á *CG*, será la única causa del movimiento de rotacion del cuerpo al rededor del ege *C*. Pero si llamamos *P* el peso del cuerpo; 1, el seno total, es evidente que resultará, fuerza $GF = P \times \text{sen } GCN$, y que el momento de esta fuerza respecto del ege *C*, será $P \times CG \times \text{sen } GCN$. Sea *mn* el arco que anda en un instante al rededor del ege *C*, una partícula qualquiera *m* del cuerpo propuesto; *QR*, un arco semejante á *mn*, y trazado con el radio dado, y constante *CQ*. La espresion del momento de la cantidad de movimiento comunicado á la molécula *m* al rededor del ege *C*, es $m \times mn \times Cm$, ó, por ser $mn = Cm \times \frac{QR}{CQ}$, $m \times (Cm)^2 \times \frac{QR}{CQ}$. Pero como son otros tantos estos momen-

mentos particulares como moléculas hay en toda la masa del cuerpo; y el valor de la fraccion $\frac{QR}{CQ}$ es evidentemente el mismo respecto de todas las moléculas, se echa de ver que si se multiplica cada una de estas moléculas por el quadrado de su distancia al ege C, y se suman despues todos estos productos, llamando S su suma; $S \times \frac{QR}{CQ}$ será la espresion del momento del movimiento de rotacion de toda la masa. Igualando este momento con el de la fuerza GF que le produce, sacaremos $P \times CG \times \text{sen}\, GCN = S \times \frac{QR}{CQ}$, y $\frac{QR}{CQ} = \frac{P \times CG \times \text{sen}\, GCN}{S}$. Fig.

107 Si suponemos otro cuerpo que oscile al rededor del ege c, y llamamos p, cg, gcn, s, qr, cq las cantidades análogas á P, CG, GCN, S, QR, CQ, sacaremos $\frac{qr}{cq} = \frac{p \times cg \times \text{sen}\, gcn}{s}$. Luego 45.

1.° Si fuese $gcn = GCN$, $cq = CQ$, $\frac{P \times CG}{S} = \frac{p \times cg}{s}$, será $qr = QR$. De donde se infiere que en instantes iguales andarán los dos cuerpos espacios iguales, y llegarán por consiguiente á la vertical en tiempos iguales, sea la que fuere la cantidad del ángulo inicial GCN ó gcn.

2.° Si fuera de esto el peso p fuese tan chico que se puedan considerar todos sus puntos como reconcentrados en su centro de gravedad G, dicho peso se convertiría en un péndulo simple ordinario, y tendríamos $s = p \times (cg)^2$. Así, de la equacion $\frac{P \times CG}{S} = \frac{p \times cg}{s}$ se saca en este caso $\frac{P \times CG}{S} = \frac{p \times cg}{p \times (cg)^2}$; y por consiguiente $cg = \frac{S}{P \times CG}$ que espresa la longitud de un péndulo simple que gasta en sus oscilaciones el mismo tiempo que el péndulo compuesto de la fig. 44.

Fig. 108 Supongamos que el péndulo simple p describa
45. arcos pequeños, por manera que podamos considerar el arco entero gt comprendido entre el punto de donde parte el péndulo, y la vertical ct, como confundido con la ordenada gn. Como siempre es $\frac{qr}{cq} = \frac{p \times cg \times \text{sen}\, gcn}{s}$, y en el caso presente $s = p \times (cg)^2$, sen $gcn = \frac{gn}{cg} = \frac{gt}{cg}$, $\frac{qr}{cq} = \frac{gx}{cg}$; tendremos $\frac{p \times gt}{cg} = p \times gx$. Igualmente, si en lugar de suponer que el péndulo sale del punto g, suponemos que salga de otro punto qualquiera y (muy próximo siempre á la vertical ct), y describa en un instante el arco yz, tendremos $\frac{p \times yt}{cg} = p \times yz$. Luego $\frac{p \times gt}{cg} : \frac{p \times yt}{cg} :: p \times gx : p \times yz :: gx : yz$. Pero $\frac{p \times gt}{cg}$ y $\frac{p \times yt}{cg}$ son patentemente las espresiones de las fuerzas á cuyo impulso la masa p anda los espacios gx, gz. Así, yá que estas fuerzas son proporcionales á los espacios gx, yz, se sigue que son andados estos espacios en tiempos iguales. Lo mismo sucede con todos los demás elementos correspondientes de los arcos totales que describe el péndulo. Por consiguiente las oscilaciones del mismo péndulo son *isochronas* unas con otras, ó se hacen en tiempos iguales, sean los que fueren los arcos que describe el mismo péndulo, con tal que siempre sean muy pequeños.

46. 109 Supongamos ahora un cuerpo qualquiera perfectamente libre é impelido por una fuerza F, cuya direccion no pasa por su centro de gravedad G. No atendamos por ahora á la pesantez. Imaginemos que por el centro de masa G (que está situado en el mismo punto que estaría el centro de gravedad, si las moléculas del cuerpo esperimentasen el im-

impulso de la pesantez), y por la direccion *FH* de la fuerza *F* pase el plano *ABDE* que divide en dos partes el cuerpo; y desde el punto *G* tírense la recta *GH* perpendicular á la direccion de la potencia *F*, y la recta *GO* perpendicular al plano *ABDE*. Hemos demostrado (IV. 178) Fig.

1.° Que el centro de gravedad del cuerpo se mueve del mismo modo que si estuviese sobre la direccion de la fuerza *F*, sea la que fuere la figura del cuerpo.

2.° Que si un plano *ABDE* divide en dos partes perfectamente iguales y semejantes el cuerpo, este cuerpo dará vueltas al rededor del ege *GO* del mismo modo que si estuviera fijo el centro de gravedad.

Quando no son iguales y semejantes las dos partes en que el plano *ABDE* divide el cuerpo propuesto, el movimiento de rotacion no se hace simplemente al rededor del ege *GO*; el cuerpo oscila ácia diferentes direcciones al rededor de su centro de gravedad. Supondremos aquí que el plano *ABDE* divide el cuerpo en dos partes iguales y semejantes, sensiblemente por lo menos; y no consideraremos mas que las oscilaciones al rededor del ege *GO* que suponemos inmobil, y que siempre pasa por los mismos puntos del cuerpo.

110 Desde el punto *G*, y con el radio dado *GQ*, descríbase el arco *QR* que mide el ángulo de rotacion del cuerpo al rededor del ege *GO*. Llamemos *P* la masa de dicho cuerpo; *V*, la velocidad de su centro de gravedad paralelamente á *FH*; *S*, la suma de los productos de las par-

Fig. tículas del cuerpo por los quadrados de sus distancias al ege *GO*. Por lo dicho (IV. 178) y (106) es evidente que resultarán estas dos equaciones $V = \frac{F}{P}$, $F \times GH = S \times \frac{QR}{GQ}$; una de ellas representa el movimiento de translacion del centro de gravedad; y la otra espresa el movimiento de rotacion al rededor del ege *GO*.

111 Supongamos que manteniéndose todo del mismo modo que antes (109 y 110), esperimente el cuerpo propuesto el impulso de la pesantez; que sea vertical la direccion *FH* de la fuerza *F*; y que por lo mismo sea vertical el plano *ABDE*, y orizontal el ege *GO*. En lugar de la equacion $V = \frac{F}{P}$, sacaremos $V = \frac{F-P}{P}$, en cuya espresion *P* es el peso del cuerpo, y la fuerza *F* se supone dirigida de abajo arriba. Por lo que mira á la segunda equacion $F \times GH = S \times \frac{QR}{GQ}$, siempre es la misma; porque es evidente que pasando la fuerza *P* por el centro de gravedad *G*, no puede imprimir movimiento alguno de rotacion al cuerpo al rededor de dicho punto.

47. 112 *Supongamos un systema qualquiera de corpúsculos* A, B, C &c. *firmemente unidos unos con otros, de qualquier modo que sea, y puestos, ó no en un mismo plano; la suma de los productos de todos los referidos corpúsculos por los quadrados de sus distancias á un ege qualquiera* H *que no pasa por el centro de gravedad del systema, es igual á la suma de los productos de los mismos corpúsculos por los quadrados de sus distancias á un ege que pase por el centro de gravedad, y sea paralelo al primero, mas al producto de la*

su-

suma de los corpúsculos multiplicada por el quadrado de la distancia de los dos eges. Fig.

Quiero decir, que si suponemos que el punto G represente un ege que pase por el centro de gravedad, y sea paralelo al ege H, y tiramos las rectas AH, BH, CH &c. AG, BG, CG &c; tendremos $A \times (AH)^2 + B \times (BH)^2 + C \times (CH)^2 +$ &c. $= A \times (AG)^2 + B \times (BG)^2 + C \times (CG)^2 +$ &c. $+ (A + B + C +$ &c.$) \times (GH)^2$.

Porque si desde los puntos A, B, C &c. bajamos las perpendiculares AN, BE, CM &c. á GH, y á su prolongacion, considerando los dos triángulos rectángulos ANG, ANH, sacaremos por lo probado (I. 518) que $(AG)^2 - (GN)^2 = (AN)^2 = (AH)^2 - (NH)^2$, y substituyendo en lugar de $(NH)^2$ su igual $(GH - GN)^2$, sacaremos por último en el triángulo AGH, $(AH)^2 = (AG)^2 + (GH)^2 - 2GH \times GN$; luego $A \times (AH)^2 = A \times (AG)^2 + A \times (GH)^2 - A \times 2GH \times GN$. En el triángulo obtusángulo BGH, tambien sacaremos $(BH)^2 = (BG)^2 + (GH)^2 + 2GH \times GE$; luego $B \times (BH)^2 = B \times (BG)^2 + B \times (GH)^2 + 2B \times GH \times GE$. En el triángulo acutángulo CGH, $(CH)^2 = (CG)^2 + (GH)^2 - 2GH \times GM$; luego $C \times (CH)^2 = C \times (CG)^2 + C \times (GH)^2 - C \times 2GH \times GM$. Por consiguiente tendremos $A \times (AH)^2 + B \times (BH)^2 + C \times (CH)^2 +$ &c. $= A \times (AG)^2 + B \times (BG)^2 + C \times (CG)^2 + A \times (GH)^2 + B \times (GH)^2 + C \times (GH)^2 + A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM - B \times 2GH \times GE$ &c.

Pero como el punto G es el centro de gravedad del cuer-

Fig. cuerpo, ó un ege que pasa por dicho centro, es, segun se sabe, $A \times GN + C \times GM = B \times GE$; luego tambien será $A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM = B \times 2GH \times GE$, ó si no $A \times 2GH \times GN + C \times 2GH \times GM - B \times 2GH \times GE = 0$; por consiguiente, y por fin $A \times (AH)^2 + B \times (BH)^2 + C \times (CH)^2 +$ &c. $= A \times (AG)^2 + B \times (BG)^2 + C \times (CH)^2 +$ &c. $+ (A + B + C +$ &c.$) \times (GH)^2$.

113 No hay duda en que esta demostracion se aplíca tambien á un cuerpo de qualquiera magnitud, pues nos es lícito considerar dicho cuerpo como que es el systema de una infinidad de corpúsculos A, B, C &c. Podemos, pues, sentar este principio general: *La suma de los productos de las partículas de un cuerpo qualquiera, por los quadrados de sus distancias á un ege que no pasa por su centro de gravedad, es igual á la suma de los productos de las mismas partículas por los quadrados de sus distancias á un ege que pase por el centro de gravedad, y sea paralelo al primero, mas al producto de la masa total del cuerpo multiplicada por el quadrado de la distancia entre los dos eges.*

114 Por sí misma se viene á los ojos la aplicacion que de estos principios se puede hacer á nuestro asunto. La fuerza F puede representar el impulso vertical del fluido que intenta levantar en alto el cuerpo fluctuante mientras que su peso P le impele ácia abajo. Por la equacion $V = \frac{F-P}{P}$ se echa de ver que el cuerpo no está inmobil en la direccion vertical sino quando $V = 0$, ó $P = F$. La se-

gun-

gunda equacion $F \times GH = S \times \frac{QR}{GQ}$ ó $\frac{QR}{GQ} = \frac{F \times GH}{S}$ manifiesta Fig.
que si no están situados en una misma linea vertical el centro de gravedad del cuerpo, y el de su parte metida en el fluido, considerada como homogenea, el cuerpo tendrá al rededor del ege orizontal GO un movimiento de rotacion tanto mayor en un tiempo dado, quanto mayor fuere la fraccion $\frac{QR}{GQ}$, ó su valor $\frac{F \times GH}{S}$. Pero este movimiento puede dirigirse ó á aproximar, ó á alejar de la vertical que pasa por el centro de gravedad del cuerpo, el centro de gravedad de la parte sumergida. En el primer caso, el cuerpo tiene estabilidad, y la tiene tanto mayor quanto mayor es el momento $F \times GH$ del impulso vertical del fluido respecto del ege GO, siendo dada la cantidad S. En el segundo caso, carece el cuerpo de estabilidad, y tiene inclinacion á volcarse tanto mas aprisa quanto mayor es la cantidad $F \times GH$. Aclaremos con alguna individualidad esta teórica general, aplicándola á algunos egemplos.

115 Cuestion I. *Determinar las condiciones de la estabilidad de una figura plana* ABK *fluctuante sobre un fluido* MN. 48.

Dos cosas pueden suceder: ó que el centro de gravedad de la figura entera esté mas bajo que el de su parte sumergida MNK, considerándola como homogenea, yá porque la figura ABK no es homogenea, yá porque se la ha cargado algun cuerpo estraño puesto ácia su fondo; ó que el primer centro de gravedad esté mas arriba que el segundo. Resolveremos separadamente estos dos casos.

116 Caso I. Sea el punto G el centro de gravedad de

Fig. de la figura propuesta ABK; el punto F, el de su parte sumergida MNK considerada como homogenea. Todo el tiempo que subsiste el equilibrio, estos dos centros están en una misma linea vertical GZ. Pero supongamos que alguna causa esterior incline la figura un poco del lado de B, ó que un punto qualquiera Z de la vertical GZ describa el arco ZQ muy pequeño, de manera no obstante que la nueva parte sumergida mnK sea igual á la primera MNK; que despues esté abandonada la figura únicamente á la accion de la pesantez, y del impulso vertical del fluido. Desde luego se echa de ver que por razon de ser $mnK = MNK$, no sube, ni baja el centro de gravedad G de la figura, pues no hay fuerza alguna que intente sacarle de su lugar. Por ser la parte $NVmK$ comun á las dos superficies mnK, MNK, los triángulos NVn, MVm serán iguales. Luego si tiramos las alturas nf, mb de estos triángulos, sacaremos $NV \times nf = MV \times mb$. Pero $nf : mb :: Vf : Vb$; y como suponemos que la inclinacion de la figura es muy pequeña, es sensiblemente $Vf = VN$ y $Vb = VM$. Luego $nf : mb :: VN : VM$, y $nf = \frac{mh \times VN}{VM}$. Así $NV \times nf$, ó $MV \times mb = \frac{(VN)^2 \times mh}{MV}$; de donde sale $MV = NV$, y manifiesta que el punto V donde se cortan las dos lineas de fluctuacion MN, mn, está en medio de MN.

Despues de tirada por el punto I, centro de gravedad de la parte mnK, la recta Ig perpendicular á la superficie actual mn del fluido, la qual encuentre en g la vertical GZ, es evidente que por estar el punto g colocado mas arriba del

del centro de gravedad G de la figura, el impulso vertical del fluido, que obra de abajo arriba, ácia el lado donde es la inclinacion, intenta levantar la figura, y restituirla á su primera posicion. Tiene, pues, estabilidad esta misma figura. Ahora nos falta hallar la medida ó el momento del impulso vertical actual del fluido, respecto del centro de gravedad G al rededor del qual se hace la rotacion. Fig.

Desde el centro de gravedad G tírese la perpendicular GE á la direccion Ig del impulso vertical del fluido. Tírense despues por el punto G, el punto F centro de gravedad de la parte MNK, y por los centros de gravedad de los dos triángulos NVn, MVm, las rectas Gi, Fd, yx, zu, paralelas á Eg. La espresion del momento de mnK, respecto del centro de gravedad G, es $mnK \times GE$; y este momento es igual al de la cantidad $(MNK + NVn - MVm)$, respecto del mismo punto. Pero si representa mnK ó $(MNK + NVn - MVm)$ el impulso vertical del fluido, se echa de ver que MNK, NVm representan dos fuerzas dirigidas de abajo á arriba, dirigiéndose de arriba á abajo la tercera MVm. Luego los momentos particulares de las tres fuerzas MNK, NVn, MVm son unánimes, y se encaminan á que dé vueltas la figura en la misma direccion AKB para restituirla á su situacion primitiva. Sentado esto, el momento de $MNK = MNK \times GD$; el de $NVn = NVn \times xi = \frac{NV \times nf}{2} \times xi$; el de $MVm = MVm \times zi = \frac{NV \times nf}{2} \times zi$. Luego $mnK \times GE = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times xi + \frac{NV \times nf}{2} \times zi = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times (xi + iz) = MNK \times GD +$

MN

Fig. $\frac{MN \times nf}{4} \times (mn - \frac{1}{3} mn)$, cuya cantidad se reduce á $MNK \times GD + \frac{(MN)^2 \times nf}{6}$, por ser *mn* igual, con muy poca diferencia, á *MN*. Si suponemos que el arco *QZ* que mide el ángulo de inclinacion de la figura, se haya trazado con el radio *GQ* dado, será $GD = FG \times \frac{QZ}{GQ}$, $nf = NV \times \frac{QZ}{GQ} = \frac{MN}{2} \times \frac{QZ}{GQ}$. Luego $mnK \times GE = (MNK \times FG + \frac{(MN)^3}{12}) \times \frac{QZ}{GQ}$, que espresa la estabilidad de la figura propuesta.

117 1.° Esto nos dá á conocer que en este caso primero siempre es estable la figura, y que en circunstancias iguales tiene tanta mas estabilidad quanto mas bajo está colocado su centro de gravedad respecto del de su parte sumergida, ó quanto mayor es la distancia *FG* de dichos dos centros.

118 Supongamos que dejando la figura la posicion *bKa* para volverse á la primera *BKA*, describa en un instante el punto *Q* al rededor del centro de gravedad *G* el pequeño arco *QR*, y llamemos *S* la suma de los productos de las partículas de toda la figura *ABK* por los quadrados de sus distancias al punto *G*. Por lo dicho (111) tendremos $(MNK \times FG + \frac{(MN)^3}{12}) \times \frac{QZ}{GQ} = S \times \frac{QR}{GQ}$, ó $QR = QZ \times (\frac{12MNK \times FG + (MN)^3}{12S})$. Y como en esta equacion el segundo factor del segundo producto es una cantidad siempre constante, sea el que fuere el arco *QZ*, que siempre le suponemos muy pequeño, la figura oscila como si fuera un péndulo. Porque supongamos un péndulo simple *p* que oscile al rededor del punto *c*; la equacion que espresa el movi-
45. miento de dicho péndulo es (108) $p \times gx = \frac{p \times gt}{cg}$, ó

gx

$gx = \frac{gt}{cg}$, que se reduce á la precedente tomando las lineas Fig.
QR, QZ iguales respectivamente á las lineas gx, gt, y 48.
haciendo $\frac{1}{cg} = \frac{12MNK \times FG + (MN)^3}{12S}$. Luego $\frac{12S}{12MNK \times FG + (MN)^3}$ 45.
espresa la longitud cg del péndulo simple que gasta en sus oscilaciones el mismo tiempo que la figura propuesta.

119 CASO II. Supondremos que todo sea lo mismo que en la resolucion del caso precedente, con sola la diferencia de que el centro de gravedad de la figura propuesta ABK, que antes estaba en G, esté ahora en G' mas arriba del centro de gravedad F de la parte MNK que antes estaba sumergida. Tiraremos por el punto G' la recta $E'G'D'$ perpendicular á las dos paralelas Fd, Ig, que pasan la una por el centro de gravedad F de la parte MNK que antes estaba sumergida, y la otra por el punto I de la parte mnK sumergida al presente, y que son perpendiculares á la superficie actual mn del fluido. Es evidente que si representa la area mnK ó MNK el impulso vertical del fluido, será ahora $mnK \times G'E'$ el momento de dicha fuerza. Tomando en lugar de este momento el de la fuerza ($MNK + NVn - MVm$) compuesta de tres fuerzas MNK, NVn, MVm, se echará de ver que la fuerza cuya espresion es MNK, y la direccion es Fd, hace esfuerzo para que la figura gyre en la direccion BKA, y por consiguiente para que sea mayor su inclinacion; siendo así que por el contrario las otras dos fuerzas NVn, MVm obran del mismo modo que en el primer caso para que la figura gyre en la direccion AKB, y por consiguiente para restituirla á la situacion de equilibrio. 48.

Fig. brio. Así, concluyendo la resolucion como en el caso precedente, hallaremos que $\left(\frac{(MN)^3}{12} - MNK \times FG'\right) \times \frac{QZ}{6Q}$ es la espresion de la estabilidad de la figura propuesta. Luego

120 1.° Es evidente que si $\frac{(MN)^3}{12} > MNK \times FG'$, tendrá estabilidad la figura, y tendrá tanta mas quanto mayor fuere el primer miembro de esta desigualdad respecto del segundo; si $MNK \times FG' = \frac{(MN)^3}{12}$, le será indiferente á la figura gyrar en la direccion AKB, ó en la direccion ABK; pero sí $MNK \times FG' > \frac{(MN)^3}{12}$, no tendrá estabilidad alguna la figura, y lejos de volverse á su situacion primitiva, se irá apartando de ella cada vez mas hasta trastornarse.

121 2.° Síguese de aquí que la equacion $FG' = \frac{(MN)^3}{12MNK}$ dá el límite de la altura máxima á que puede colocarse el centro de gravedad de la figura respecto del de su parte sumergida, mientras se quisiese que sea estable esta misma figura. Pero una vez que el momento del impulso vertical del fluido llega á ser nulo en este supuesto, y la espresion general de este momento es $mnK \times G'E'$; es evidente que será $G'E' = 0$, y por consiguiente el punto g, coincidirá con el punto g, donde se intersecan las dos perpendiculares tiradas á la superficie del fluido en las dos posiciones de la figura. Luego siempre que queramos que tenga estabilidad dicha figura, deberemos colocar su centro de gravedad debajo del punto g.

122 3.° Si llamamos S la suma de los productos de las partículas de la figura ABK por los quadrados de sus distancias al punto G'; hallaremos que $\frac{12S}{(MN)^3 - 12MNK \times FG'}$, es-

espresa la longitud del péndulo *sinchrono* con las oscilacio- Fig.
nes de dicha figura.

1 2 3 Para reducir á fórmulas los principios sentados (1 1 6..... 1 2 2), llamaremos a la linea MN de fluctuacion; b^2, la area sumergida MNK; h, la distancia del centro de gravedad G ó G' de la figura entera ABK al centro de gravedad F de su parte MNK; 1, el radio constante y dado GQ; z, el arco QZ; A, el momento de la fuerza que obra para restituir la figura á su primer estado, y constituye su estabilidad; L, la longitud del péndulo sinchrono ó que oscila en el mismo tiempo que la figura. Sacaremos para ambos casos

$$A = \frac{(a^3 \pm 12hb^2)z}{12}. \quad L = \frac{12S}{a^3 \pm 12hb^2}.$$

1 2 4 Quando se quiera hacer alguna aplicacion de estas fórmulas á casos particulares, se deberá considerar que por nuestros supuestos, y todo lo que sobre ellos hemos discurrido, b^2 representa el impulso vertical del fluido, ó, lo que es lo propio, el peso absoluto de la figura ABK; a^3 es el producto del peso absoluto de la area a^2 que suponemos de la misma pesantez específica que el fluido, por la linea a; S es el producto de un peso conocido (que siempre le podemos convertir en el peso de una parte conocida del fluido) por el quadrado de una linea conocida. Dada la figura del cuerpo fluctuante, la Geometría dá á conocer las cantidades b^2, S. Para estas determinaciones es indispensable apelar al cálculo integral, particularmente para determinar S. Por este motivo nos ceñiremos á aclarar lo que acabamos de decir, con un

Fig. egemplo sencillo, para cuya resolucion basta sola la Geometría elemental.

49. Sea la figura propuesta ABK un triángulo isósceles homogeneo, y sea tambien un triángulo isósceles la parte sumergida MNK. Despues de tirada desde el vértice K la perpendicular KCD á las bases paralelas MN, AB; si hacemos $MN = a$, $KC = c$, $AB = f$, $KD = g$, la pesantez específica del fluido $= p'$, se deberá substituir en la primera fórmula del segundo caso, $p'. a^3$ en lugar de a^3, $p'. \frac{ac}{2}$ en lugar de b^2, $\frac{2}{3}g - \frac{2}{3}c$ en lugar de b, y se transformará en $A = \frac{p'(a^3 - 4ac(g-c))}{12}$, cuya cantidad debe ser positiva para que se mantenga estable el triángulo.

Para determinar L, empezaremos buscando el valor de S. Sea VE una perpendicular qualquiera al ege KD del triángulo AKB; tómese en esta linea el elemento Tt, y tírese despues la recta TK. Si tomamos el producto $Tt \times (TK)^2$ tantas veces como elementos contiene la recta VE, sacaremos la suma de los productos de todos los puntos de VE por los quadrados de sus distancias al vértice K. Representando S. la palabra *suma*, tendremos desde luego $S.Tt \times (TK)^2 = S.Tt (EK)^2 + S.Tt \times (TE)^2$. Pero es evidente que $S.Tt \times (EK)^2 = VE \times (EK)^2$, y que $S.Tt \times (TE)^2 = \frac{(VE)^3}{3}$. Luego la espresion de la suma de los productos de todos los puntos de VE por los quadrados de sus distancias al vértice K, es $VE \times (EK)^2 + \frac{(VE)^3}{3}$, ó si no $(EK)^3 \times \left[\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right]$, observando que $VE = EK \times \frac{AD}{KD}$. Tomemos ahora el punto e infinitamente próximo á E, de manera que Ee sea un

ele-

elemento de la altura KD. Tendremos $2S.Ee \times (EK)^3 \times \left[\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right] = \frac{(KD)^4}{2} \times \left[\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right] = \frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}$, Fig.
que será la espresion de la suma de los productos de todos los puntos del triángulo ABK, por los quadrados de sus distancias al vértice K. Pero la espresion de la suma análoga S que buscamos respecto del centro de gravedad G, es (113) $\left(\frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}\right) - \frac{fg}{2} \times \frac{4g^2}{9} = \frac{fg}{2} \times \frac{3ff+4gg}{72}$, en cuya espresion $\frac{fg}{2}$ representa el peso del triángulo ABK que por ser el mismo que el del fluido que echa de su lugar el triángulo MNK, tiene consiguientemente por valor $\frac{g'ac}{2}$. Luego $S = \frac{g'ac}{2} \times \frac{3ff+4gg}{72}$. Tendremos, pues, finalmente

$$L = \frac{c(3ff+4gg)}{12(a^2-4c(g-c))}.$$

125 Cuestion II. *Determinar la estabilidad de un cuerpo sólido fluctuante sobre un fluido.*

Puede suceder que un cuerpo sólido que fluctua sobre un fluido, oscile á un mismo tiempo al rededor de diferentes eges que pasan por su centro de gravedad; pero aquí solo consideraremos las oscilaciones simples al rededor de un solo y mismo ege orizontal é inmobil que pase por el centro de gravedad del cuerpo.

Sea ABK la seccion vertical del cuerpo, perpendicular 50.
al ege de rotacion, que está figurado en el punto G ó G'. Supongamos que F represente el ege orizontal perpendicular á ABK, y que pasa por el centro de gravedad de la parte del cuerpo metida en el fluido. Conclúyase la construccion como antes. Es evidente que todo pasará del mismo modo que en la cuestion antecedente, con la diferen-

 cia

Fig. cia de que aquí MN es el perfil de la superficie de fluctuacion del cuerpo, y NVn, MVm representan dos úngulas engendradas por la rotacion de las superficies NV, MV al rededor del ege orizontal que señala el punto V en el perfil ABK. Las dos úngulas de que acabamos de hablar, son forzosamente iguales, pues suponemos que no sube, ni baja el centro de gravedad del cuerpo. Así, el punto V es por precision el centro de gravedad del plano de fluctuacion MN; porque como son iguales las dos úngulas propuestas, las distancias de los centros de gravedad de las dos superficies NV, MV al punto V, serán recíprocamente proporcionales á estas mismas superficies.

De todo esto se sigue que si hacemos

El radio constante y dado GQ. . . . . $= 1$.

El arco QZ que mide la inclinacion primitiva y sumamente pequeña del sólido. . . . . $= z$

La parte del sólido metida en el fluido, y que MNK representa. $= N$

La distancia del punto G ó G' al punto F. . $= b$

La úngula NVn, ó su igual MVm. . . . . . . $= b^3 . z$

El momento de la úngula NVn respecto del ege de rotacion. . . . . $= b^3 c . z$

El momento de la ungula MVm respecto del mismo ege. . . . . $= b^3 f . z$

La suma de los productos de las partículas del cuerpo por los quadrados de sus distancias al ege de rotacion. . . . . $= S$

El

El momento de la fuerza que constituye la estabilidad del cuerpo propuesto. . . . . $=A$ Fig.

La longitud del péndulo de oscilaciones isocronas con el sólido. . . . . $=L$.

Por el mismo método que antes, hallaremos

$$A=(b^3c+b^3f\pm hN)z\,,\quad L=\frac{S}{b^3c+b^3f\pm hN}.$$

Acerca del uso de estas fórmulas se pueden hacer prevenciones análogas á las que hicimos (124) respecto de las figuras planas. Se echa de ver que la figura misma del cuerpo y de su parte sumergida dán las cantidades S, N, h, b, c, f, y que por hypótesi se conoce el ángulo infinitamente pequeño z.

Prevenimos que en toda está teórica de las oscilaciones de los cuerpos fluctuantes no se lleva en cuenta la resistencia que esperimenta el cuerpo golpeando el agua con su parte sumergida, y el ayre con su parte esterior, por ser fuerzas muy pequeñas y menores sin comparacion que el peso del cuerpo, ó el impulso vertical del fluido. Pero estas fuerzas, aunque pequeñas, reiteradas cierto espacio de tiempo, aniquilan por fin el movimiento del cuerpo que se pone en equilibrio sobre el fluido, conforme requieren las leyes que dejamos esplicadas, á no ser que se lo impida alguna causa esterior que obre para perpetuar el movimiento.

Fig.

ELEMENTOS
DE HYDRÁULICA.

126 AUnque por *Hydráulica* se entiende comunmente la ciencia que trata del movimiento de las aguas no mas, nosotros damos este nombre, conforme digimos al principio de este tratado, al ramo de la Hydrodinámica, que determina generalmente las leyes del movimiento de los fluidos, así incompresibles como compresibles.

Por ser el movimiento de las aguas el asunto de mas importancia en toda esta materia, será tambien el que llamará mas principalmente nuestra atencion. Pero quanto digamos acerca de él, se aplica igualmente al movimiento de los demás fluidos incompresibles. Por lo que mira al movimiento de los fluidos elásticos, nos detendremos poco en su consideracion.

Teórica del movimiento de las aguas al salir de los depósitos por orificios.

127 Es constante que si conociéramos la masa, la figura y el número de las partículas de un fluido, se reduciría la determinacion de este movimiento á una cuestion ordinaria de Dinámica. Todo se reduciría á hallar el movimiento de un systema de cuerpecillos libres que obran unos en otros, y pueden tambien esperimentar la accion de algunas fuerzas esteriores, pongo por caso, de la pesantez. Pero estamos muy distantes de tener los datos necesarios para resol-

ver

ver esta cuestion. Y aun quando los tuviéramos, no por eso Fig.
estaríamos mas adelantados; porque siempre sería trabajosísimo ó imposible reducir tantos esfuerzos á un cálculo de que se puedan sacar resultados que contenten. La analysis, atendido el estado de imperfeccion en que se halla hoy dia, no nos dejaría muchas esperanzas de salir ayrosos de esta investigacion.

128 Pero una vez que no podemos sentar directamente la teórica del movimiento de los fluidos, es forzoso que probemos otro medio para resolver esta cuestion. El mas sencillo, y mas riguroso de todos estribaría en sacar las leyes del movimiento de los fluidos, del mismo modo que las de su equilibrio, de una sola y misma ley primordial, fundada en la naturaleza de los fluidos, ó en la esperiencia. Yá hemos visto (*6*) que esta ley primordial, por lo que mira al equilibrio, consiste en la igualdad de presion de una partícula qualquiera en todas las direcciones, y de ella hemos deducido todos los principios de la Hydrostática. Tambien puede servir de fundamento para la Hydráulica; porque podemos considerar cada instante el movimiento de las partículas fluidas, como compuesto del movimiento que tenian en el instante antecedente, y de otro movimiento, destruido yá, y en virtud del qual se hubieran equilibrado unas con otras. Esto está diciendo que si conociéramos este estado de equilibrio por medio del principio de igualdad de presion, conoceríamos tambien el estado de movimiento, una vez que siempre se considera

Fig. como dado el movimiento en el primer instante. Algunos Geómetras de primera clase han representado, siguiendo este pensamiento, por fórmulas generales el movimiento de los fluidos. Pero la naturaleza del asunto mismo les ha ayudado tan poco, que el fruto de sus tareas, esto es, las fórmulas que han sacado, no tienen aplicacion en la práctica.

129 Si examinamos la cuestion con menos generalidad, y nos dejamos guiar de la esperiencia, llegaremos á sujetar el movimiento de los fluidos á unas leyes, que si no son de todo punto generales, son por lo menos bastante exactas para las cuestiones que suelen ocurrir en la práctica. Para tratar este asunto se podria tomar el rumbo siguiente.

50. Sea *MCDN* un vaso qualquiera con una porcion de agua *ACDB*, que sale por la abertura, luz ú orificio *PQ* hecho en el fondo *CD*. Enseña la esperiencia que todas las partículas, comprimiéndose unas á otras, se encaminan al orificio. Bajan con velocidades sensiblemente verticales é iguales hasta llegar á cierta distancia del fondo, ó por mejor decir del plano orizontal que enrasa con el borde superior del orificio; cuya distancia, aunque dificil para determinada con exactitud, se puede creer, en vista de repetidos esperimentos, que es de tres ó quatro pulgadas. Mas allá de este término las partículas que no corresponden verticalmente al orificio, se desvian de la direccion, y vienen por todas partes á meterse por el orificio en direcciones mas ó menos oblicuas. En la figura que citamos suponemos que

las

las secciones *AB*, *TV*, *RL*, *HE*, *FI* &c. planas ó curvas son perpendiculares á las direcciones de las mismas partículas, esto es, que las mismas partículas individuales que están en *AB*, bajan succesivamente á *TV*, *RL*, *HE*, *FI* &c. Se viene á los ojos que deben ser siempre unas mismas las secciones *AB*, *TV* &c. quando el vaso se mantiene constantemente lleno á una misma altura respecto del fondo, con nueva agua que entra en lugar de la que sale, y quando la evacuacion ha llegado á tomar un curso regular y permanente. Porque en unos mismos parages, así la direccion como la cantidad de la velocidad de las partecillas son unas mismas. Pero si creciese ó menguase la altura del fluido en el depósito, la naturaleza de las secciones espresadas deberá padecer alguna alteracion, porque entonces no serán unas mismas las velocidades en unos mismos parages. La estremada mobilidad de las partículas, y la igual facilidad con que obedecen al impulso de la pesantez, ocasionan entre sí un equilibrio de esfuerzos, y una colocacion tales, que á pesar de su tendencia universal ácia el orificio, la superficie superior del fluido siempre se mantiene orizontal, por lo menos hasta una distancia muy corta del orificio, conforme veremos mas adelante, quando se refieran por menor los esperimentos hechos acerca de la evacuacion de los fluidos. Fig.

130. Lo mismo sucede quando el fluido sale por una luz lateral. Al principio todas las partículas bajan verticalmente, despues se encaminan ácia la abertura, y siempre se

man-

Fig. mantiene orizontal la superficie superior. Sin embargo es
51. de reparar en este caso, que si el orificio lateral *PQ* tiene una altura sensible en comparacion de la del agua en el depósito, no tienen una misma velocidad todas las partículas, y que por razon de una profundidad mayor, se mueven con mas velocidad ácia la parte inferior del orificio que ácia la parte superior, siendo así que en las evacuaciones por orificios orizontales no puede haber en la velocidad de las partículas desigualdad alguna ocasionada por una profundidad desigual en los diferentes puntos del orificio.

131 Sea orizontal ó lateral el orificio por donde sale el fluido; como las partículas que no corresponden verticalmente al orificio, se encaminan no obstante ácia él con movimientos mas ó menos oblicuos, es evidente que intentan conservar dichos movimientos, y por consiguiente que la vena fluida, al salir de *PQ*, debe angostarse en cierto trecho *Pp*, y formar de este modo una especie de pirámide truncada *PQpq*, cuya base menor *pq* corresponde al parage donde la vena deja de angostarse para empezar á tomar la forma prismática. Es de suma importancia atender á esta *contraccion de la vena fluida*, para medir con exactitud los gastos de los depósitos por orificios propuestos. Es muy sensible en las evacuaciones por orificios abiertos en paredes delgadas. Porque se la vé angostarse notablemente á la vena al salir del orificio, y se halla, segun nos lo manifestará mas adelante la esperiencia, que la area del orificio *PQ* es á la area de la seccion *pq* en una razon que discrepa muy poco de la de 8

á

á 5. La seccion pq dista de PQ una cantidad igual, con poca diferencia, al radio del orificio PQ. Quando el agua sale del depósito por tubos cilíndricos que se le acomodan, no transparentes, y suficientemente largos para que el agua siga sus paredes, y salga á boca libre, no es visible la contraccion de la vena fluida, pero no por esto deja de verificarse al introducirse el agua en ellos. No hay mas diferencia sino que produce allí la contraccion un efecto menos sensible que en el primer caso; porque entonces el gasto solo mengua en razon de 8 á $6\frac{1}{2}$, con poca diferencia, siendo así que en el primero disminuye al poco mas ó menos en razon de 8 á 5. Todo esto lo manifestaremos patentemente con esperimentos. Como aquí solo tratamos de la teórica de las evacuaciones, suponemos que se haya achicado el orificio en la razon que exige la contraccion; y al orificio así achicado ó corregido le consideraremos como el orificio por donde se hace la evacuacion. Así, quando sale el agua por un orificio abierto en una pared delgada, y cuya area $= A$, el orificio corregido, é introducido en el cálculo $= \frac{5}{8}A$, y quando el agua sale á boca libre por un tubo aditicio, cuya base $= A$, el orificio rectificado $= \frac{13}{16}A$. Por lo que mira á la altura del agua en el depósito, en el caso primero debe contarse desde la superficie del fluido hasta el punto donde deja de angostarse la vena; y en el segundo, desde la superficie del fluido hasta la abertura esterior del tubo aditicio. Fig.

132 Sentado esto, supongamos como antes (129 y 130) un

Fig. un vaso *MCDN* que eche agua por la luz *PQ* orizontal ó lateral. Si el agua saliese por un tubo aditicio, discurriríamos de un modo análogo. Imaginemos el licor *ACDB* dividido en una infinidad de rebanadas iguales *ABba*, *TVut*, *RLlr* &c. por superficies (planas, ó curvas) infinitamente próximas y perpendiculares á las direcciones de las partículas del fluido. Sea *pqgf* el pequeño prisma de licor que sale en el instante que la superficie *AB* baja á *ab*, la superficie *TV* á *tv* &c. Es evidente que este prisma es igual á cada una de las rebanadas *ABba*, *TVut* &c. Porque conforme vá saliendo del vaso, vá entrando en su lugar forzosa é inmediatamente un prisma, ó una rebanada igual; y á no ser así, resultarian huecos entre las partículas fluidas, cuya consecuencia repugna con la estrema mobilidad de que están dotadas. Llamemos B la area de la base *TV* de una qualquiera de las rebanadas propuestas; C, la area pq; x, la altura del prisma que teniendo por base la area B, es igual á la rebanada *TVut*; y, la altura del prisma *pqgf*: resultará la equacion $Bx = Cy$; de donde sacaremos $x : y :: C : B$. Pero una vez que la superficie *TV* baja á *tu* en el mismo tiempo que la superficie pq baja á fg; es evidente que x é y representan las velocidades medias de las dos rebanadas *TVut*, *pqgf*. Así, debemos inferir que *la velocidad media de una rebanada qualquiera, tomada en lo interior del fluido, es á la velocidad del licor á la salida del orificio, como la area del orificio es á la area de la una de las bases de la rebanada propuesta.*

Sí-

133 Síguese de aquí que si el orificio es infinitamente pequeño respecto de las bases de cada una de las rebanadas iguales en que hemos supuesto dividido el licor, la velocidad media del licor á la salida del orificio, será infinita en comparacion de las velocidades medias de las diferentes rebanadas interiores; ó por mejor decir, como no hay en la naturaleza ninguna velocidad infinita, la velocidad del licor á la salida del orificio será finita, y las velocidades medias de las rebanadas interiores serán infinitamente pequeñas. Fig.

En la aplicacion que vamos á hacer de estos principios consideramos los vasos en que están los fluidos como sólidos, y como que conservan siempre su misma figura.

Del movimiento de las aguas que salen por aberturas, de vasos que se mantienen constantemente llenos.

134 Si no se resarciera á cada instante el menoscabo que padece un depósito, cuya agua sale por un orificio, la altura del fluido mas arriba del orificio menguaría sin cesar. Aquí suponemos que esta altura subsiste constantemente la misma, y por consiguiente que el depósito recibe por arriba, ó por algun lado tanta agua precisamente quanta sale por el orificio. Poco importa que el agua provisional entre de este, ú de aquel modo en el depósito, con tal que no cause conmocion sensible en la masa de las aguas interiores.

135 *Los volúmenes* pqgf, iktz *de licores* (*sean ó no de*

Fig. *de la misma especie) que salen en el mismo tiempo, y con ve-*
52. *locidades uniformes de los vasos* MCDN, EGHF *por los ori-*
53. *ficios* pq, ik, *son entre sí como los productos de los orificios por las velocidades de las evacuaciones.*

Esto es evidente de suyo; porque los prismas *pqgf*, *iktz* son los productos de sus bases *pq*, *ik* por sus alturas *pf*, *iz* corridas, segun suponemos, en tiempos iguales, y que por consiguiente representan las velocidades de los licores á su salida de los orificios *pq*, *ik*.

Tengo por superfluo añadír que quando son de una misma especie los fluidos, y tienen consiguientemente sus masas proporcionales á sus volúmenes (IV. 31), tambien se puede decir que las masas que salen en tiempos iguales, son entre sí como los productos de los orificios por las velocidades de las evacuaciones.

52. 136 *La velocidad de un licor al salir de un depósito qualquiera* MCDN *por un orificio infinitamente pequeño* pq, *es igual á la que adquiriría un cuerpo pesado si cayese de la altura vertical y constante* hq *de la superficie superior* AB *del fluido mas arriba del orificio* pq.

Concibamos el licor *ACDB* dividido en una infinidad de rebanadas iguales por superficies perpendiculares á las direcciones de las mismas partículas; las velocidades medias de las rebanadas interiores serán infinitamente pequeñas respecto de la velocidad del licor á la salida del orificio *pq* (133). Pero, segun los principios de la caida de los graves, si todas las moléculas fluidas estuvieran abando-

donadas á la accion libre de su propia pesantez, bajarian con una misma velocidad. Así, una vez que las rebanadas de mas arriba del orificio pierden la velocidad que naturalmente tendrian á impulsos de la pesantez; es evidente que el pequeño prisma fluido $pqgf$ que sale cada instante, está comprimido ó impelido del licor superior, del mismo modo que se hallaría oprimido un tapon puesto en el orificio para impedir la evacuacion. Por consiguiente, si llamamos p' la pesantez específica ó la densidad del fluido, podrá representar (24) $p' \times bq \times pq$ la fuerza motriz que arroja el prima $pqgf$. Fig.

Concibamos que en el tiempo que la presion $p' \times bq \times pq$ arroja el prisma $pqgf$, sola la pesantez absoluta de un prisma $pqxy$, que puede espresarse por $p' \times pq \times qx$, haga que este mismo prisma $pqxy$, considerado como inmobil á principio de su movimiento, ande la pequeña altura qx. Sentado esto, es evidente que por ser (IV. 25) las fuerzas motrices $p' \times bq \times pq$, $p' \times qx \times pq$ proporcionales á las cantidades de movimiento que producen, si llamamos V y u las velocidades que comunican á las masas $pqgf$, $pqxy$, tendremos $p' \times bq \times pq : p' \times qx \times pq :: pqgf \times V : pqxy \times u$, ó (135) $p' \times bq \times pq : p' \times qx \times pq :: pq \times V \times V : pq \times u \times u$, y por consiguiente $bq : qx :: V^2 : u^2$, ó si no $bq : V^2 :: qx : u^2$. Sea v la velocidad que adquiriría un cuerpo grave si cayese de la altura bq, tendremos (IV. 50) $qx : u^2 :: bq : u^2$. Luego por una serie de razones iguales saldrá $bq : V^2 :: bq : v^2$, y por consiguiente $V^2 = v^2$, ó $V = v$. Por donde se echa de

ver

Fig. ver que la velocidad V del fluido á la salida del orificio es igual á la velocidad v que adquiriría un cuerpo pesado si cayese de la altura hq del fluido en el depósito.

Esta proposicion espresada con menos palabras se reduce á decir que *la velocidad del fluido en el orificio* pq *es efecto de la altura* hq, *ó corresponde á la altura* hq. Esta espresion es muy usada; y la usarémos comunmente. Recíprocamente, quando digéremos que cierta altura es efecto de una velocidad, querremos decir que esta velocidad es igual á la que adquiriría un cuerpo grave si cayese de la altura de que se tratare. De todo esto se siguen varias consecuencias.

137 1.° Es evidente que esta misma proposicion se verifica en un orificio lateral infinitamente pequeño; porque la presion del fluido es igual en todas las direcciones, y por consiguiente debe causar la misma velocidad á la salida de dos orificios muy pequeños, el uno orizontal, y el otro lateral, con tal que estos dos orificios estén á la misma distancia de la superficie superior del agua.

138 2.° Quando el licor sale del orificio, tiene una velocidad con la qual podria volver á subir á una altura igual á la distancia vertical que hay entre el orificio, y la superficie del fluido, del mismo modo que un cuerpo, al caer de una altura determinada á impulsos de su gravedad, adquiere una velocidad con la qual podria volver á subir á la misma altura.

139 3.° Una vez que la velocidad del licor á la sali-

lida del orificio es la misma que la que ocasionaría la caida Fig.
vertical *hq*, es evidente (IV. 38) que si se continuase uniformemente esta velocidad, andaría el licor un espacio igual á $2hq$ en el mismo tiempo que gastaría un cuerpo pesado para caer de la altura *hq*.

140 4.° Supongamos que *hq*, *lk* sean las alturas de 52.
los licores *ACDB*, *OGHP* mas arriba de los pequeños 53.
orificios iguales ó desiguales *pq*, *ik*, por donde salen; *V* y *u*, las velocidades de las evacuaciones. Como la espresion de cada una de estas velocidades, sea la que fuere la naturaleza del fluido, es la raiz quadrada de la altura del fluido que le corresponde (136 y IV. 50), tendremos generalmente $V : v :: \sqrt{hq} : \sqrt{lk}$. Quiero decir, que las velocidades con que dos licores, de una misma ó de distinta especie, salen por orificios pequeños, son entre sí como las raices quadradas de las alturas de los mismos licores en los dos depósitos.

Esto manifiesta la equivocacion que padeció (*Tom. I. pag.* 187) el Autor de la Arquitectura Hydráulica, quando dijo que las velocidades de dos licores diferentes, como el mercurio y el agua, son entre sí como las raices quadradas de los productos de las alturas por las gravedades específicas. Si hubiera advertido este Autor en el egemplo que propone (*num.* 490), que siendo en realidad la columna que arroja el mercurio fuera del uno de los vasos, catorce veces mas pesada que la columna que arroja el agua fuera del otro vaso, tambien la masa arrojada en el primer caso es catorce veces mayor que la masa arrojada en el segundo,

Fig. se hubiera hecho cargo muy facilmente de que debe ser una misma la velocidad en ambos casos. En general, es evidente (IV. 25) que quando las fuerzas motrices son proporcionales á las masas que ponen en movimiento, las velocidades son iguales.

141 El modo con que hemos discurrido (136) para determinar las velocidades de los flujos se funda en que el licor quando sale del orificio, es impelido del peso *entero* de la columna correspondiente, lo que supone por lo mismo que es infinitamente pequeño el orificio. Sin embargo, la mayor parte de los Autores elementales, que en este asunto casi todos han copiado á *Varignon*, sientan que quando sale el licor de un orificio orizontal, es impelido del peso de la columna superior, sin poner límites á la estension del orificio. Es constante que la proposicion no es verdadera en general. Porque si tuviéramos, por egemplo, un vaso cilíndrico vertical lleno de agua, é imagináramos que de repente se quedára sin suelo, la rebanada del fondo no padecería accion ninguna de parte de las rebanadas superiores, y todas ellas bajarian con una misma velocidad, arreglándose á las leyes de la caida de los graves. La rebanada del fondo solo aguanta el peso total de la columna superior, quando pierden sus velocidades las rebanadas superiores, y por consiguiente quando es infinitamente pequeño el orificio (132 y 133).

Sin embargo, es de suma importancia prevenir que si un orificio orizontal, aunque finito, es pequeño en comparacion de la latitud del depósito; por egemplo, si la razon entre

tre la primera superficie, y la segunda no pasa de la de 1 á 20, la velocidad del fluido al salir del orificio es sensiblemente la misma que si fuera infinitamente pequeño dicho orificio. Fig.

Pero en este caso dicha velocidad no tiene por única causa la presion de la columna superior. Cada partícula se mueve á un tiempo por su propia pesantez, y por el impulso de las partículas contiguas, á cuya accion coadyuva, ó se opone continuamente su adherencia recíproca. Pero bien se deja entender, sin que sea quizá posible demostrarlo rigurosamente, que se pueden combinar unas con otras todas estas fuerzas de forma que la velocidad del licor á la salida del orificio sea la misma que si fuese efecto del peso de la columna superior. A lo menos la esperiencia no deja duda ninguna acerca de esto. Se observa sí quando es algun tanto considerable el orificio, que no adquiere la velocidad su plenitud uniforme y permanente sino al cabo de cierto tiempo; porque entonces se repara que la cantidad de licor que sale en los tres ó quatro primeros segundos de la evacuacion es algo menor que la que sale mas adelante en otros tres ó quatro segundos. Quanto mayor es el orificio, tanto mas notable es esta desigualdad.

142 En la práctica salen muchas veces las aguas por aberturas laterales que bien que pequeñas en comparacion de las amplitudes orizontales de los depósitos, sin embargo no se pueden considerar como que tienen todos sus puntos á iguales distancias de la superficie del fluido. Decla-

Fig. remos como se determinan comunmente las velocidades de los diferentes puntos del agua en estas aberturas.

Imaginemos un orificio de esta especie tapado con una plancha del mismo tamaño que él, y supongamos que dicha plancha tenga unos agugeritos por donde sale el licor. Si consideramos cada agugero como un orificio particular, la velocidad á la salida por un agugero qualquiera será igual á la que adquiriría un cuerpo pesado si cayese de la altura á que está la superficie del agua respecto del mismo agugero (136). Ahora bien, auméntese al infinito el número de los agugeros de forma que sea su suma igual con el orificio propuesto ; siempre serán las velocidades las mismas que acabamos de decir. Luego quando se hubiere de determinar la cantidad de licor que sale en un tiempo dado, será menester atender á esta desigualdad de velocidades, y hacer lo que propondremos muy en breve.

Hemos de confesar que no es demostrativo el raciocinio en que se funda la determinacion de que estamos hablando. Siempre que la suma de los agugeritos de la plancha substituida al orificio, fuere muy pequeña en comparacion de la amplitud del depósito, las porciones de licor que salen por cada agugero, son impelidas de los pesos absolutos de las columnas correspondientes, y se hace la evacuacion conforme digimos (136). Pero luego que el número de los agugeritos crece al infinito, y llegan los filetes á estar contiguos unos á otros, no se deja percibir con claridad que hayan de salir del mismo modo que saldrian por unos agu-

ge-

geritos aislados. Lo mas acertado en este caso es apelar á la Fig.
esperiencia, y esta enseña que el movimiento es casi el mismo en ambos casos, por lo menos quando la abertura lateral no es demasiado grande respecto de la amplitud del depósito.

143 Cuestion I. *Hallar una equacion para espresar* 52.
la relacion que hay entre la cantidad de licor que sale de un depósito qualquiera MCDN *por el pequeño orificio* pq *orizontal ó lateral, el tiempo de la evacuacion, y la altura del fluido en el depósito.*

Se echa de ver que quando la abertura es lateral, debe ser tan chica, ó estar situada de tal modo que puedan considerarse todos sus puntos como que están á una misma distancia de la superficie del agua.

Llamemos K la area del orificio pq; t, el tiempo de la evacuacion; h, la altura constante hq del agua en el depósito; Q, la cantidad de agua que ha salido en el tiempo t; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave para caer desde una altura dada a. Es evidente (IV. 50) que el quarto término $\frac{t'\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ de la proporcion $\sqrt{a} : \sqrt{h} :: t'$, espresará el tiempo que gastaría un cuerpo pesado para caer desde la altura h. Pero es así que durante este mismo tiempo debe salir una columna fluida, cuya base es la area K, y la altura es (139) $2h$, por ser constante la altura h, y ser por consiguiente uniforme la velocidad á la salida del orificio. Así, $2Kh$ espresa la columna ó cantidad de fluido que sale en el tiempo $\frac{t'\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$. No es menos evidente que las cantidades de fluido que

Fig. salen en los tiempos $\frac{t'\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ y t, son entre sí como estos tiempos. Tendremos, pues, $\frac{t'\sqrt{h}}{\sqrt{a}} : t :: 2Kb : Q$, y por consiguiente $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'}$, en cuya fórmula está cifrada la relacion que se pide.

Entre las seis cantidades que incluye esta fórmula, hay dos, es á saber t' y a, que siempre son constantes; nosotros, fundándonos en la esperiencia, caminaremos en el supuesto de que quando a es 15 pies 1 pulg. $t' = 1''$ (IV. 50). Pero las otras quatro K, t, b, Q pueden variar, y es patente que en conociendo tres de ellas se puede hallar la quarta. De aquí sacaremos la respuesta á las preguntas siguientes.

144 Pregunta I. *Dada la area* K *del orificio, el tiempo* t *de la evacuacion, la altura* h *del depósito; hallar la cantidad* Q *de agua que ha salido.*

La respuesta á esta pregunta se saca de la fórmula $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'}$.

Supongamos, por egemplo, que sea de 12 pies la altura b del agua en el depósito; que tenga una pulgada de diámetro el orificio que suponemos circular, y que la evacuacion dure un minuto. Substituyendo estos datos en la equacion antecedente, y substituyendo tambien 15 pies 1 pulg. en lugar de a, y $1''$ en lugar de t'; sacaremos $Q = 15216$ pulgadas cúbicas con muy corta diferencia. Para conocer el peso de esta cantidad de agua se hará esta proporcion 1728 pulgadas cúbicas son á 15216 pulgadas cúbicas, como 70 libras, que son el peso del pie cúbico de agua dulce, ó de 1728 pulgadas cúbicas, son á 616 libras al

po-

poco mas ó menos, que son el peso que se pide. Fig.

145 Pregunta II. *Dada la altura* h *del depósito, el tiempo* t *de la evacuacion, la cantidad* Q *del agua que ha salido; hallar la area* K *del orificio.*

La fórmula $K = \frac{t'Q}{2t\sqrt{ha}}$ nos dará la respuesta.

Si hubiese de ser el orificio un círculo, y hubiésemos de determinar su radio, es evidente que este radio $= \sqrt{\left[\frac{t'Q}{2t\sqrt{ha}} \times \frac{113}{355}\right]}$, en cuya espresion $\frac{113}{355}$ es (I. 503) la razon del diámetro á la circunferencia.

Sea, por egemplo, $t = 1'$, $Q = 8$ pies cúbicos, ó 13824 pulgadas cúbicas, $h = 9$ pies; sacaremos $K = 0,82396$ pulgadas quadradas. Si dicho orificio fuese un círculo, hallaríamos que su radio viene á ser de unas $6\frac{1}{10}$ lineas.

146 Pregunta III. *Dada la altura* h *del depósito, la area* K *del orificio, y la cantidad* Q *del agua que ha salido; hallar el tiempo* t *de la evacuacion.*

Sacaremos la respuesta de la equacion $t = \frac{t'Q}{2K\sqrt{ha}}$.

Supongamos, por egemplo, $h = 9$ pies, $K = 1$ pulg. quadrada, $Q = 40000$ pulgadas cúbicas, hallaremos $t = 143,05$ segundos $= 2' 23''$, con poca diferencia.

Por el mismo método se puede hallar la respuesta á la pregunta siguiente. *Supongamos que se quede de repente vacío un cañon de artillería en virtud de la esplosion de la pólvora que arroja la bala; se pregunta ¿qué tiempo gastará el ayre en volver á entrar en el cañon, y andar toda su longitud?* Es evidente que como la presion de la atmósfera, por cuya

Fig. fuerza vuelve á entrar el ayre en el cañon, es equivalente á la de una columna de agua de 32 pies de alto (60), ó á la de una columna de ayre uniforme de 32 veces 850 pies de alto (66); todo consistirá en hacer $h = 27200$ pies, $Q = K \times L$, siendo L la longitud del cañon, para sacar la equacion $t = \frac{t'L}{2\sqrt{ha}}$ que es la de la cuestion. Por egemplo, si $L = 16$ pies, se halla $t = \frac{3}{4}$ terceros, ó allá se vá. No atendemos á la corta cantidad de ayre que vuelve á entrar por el fogon, ni á la corta variacion que esperimenta la elasticidad del mismo fluido al andar el espacio L, por ser una y otra de poca consideracion.

147 Pregunta IV. *Dada la cantidad* Q *de agua que salió, la area* K *del orificio, y el tiempo* t *de la evacuacion; hallar la altura* h *del depósito.*

Satisfácese esta pregunta por la equacion $h = \frac{Q^2 t'^2}{4at^2 K^2}$.

Sea, por egemplo, $Q = 40000$ pulgadas cúbicas, $K = 1$ pulgada quadrada, $t = 4$ minutos $= 240$ segundos; hallaremos $h = 3$ pies 2 pulgadas $4\frac{2}{5}$ lineas.

148 Cuestion II. *Declarar de un modo general como se determinan las evacuaciones por aberturas laterales cuyos puntos no pueden suponerse todos igualmente distantes de la superficie del fluido.*

Hemos visto (142) como en las evacuaciones de que vamos tratando, podemos suponer la velocidad de cada punto del orificio igual á la que adquiriría un cuerpo grave si cayera de la altura del fluido, que corresponde á dicho punto. En virtud de este principio, ó por mejor decir, de es-

esta hypótesi que en adelante confirmaremos con esperimentos, imaginarémos que el orificio propuesto esté dividido en una infinidad de rectángulos ó trapecios por planos orizontales, y considerando cada uno de estos trapecios elementales como un orificio particular cuyos puntos se puede suponer que todos distan igualmente de la superficie del fluido, se determinará (143 y 144) la cantidad de licor que debe dar en un tiempo dado. Solo faltará hallar despues la suma de todas estas cantidades elementales de fluido, para conocer la cantidad total que dará todo el orificio en el mismo tiempo. Fig.

Los egemplos siguientes aclarán esta resolucion.

149 Cuestion III. *Determinar la evacuacion por un orificio rectangular vertical* LNOM *hecho en una de las paredes del vaso qualquiera* ABCDEFGH. 54.

Tírense paralelamente á las bases opuestas y orizontales LM, NO del orificio las rectas infinitamente próximas XZ, xz que determinan el rectángulo elemental $XZzx$ de la superficie del orificio. Si consideramos este rectangulillo como un orificio particular; levantamos en un punto qualquiera R de la base NO una vertical RV que encuentre XZ en I, y remate en el punto V de la superficie del fluido; y llamamos t el tiempo de la evacuacion, t' el tiempo que un cuerpo grave gastaría en caer desde la altura dada a; es evidente (143) que $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times 2XZ \times Ii \times \sqrt{VI}$ espresará la cantidad de licor que saldrá por el orificio $XZzx$ en el tiempo t. El punto está en hallar la suma de todas estas can-

Fig. cantidades elementales de agua, para conocer la cantidad total que sale por el orificio finito $LNOM$.

Para este fin, constrúyase la parábola VYT sobre VR como ege, y con un parámetro quádruplo de VR. Despues de prolongadas las rectas KM, IZ, iz hasta Y, S, s; $Ii \times IS$ será la espresion del pequeño trapecio parabólico $ISsi$. Pero por la propiedad (III. 45) de la parábola $(IS)^2 = VI \times 4VR$. Luego $Ii \times IS = 2Ii \times \sqrt{(VI \times VR)}$. Multiplicando esta espresion del trapecio $ISsi$ por la cantidad constante $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times \frac{XZ}{\sqrt{VR}}$, el producto $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times 2XZ \times Ii \times \sqrt{VI}$ representará la cantidad de licor que saldrá por el orificio $XZzx$ en el tiempo t. Por consiguiente la cantidad total de licor que sale por el orificio $LNOM$ en el mismo tiempo es igual al producto de la area parabólica $KRTSY$ por la cantidad constante $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times \frac{XZ}{\sqrt{VR}}$. Así, si hacemos la cantidad total de licor que ha salido $= Q$, $VR = H$, $VK = h$, $LM = f$; y consideramos que (III. 570) la area parabólica $VRT = \frac{2}{3}VR \times RT = \frac{4}{3}H^2$, y que igualmente la area $VKY = \frac{2}{3}VK \times KY = \frac{4}{3}h\sqrt{Hh}$; sacaremos $Q = \frac{4tf(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})\sqrt{a}}{3t'}$, ó $3t'Q = 4tf(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})\sqrt{a}$, cuya equacion contiene todas las cantidades correspondientes á la evacuacion propuesta.

Yá se vé que de las siete cantidades que incluye esta equacion, t' y a son constantes, pudiendo variar las otras cinco Q, H, h, f, t; de aquí se saca la resolucion de varias cuestiones análogas á las de antes (144, 145, 146 y 147).

150 Llamemos x la altura *media* del agua mas arriba del orificio, esto es, una altura tal que si todos los filetes

tes de agua saliesen con una sola y misma velocidad igual Fig.
á la que puede adquirir un cuerpo grave cayendo desde la altura x, salga en el tiempo t la misma cantidad de agua que sale con las velocidades naturales en el supuesto de la cuestion. Sacaremos (144) $Q = \frac{2tf(H-h)\sqrt{ax}}{t'}$. Igualando uno con otro los dos valores de Q, y despejando x, hallaremos $x = \frac{4(H\sqrt{H}-h\sqrt{h})^2}{9(H-h)^2}$. Esta altura media discrepa de la vertical que se levantase desde el centro de gravedad del orificio *LNOM* hasta la superficie del agua, y cuyo valor sería por consiguiente $\frac{H+h}{2}$. Pero quanto mas elevada está la superficie del agua respecto de la base superior *LM* del orificio (siendo igual todo lo demás), tanto menor es la espresada diferencia. Con efecto, conforme vá creciendo *VK*, quedándose del mismo modo todo lo demás, el arco *YST* se vá aproximando mas y mas á una línea recta, y el segmento parabólico *KRTSY* á un trapecio rectilineo. Pero si el segmento parabólico llegase en realidad á ser un trapecio rectilineo, la ordenada media, ó la velocidad media del agua corresponderia al medio de *KR*. Luego tambien corresponderia al mismo punto la altura media.

151 Cuestion IV. *Determinar la evacuacion por el orificio vertical* LNM *á manera de triángulo isósceles cuya* 55.
base LM *es orizontal, hecho en una de las paredes de un vaso qualquiera* ABCDEFGH.

Si llamamos t el tiempo que dura la evacuacion; Q, la cantidad del agua que sale; H, la altura *VR* de la superficie del agua mas arriba de la base *LM* del orificio; h,

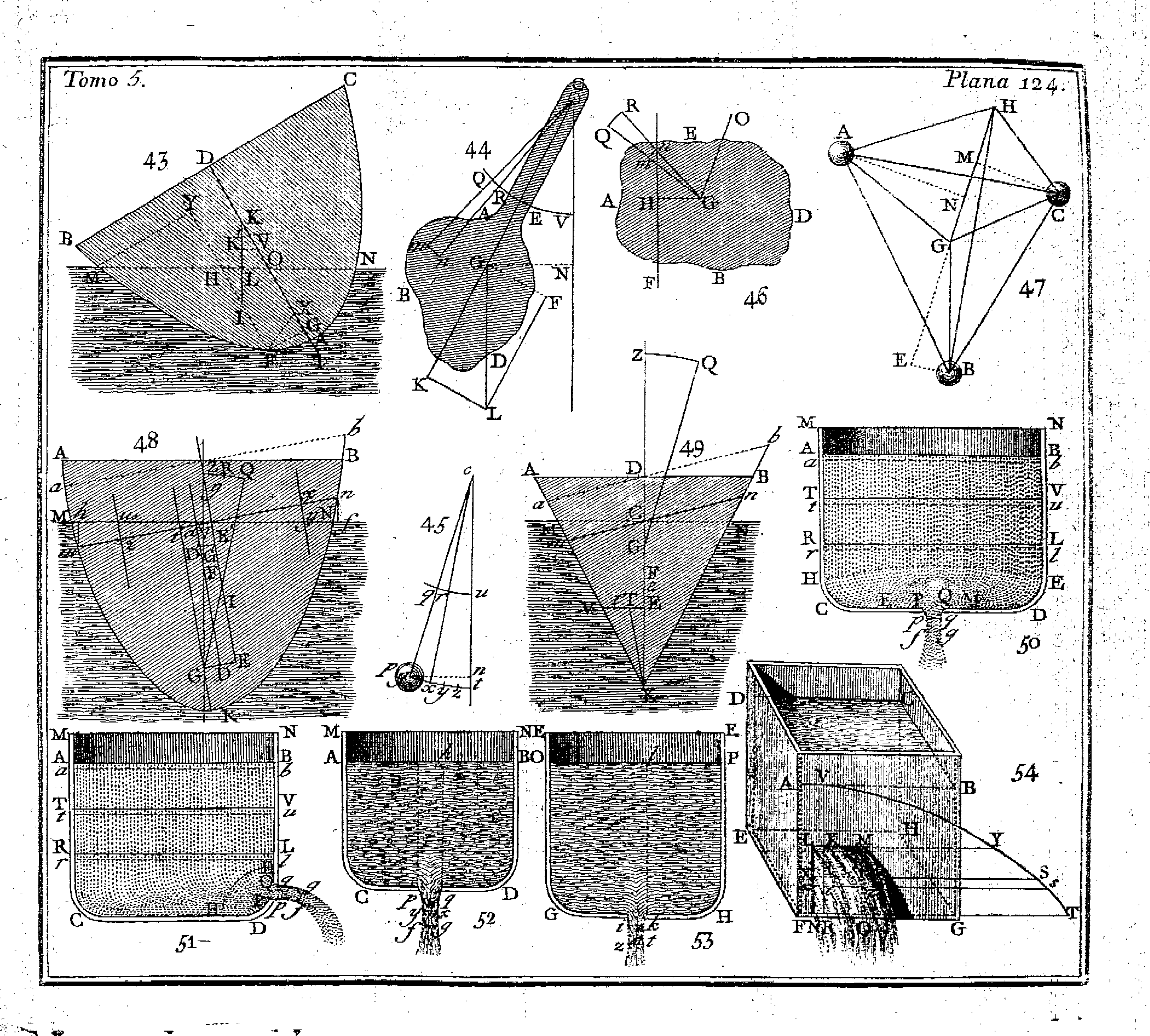
la

Fig. la altura VN del agua mas arriba del vértice N del triángulo; c, la base LM del mismo triángulo; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer de la altura dada a; se sacará facilísimamente por los primeros principios que dejamos declarados (III. 507 &c.) del cálculo integral, la equacion $15\,t'(H - b)Q = 4ct(2b^2\sqrt{b} + 3H^2\sqrt{H} - 5Hb\sqrt{H})\sqrt{a}$, que resuelve la cuestion.

152 Síguese de aquí que si fuese x la altura media del agua mas arriba del orificio, tendremos (144) $Q = \frac{ct(H-h)\sqrt{ax}}{t'}$. Si igualamos uno con otro los dos valores de Q, y despejamos x, sacaremos $x = \frac{16(2h^2\sqrt{h}+3H^2\sqrt{H}-5Hh\sqrt{H})^2}{225(H-h)^4}$. Para averiguar si esta altura discrepa mucho de la distancia del centro de gravedad del orificio á la superficie del agua, consideremos la diferencia de estas dos lineas en el caso en que mas discrepan, esto es, quando $b = 0$. Hallaremos para este caso $x = \frac{144}{225}H$; y como la distancia del centro de gravedad del orificio á la superficie del agua $= \frac{2}{3}H$ en la misma hypótesi, se echa de ver que la primera linea es menor que la segunda, $\frac{2}{25}H$ no mas. Así, quando en la práctica la superficie del agua tiene una altura sensible mas arriba del vértice del orificio, se puede tomar por altura media la distancia del centro de gravedad del orificio á la superficie del agua.

56. 153 Cuestion V. *Determinar la evacuacion por un orificio vertical á manera de triángulo isósceles, cuya punta* N *está ácia abajo, y la base* LM *es orizontal, hecho en una de las paredes del depósito* ABCDEFGH.

Llamemos t el tiempo de la evacuacion; Q, la canti-


Tomo 5.
Plana 124.
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54

tidad del agua que sale; H, la altura VN del agua mas arriba del vértice del orificio; h, la altura VR del agua mas arriba de la base del triángulo; c, la base LM; t', el tiempo que un cuerpo grave gastaría en caer de la altura dada a; sacaremos la equacion $15t'(H - h)Q = 4ct(2H^2\sqrt{H} + 3h^2\sqrt{h} - 5Hh\sqrt{h})\sqrt{a}$ que resuelve la cuestion. Fig.

154 Luego si llamamos x la altura media del agua mas arriba del orificio, tendremos (144) $Q = \frac{tc(H-h)\sqrt{ax}}{t'}$. Si igualamos uno con otro los dos valores de Q, sacaremos $x = \frac{16(2H^2\sqrt{H}+3h^2\sqrt{h}-5Hh\sqrt{h})^2}{225(H-h)^4}$. Quando $h = 0$, el valor de x es $\frac{11H}{225}$ menor que la distancia del centro de gravedad del triángulo á la superficie del agua.

155 Cuestion VI. *Determinar la evacuacion por un orificio vertical y circular* LMNP, *abierto en una de las paredes del vaso* ABCDEFGH. 57.

Llamemos t el tiempo de la evacuacion; Q, la cantidad de agua que salió; t', el tiempo que gastaría un grave en caer de la altura dada a; r, el radio OL del orificio; $\frac{p}{1}$, la razon entre la circunferencia y el diámetro; $\frac{n}{1}$, la razon entre la altura VO de la superficie del agua respecto del centro O, y el radio OL, de forma que $VO = nr$.

Esto supuesto, tiraremos al diámetro LN las ordenadas infinitamente próximas QR, qr, y al centro O el radio QO; imaginaremos que con el radio 1 se ha trazado un arco que llamaremos z, concéntrico y semejante al arco LQ. Es evidente que de esto resultará $LQ = r \cdot z$, $QR = r \cdot \operatorname{sen} z$ (I. 666), $OR = r \cdot \cos z$, $LR = r - r \cdot \cos z$, $Rr = d(LR)$

=

Fig. $= rdz$ sen z (III. 355), el trapecio elemental $RQqr$ $= r^2dz$ sen^2z, $VR = VO - OR = nr - r\cos z$. Por consiguiente la cantidad elemental de agua que sale en el tiempo t por el trapecio $RQqr$ será (144) $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times 2rrdz$ sen$^2z\sqrt{(nr - r\cos z)}$, quiero decir que tendremos $dQ = \frac{2tr^2\sqrt{ar}}{t'} \times dz$ sen$^2z\sqrt{(n - \cos z)}$.

Antes de empeñarnos en integrar esta equacion hemos de reparar que dz sen$^2z\sqrt{(n-\cos z)} = dz(1-\cos^2z)$ (II. 379) $\sqrt{(n - \cos z)} = dz(1 - \cos^2z) \times (n^{\frac{1}{2}} - \frac{n^{-\frac{1}{2}}\cos z}{2} - \frac{n^{-\frac{3}{2}}\cos^2 z}{8} - \frac{n^{-\frac{5}{2}}\cos^3 z}{16} - \frac{5n^{-\frac{7}{2}}\cos^4 z}{128} - \frac{7n^{-\frac{9}{2}}\cos^5 z}{256} - \frac{63n^{-\frac{11}{2}}\cos^6 z}{3072} -$ &c) (II. 107).

Pero como la integral ha de ser cero quando $z = 0$, y ha de estar completa quando $z = 360$ grados, se podrá simplificar mucho el cálculo. Porque en la equacion diferencial se podrán desechar todos los términos que llevan $\cos z$, $\cos 2z$, $\cos 3z$ &c. porque estos términos tendrian (III. 547) despues de la integracion sen z, sen $2z$ &c. que son nulos quando $z = 0$, y $z = 360^\circ$ (II. 361). Por consiguiente, yá que (II. 398) $\cos^2z = \frac{1+\cos 2z}{2}$, $\cos^3z = \frac{3\cos z + \cos 3z}{4}$, $\cos^4z = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2z}{2} + \frac{\cos 4z}{8}$ &c., supondremos $\cos z = 0$, $\cos^2z = \frac{1}{2}$, $\cos^3z = 0$, $\cos^4z = \frac{3}{8}$, $\cos^5z = 0$, $\cos^6z = \frac{5}{16}$ &c. Será, pues, la equacion que se deberá integrar $dQ = \frac{tr^2\sqrt{(anr)}}{t'} \times dz\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4}\right.$ —

— &c.). De donde sacaremos, con hacer despues de la integracion $z = 360^\circ = \frac{2P}{1}$, $Q = \frac{2Ptr^2\sqrt{(anr)}}{t'}\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \&c.\right)$. Fig.

Es tanto lo que converge esta serie, que por poco que VO sea mayor que OL bastarán sus tres primeros términos para los usos de la práctica.

156 Sea x la altura media del agua mas arriba del orificio; por lo dicho (144) tendremos $Q = \frac{2tPr^2\sqrt{ax}}{t'}$. Igualando uno con otro los dos valores de Q, hallaremos $x = nr\left(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \&c.\right)$.

Se echa de ver que la altura media x es menor que VO. Quando n es sensiblemente mayor que la unidad, se pueden considerar como iguales estas dos lineas.

157 Quando la superficie del agua enrasa con el es- 58.
tremo superior L del diámetro LN, ó es $n = 1$, se podrá sacar tambien de la fórmula precedente el valor de Q; pues en este supuesto la equacion $dQ = \frac{2tr^2\sqrt{ar}}{t'} \times dz\,\text{sen}^2 z\sqrt{(1 - \cos z)}$ admite una integral cabal. Porque si hacemos $1 - \cos z = y$, tendremos $dz\,\text{sen}^2 z\sqrt{(1 - \cos z)} = ydy\sqrt{(2 - y)}$, cuya integral es $yS.dy\sqrt{(2-y)} - S.dyS.dy\sqrt{(2-y)}$, (lo verificará el que diferenciare esta última cantidad) cuya integral es (III. 510) $-\frac{2y(2-y)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-y)^{\frac{5}{2}}}{15}$

$$+ C = -\frac{2\,\text{sen}^2 z(1 + \cos z)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(1 + \cos z)^{\frac{5}{2}}}{15} + C.$$

Si determinamos la constante C en virtud de la condicion

Fig. cion de que se desvanezca la integral quando $z = 0$, y tenga su valor completo quando $z = 180°$, sacaremos $\frac{32tr^2\sqrt{(2ar)}}{15t'}$, que será la espresion de la cantidad de agua que sale por el semiorificio *LNP*, y por consiguiente $\frac{64tr^2\sqrt{2ar}}{15t'}$ espresára lo cantidad que sale por el orificio entero *LPNM*. Pero si en este caso buscamos directamente *Q*, hallaremos que el valor de esta cantidad se puede cifrar en una equacion finita y algebráica que es $Q = \frac{64tr^2\sqrt{(2ar)}}{15t'}$, representando las letras t, Q, r, a, t' lo mismo que antes.

La fraccion $\frac{1024 \times 2r}{15P^2}$ igual, con poca diferencia, á $\frac{25}{27}r$ espresa la altura media del agua. De donde se saca que dicha altura siempre es menor que la distancia del centro del orificio á la superficie del agua.

158 Podríamos dar tambien una fórmula para valuar el gasto, quando la superficie del agua no llega al punto *L*, y es por lo mismo el orificio un segmento de círculo. Pero escusaremos darla, porque en las cuestiones de esta naturaleza en las quales la superficie superior del agua no está sostenida de la pared en el parage donde está la luz, se baja sensiblemente ácia el medio; esto altera la razon natural de las velocidades, y no permite que la teórica determine, á no ser con mucha imperfeccion, las evacuaciones.

159 Bastan á mi parecer estos egemplos para manifestar de qué modo se determinan las evacuaciones de los fluidos por una sola abertura. Quando un fluido sale por muchas aberturas á un tiempo, suponiéndolas siempre muy pequeñas, la evacuacion por cada una de ellas es la misma

que

que sino hubiera mas que ella. Por consiguiente no resulta Fig.
de aquí mas dificultosa la resolucion de la cuestion. Lo único que acerca de esto hay que prevenir es, que quando hay una abertura chica junto á otra mayor, arroja la primera una porcion de fluido algo menor á proporcion de la otra. Mas abajo aclararemos esto con el auxilio de los esperimentos.

Ahora resolveremos diferentes cuestiones acerca de las evacuaciones de vasos atravesados vertical ú orizontalmente de muchos diaphragmas, cuyas cuestiones son tan curiosas de suyo, como provechosas para la práctica.

160 Cuestion VII. *Suponiendo que los vasos* ABCD, 59.
FCEG, HELK *se comunican unos con otros por las aberturitas* C, E, *y que el fluido sale afuera por la aberturita* L *del último; se pregunta ¿quáles son las alturas correspondientes á las velocidades en* C, E, L, *&c. y la cantidad de la evacuacion, quando ha llegado á ser uniforme el movimiento, y por consiguiente subsisten constantemente unas mismas las alturas* AB, CF, EH, *por estar recibiendo el primer vaso la misma cantidad de agua que sale por la abertura* L?

Una vez que consideramos las aberturas *C*, *E*, *L* como infinitamente pequeñas respecto de las amplitudes de los vasos, es evidente que la pequeña masa que pasa á cada instante desde el primer vaso al segundo, y la que pasa desde el segundo al tercero, no pueden ocasionar con estos movimientos mas que una comocion insensible en el fluido; y por consiguiente esta comocion no ocasionará mas que unas variaciones, que se pueden mirar como nulas en las velocidades en

Fig. C, E, L, especialmente quando no están en línea recta dichas aberturas. Así, por razon del equilibrio que habria (20) entre los dos fluidos $CFOB$, $CFGE$ que se comunican uno con otro por la abertura C, y entre los dos fluidos $EHQC$, $EHKL$ que se comunican uno con otro por la abertura E, si el fluido estuviera en reposo separadamente en los vasos $CFOB$, $CFGE$, $EHQC$, $EHKL$, combinados unos con otros de dos en dos; se echa de ver que en el supuesto de la cuestion, la velocidad en C solo proviene de la altura DF; la velocidad en E, de la altura GH; la velocidad en L, de la altura KL. Luego si llamamos t el tiempo de la evacuacion; t', el tiempo que un cuerpo grave gastaría en caer desde la altura dada a; Q, cada una de las cantidades iguales de agua que pasan en el tiempo t por cada una de las tres aberturas C, E, L; b, la altura conocida AB del depósito $ABCD$; x, la altura DF que corresponde á la velocidad en C; y, la altura GH que corresponde á la velocidad en E; z, la altura KL que corresponde á la velocidad en L; tendremos (144) $Q = \frac{2tC\sqrt{ax}}{t'}$, $Q = \frac{2tE\sqrt{ay}}{t'}$, $Q = \frac{2tL\sqrt{az}}{t'}$. A mas de esto $x + y + z = b$. Comparando estas equaciones unas con otras, dán los valores siguientes de las quatro incógnitas x, y, z, Q.

$$x = b \times \frac{L^2E^2}{C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2}$$

$$y = b \times \frac{C^2L^2}{C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2}$$

$$z = b \times \frac{C^2E^2}{C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2}$$

$$Q = \frac{2tL.\sqrt{ah}}{t'} \times \frac{CE}{\sqrt{(C^2L^2 + C^2E^2 + L^2E^2)}}.$$

En

En estas fórmulas está cifrado quanto pertenece á la evacuacion propuesta, y suministran consecuencias análogas á las que sacamos de lo dicho (143). Fig.

Del mismo modo se resolvería la cuestion, si fuera mayor el número de vasos. En la cuestion siguiente hallaremos aplicaciones de fórmulas análogas á las antecedentes.

161 Cuestion VIII. *Estando el vaso* AIVD, *que se* 60.
mantiene constantemente lleno á la altura AI, *dividido por muchos diaphragmas* BC, ZT, IV *que llevan unas aberturitas* M, N, P; *se pregunta ¿qué alturas corresponden á las velocidades en* M, N, P, *y qué cantidad de agua pasará en un tiempo dado por cada una de estas aberturas?*

1.° Como la resistencia del agua inferior impide en parte la evacuacion natural del agua *ABCD* por el agugero *M*, es evidente que sale el agua por *M* del mismo modo que saldría por un orificio lateral *C* igual á *M*, si se comunicára por aquella parte con el agua *FCGR* de un depósito lateral, cuya altura *FC* espresase la resistencia que cada punto del agua en *M* esperimenta por parte del agua inferior.

2.° Por ser la reaccion siempre igual y contraria á la accion, la parte de agua *BCTZ* está comprimida en todos sus puntos por el agua superior con una fuerza proporcional á *CF*. Así, si quando el agua pasa por *N*, no esperimentase resistencia alguna por parte del agua inferior, la altura que en este caso corresponde á su velocidad, sería *TF*, y se haría la evacuacion del mismo modo que la del vaso lateral *FTEG* por una abertura *E* igual á la abertura *N*. Sea *TQ*

Fig. la altura proporcional á la resistencia que esperimenta el agua quando pasa por N, en cada uno de sus puntos por parte del agua inferior. La evacuacion por N se hará del mismo modo que se haría naturalmente en el vaso $QHGF$ por una abertura H igual á la abertura N.

3.° Del mismo modo se echa de ver que la evacuacion por la abertura P se hará de la misma forma que se haría la del vaso $SLKH$ por una abertura L igual á P, siendo la altura KL ó SH igual á VQ.

Sentado esto, si llamamos t el tiempo de la evacuacion; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer desde la altura dada a; Q, cada una de las cantidades iguales de agua que pasan en el tiempo t por cada una de las tres aberturas M, N, P; b, la altura dada AI; x, la altura DF correspondiente á la velocidad en M; y, la altura GH correspondiente á la velocidad en N; z, la altura KL correspondiente á la velocidad en P; tendremos $Q = \frac{2tM.\sqrt{ax}}{t'}$, $Q = \frac{2tN.\sqrt{ay}}{t'}$, $Q = \frac{2tP.\sqrt{az}}{t'}$. Tendremos además $x + y + z = b$. De estas equaciones que vienen á ser las mismas que las de antes (160), se saca

$$x = b \times \frac{N^2P^2}{M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2},$$

$$y = b \times \frac{M^2P^2}{M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2},$$

$$z = b \times \frac{M^2N^2}{M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2},$$

$$Q = \frac{2tP\sqrt{ah}}{t'} \times \frac{MN}{\sqrt{(M^2P^2 + M^2N^2 + N^2P^2)}}.$$

Del mismo modo discurriríamos si fuera mayor el número de diaphragmas y aberturas.

Quan-

162 Quando la última abertura P es muy chica respecto de las demás M, N, se pueden despreciar en el denominador comun de las fracciones precedentes, los términos que llevan P en comparacion de los demás; en cuyo caso es sensiblemente $x = b \times \frac{P^2}{M^2}$, $y = b \times \frac{P^2}{N^2}$, $z = b$, $Q = \frac{2tP\sqrt{ah}}{t'}$. Por donde se echa de ver que la evacuacion por la abertura P se hace, con muy poca diferencia, de la misma forma que la de antes (143); y así debe ser con efecto, porque no influye en la evacuacion la figura del depósito, quando la abertura por donde sale el licor se supone infinitamente pequeña respecto de todas las amplitudes orizontales del depósito. Fig.

163 Por el contrario, si las aberturas M, N son muy pequeñas respecto de la abertura P, sale sensiblemente $x = b \times \frac{N^2}{M^2 + N^2}$, $y = b \times \frac{M^2}{M^2 + N^2}$, $z = b \times \frac{M^2 N^2}{M^2 P^2 + N^2 P^2}$, $Q = \frac{2tM.N\sqrt{ah}}{t'\sqrt{[M^2 + N^2]}}$. De donde resulta que llegan á ser muy pequeñas la velocidad y la cantidad de la evacuacion por la abertura P.

Esto manifiesta quan perjudiciales son para la altura y el gasto de los surtidores los atascaderos que se forman con frecuencia en los encañados de las aguas *salientes*. Tambien manifiesta quanto importa disminuir los atascaderos en las bombas, ó aumentar los diámetros de las válvulas respecto del diámetro del agugero por donde sale afuera el agua.

164 Supongamos que sean iguales entre sí las tres aberturas M, N, P. Sacaremos $x = y = z = \frac{h}{3}$, $Q = \frac{2tP\sqrt{ah}}{t'\sqrt{3}}$. Por donde se conoce que el gasto Q es al gasto

Fig. $\frac{2tP\sqrt{ah}}{t}$ que se haría (143) por la abertura P, si no hubiera los diaphragmas BC, ZT, como 1 es á $\sqrt{3}$. Igualmente se hallará la razon entre estos dos gastos, haya la razon que hubiere entre los orificios M, N, P.

165 En general se puede hacer de forma que siendo dadas dos de las tres aberturas, M y N por egemplo, sea tal la tercera P que el gasto por esta abertura sea al que haria si no fuera por los diaphragmas BC, ZT, como 1 es á un número qualquiera n. Porque para cumplir con esta condicion, se sacará evidentemente la equacion $\frac{n.M.N}{\sqrt{(M^2N^2+M^2P^2+N^2P^2)}}=1$; de donde se saca $P=\frac{M.N\sqrt{(nn-1)}}{\sqrt{(M^2+N^2)}}$.

Quando son iguales las aberturas M y N, esta equacion se convierte en $P=M\times\sqrt{\left(\frac{nn-1}{2}\right)}$.

166 Acerca de lo que acabamos de decir (161 ... 165) advertiremos que los intervalos comprendidos entre los diaphragmas BC, ZT, IV no tienen lugar en las espresiones de x, y, z, Q. Así, siempre serán unas mismas dichas cantidades, sean las que fueren las posiciones de los diaphragmas, con tal no obstante que sean tales sus distancias que forme siempre el fluido al correr una masa continua en lo interior del depósito. Quando se mueve el fluido por partes separadas, y no como un solo y mismo todo, no se verifica yá la teórica precedente. La presion del ayre ambiente que obra ácia todas las direcciones, de abajo arriba en el fluido, quando sale por el orificio P, y de arriba abajo en su superficie superior, se opone á esta cesacion de

con-

continuidad; sin embargo puede verificarse en algunos casos. Volvamos, por egemplo, al supuesto de antes (163). Si suponemos que la abertura inferior *P*, aunque siempre muy pequeña, sea mucho mayor que las otras dos *M*, *N*, podrá suceder, si fuere considerable la altura *ZI* de la division *IZTV*, que la presion que de aquí resulta sobre el orificio *P*, sea mayor de lo que es menester para que al pasar el agua por *N* en virtud de la presion del agua superior que la impele, y de su adherencia con el agua inferior que procura llevarla consigo, llegue con bastante abundancia para mantener la evacuacion por *P*. En este caso la superficie del agua contenida en el espacio *IZTV* baja alguna parte como *XY*; se forma un hueco *ZXYT* que ocupa el ayre atraído por el agua superior, y la evacuacion en *P* se hace como si el depósito *IXYV* se mantuviera lleno á la altura *IX*. Lo mismo puede suceder en las separaciones superiores.

Fig.

Por lo demás, fórmense ó no huecos de agua en el depósito, siempre subsiste del mismo modo la prevencion que hicimos (163) acerca de la necesidad de precaver los atascaderos en los encañados, y las bombas. Porque el gasto por la abertura *P* no puede menos de ser muy pequeño, una vez que no sale mas agua que la que suministran las aberturas superiores.

167 Cuestion IX. *Suponiendo que el licor del vaso* ABCD *que se mantiene constantemente lleno á la altura* AB, *pase por la abertura* M *al vaso lateral* CEGF, *del qual no se puede salir sino por las aberturas* N, P; *determinar las al-* 61.

Fig. *turas correspondientes á las velocidades en* M, N, P, *y las cantidades de las evacuaciones.*

Supongamos que pasando el licor desde el vaso *ABCD* al vaso *ECFG*, esperimente en cada punto del orificio *M* una reaccion espresada por *MH*, por parte del agua contenida en el depósito *ECFG*, y de las paredes de este mismo depósito. Es evidente que si se tiran las orizontales *NV*, *HK*, las alturas correspondientes respectivamente á las velocidades en *M*, *N*, *P* serán espresadas por las verticales *DH*, *HV*, *HC*. Así, si llamamos t el tiempo de la evacuacion; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer desde la altura dada a; h, la altura *DC*; b, su parte *DV*; x, la altura *DH*; Q, la cantidad de agua que pasa por *M*; q, la que sale por *N*; q', la que sale por *P*; resultará (144) $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{t'}$, $q = \frac{2tN\sqrt{[a(b-x)]}}{t'}$, $q' = \frac{2tP\sqrt{[a(h-x)]}}{t'}$. Ademas de esto $q + q' = Q$. De estas equaciones resulta $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b-x)} + P\sqrt{(b-x)}$ que se reduce á una equacion de segundo grado, de la qual se sacará x. En conociendo x conoceremos *HV*, *HC*, Q, q, q'.

168 Las alturas *HV*, *HC* que corresponden á las velocidades en *N* y *P* son con evidencia las de las columnas que comprimirian perpendicularmente las paredes del vaso *ECFG* en los mismos parages, si se concibiese que de repente se tapáran los orificios *N* y *P*. Así, la espresion de la presion que sufre una parte *X* tomada en un parage dado de las paredes del depósito *ECFG*, quando sale el licor por las aberturas *N* y *P*, es $X \times HC$.

Su-

Supongamos, por egemplo, la abertura P infinitamente pequeña, ó $P = o$. La equacion general $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b - x)} + P\sqrt{(b - x)}$ se convertirá en $M\sqrt{x} = N\sqrt{(b - x)}$: de donde se saca $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$, y por consiguiente $CH = h - x = \frac{M^2 h + N^2 (h - b)}{M^2 + N^2}$. Luego la presion de $X = \frac{X(M^2 h + N^2 (h - b))}{M^2 + N^2}$. Fig.

Del mismo modo determinaríamos la presion en otro punto qualquiera de las paredes del depósito $ECFG$, y tambien del depósito $ABCD$. Pero siempre se debe tener presente que esta determinacion supone que son muy pequeñas las aberturas M, N, P, y que las aguas están como detenidas ó *estagnantes* en ambos depósitos. Por consiguiente no se podria usar sin equivocacion, si tuvieran las aguas una velocidad sensible en qualquiera de los dos depósitos. En adelante enseñaremos como se determina la presion con que obra el agua que se mueve por un tubo, contra las paredes del mismo tubo.

Del movimiento de las aguas que salen por aberturas, de vasos que se vacian.

169 No sucede con los depósitos que se vacían lo mismo que con los que se mantienen constantemente llenos á una misma altura. Sea la que fuere la figura y la cabida de estos últimos, la cantidad de agua que sale por una misma abertura siempre es la misma, siendo iguales todas las demás circunstancias, siendo así que la cantidad de agua que gasta un vaso que se vacia, sin recibir nueva provision de

agua,

Fig. agua, no solo pende del tamaño del orificio, sino tambien de la figura y cabida del vaso, combinadas con la altura y el tiempo. Se echa, pues, de ver que variarán las evacuaciones conforme variaren las especies de vasos de que se hiciere uso.

170 *Si un vaso qualquiera* ApqC *se vacia por el pe-*
62. *queño orificio* pq, *de forma que la superficie del agua llegue succesivamente á las posiciones* ABCD, EFGH, OQPZ *&c. las diferentes velocidades á la salida del orificio serán efecto de las alturas verticales correspondientes* Kp, Lp, Rp &c.

Porque podemos considerar el pequeño prisma fluido que cada instante sale, como arrojado por el peso absoluto de la columna que corresponde verticalmente al orificio, por ser las velocidades de las rebanadas interiores infinitamente pequeñas respecto de las del orificio (132 y 133). Lo demás de la demostracion se concluye como en lo probado (136).

171 De aquí, y de lo dicho (IV.38) resulta que si quando está en *ABCD* la superficie del agua, durára uniformemente la velocidad á la salida del orificio, andaría el licor un espacio igual á $2Kp$ en el tiempo que gastaría un cuerpo pesado para caer desde la altura Kp, y que si prosiguiera uniformemente la velocidad á la salida del orificio, quando la superficie superior está en *EFGH*, andaría el licor un espacio $= 2Lp$ en el tiempo que un cuerpo grave gastaría en caer de la altura Lp &c.

172 Cuestion I. *Determinar el tiempo que la super-*
fi-

ficie superior ABCD *del licor contenido en el mismo vaso* ApqC *que se vacia por el pequeño orificio* pq *orizontal ó vertical, gastará en bajar desde la altura vertical* KR *para llegar á la posicion* OQPZ. Fig.

Supongamos que al cabo de cierto tiempo haya llegado la superficie del licor á la posicion indeterminada *EFGH*. Tírese paralelamente al plano *EFGH*, y á una distancia infinitamente pequeña del mismo plano, el plano *efgh*. Es evidente que se puede considerar la rebanada fluida *EFGHhefg* como un prisma cuya base es *EFGH*, y la altura *Ll*, y por consiguiente la espresion de esta rebanada será $EFGH \times Ll$.

Si llamamos t el tiempo que buscamos; t', el tiempo que gastaría un cuerpo pesado en caer desde la altura dada a; K, la area del orificio pq; es evidente que si prosiguiera uniformemente la velocidad á la salida del orificio, quando la superficie del licor ha llegado á *EFGH*, saldria en el tiempo t una cantidad de licor, cuya espresion sería $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times 2K \times \sqrt{Lp}$ (144). Pero ya que en un instante la superficie *EFGH* baja la pequeña altura Ll, y yá que en este mismo instante es infinitamente pequeña la variacion de la velocidad, que por esto mismo se debe considerar como uniforme; si hacemos esta proporcion, la cantidad de licor $\frac{t\sqrt{a}}{t'} \times 2K \times \sqrt{Lp}$ es al tiempo t, como la cantidad de licor $EFGH \times Ll$ es á un quarto término $\frac{t' \times EFGH \times Ll}{2K\sqrt{a}.\sqrt{Lp}}$ que será visiblemente la espresion del tiempo elemental que gasta el licor en andar la pequeña altura Ll. Así, para sacar el tiempo total t, solo falta sumar todos estos tiempos elementales.

So-

Fig. Sobre la recta *IS* igual y paralela á *Kp*, como ege, constrúyase una parábola *SrT*, cuyo parámetro $= 4SI$. Despues de prolongadas las rectas *AC*, *EG*, *eg*, *OP* &c. hasta la parábola, de forma que *IT*, *Vu*, *mn*, *or* &c. sean las ordenadas de esta última curva, que corresponden á las secciones *ABCD*, *EFGH*, *efgh*, *OQPZ* &c. constrúyase otra curva *XaY* tal que la ordenada *XI* sea igual al cociente de la area *ABCD*, dividida por la ordenada correspondiente *IT* de la parábola: que la ordenada *Va* sea igual al cociente de la area *EFGH* dividida por la ordenada correspondiente *Vu* de la parábola, y así de las demás. Tendremos en este caso por la propiedad de la parábola, $Lp = \frac{(Vu)^2}{4IS}$ ó $\sqrt{Lp} = \frac{Vu}{2\sqrt{IS}}$; luego $\frac{EFGH}{\sqrt{Lp}} = \frac{EFGH \times 2\sqrt{IS}}{Vu} = Va \times 2\sqrt{IS}$, substituyendo en lugar de $\frac{EFGH}{Vu}$ su valor Va. Por consiguiente el tiempecillo elemental $\frac{t' \times EFGH \times Ll}{2K\sqrt{a}.\sqrt{Lp}} = \frac{t'\sqrt{IS}}{K\sqrt{a}} \times Va \times Ll$. Pero en esta espresion el factor $\frac{t'\sqrt{IS}}{K\sqrt{a}}$ es una cantidad siempre constante; el otro factor $Va \times Ll$ ó $Va \times Vm$ es el elemento de la area curvilinea *IXaV*; y como este mismo raciocinio se aplica á todos los demás elementos del tiempo que se busca, comparados con los demás elementos correspondientes de la area finita *IXco*, resulta que el tiempo t que se busca, es igual al producto de la cantidad constante $\frac{t'\sqrt{IS}}{K\sqrt{a}}$ por la area *IXco*, quiero decir, que será $t = t' \times \frac{\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{IXco}{K}$.

Para determinar la area *IXco* es menester por lo regular apelar al cálculo integral; pero ya queda reducida la resolucion de la cuestion á una dificultad de Geometría.

173 Siendo constantes las cantidades t', a, IS, K,

es

es evidente que los tiempos que gasta el licor en bajar desde Fig.
ABCD á *EFGH*, *OQPZ*, &c. son entre sí como las areas correspondientes *IXaV*, *IXco*, &c. Luego si estas areas tienen entre sí una razon dada, tendrán tambien unos con otros los tiempos de que estamos hablando la misma razon. Por donde se echa de ver que podremos hacer un *Clepsydro* ó relox de agua, si le damos al vaso tal configuracion que las areas *IxaV*, *IXco*, &c. crezcan uniformemente como el tiempo, ó sean entre sí como los números naturales 1, 2, 3, 4 &c.

174 Una vez conocida la altura *KR* que ha bajado la superficie del agua, se conoce tambien la cantidad de licor que ha salido, porque es dada la figura del vaso, y se sabe por consiguiente medir el espacio *ABCDZOQP* que ocupaba el licor. Pero como ya hemos enseñado como se halla el tiempo que gasta la superficie del licor para bajar la altura *KR*, resulta que siempre se puede hallar la cantidad de licor que sale de un vaso por una abertura dada, en un tiempo que se puede determinar por la figura del vaso, y por la altura que baja la superficie del agua.

175 Cuestion II. *Suponiendo el vaso* ApqC *engendrado por la revolucion de la curva parabólica* AOpK, *de tal naturaleza que los quadrados de las ordenadas* AK, EL, OR, *&c. son proporcionales á las raices quadradas de las abscisas correspondientes* pK, pL, pR, *&c. hallar el tiempo de la evacuacion correspondiente á la altura* KR.

Una vez que los círculos elementales *ABCD*, *EFGH*, *OQPZ*, &c. de que se compone el sólido *ApqC*, son entre

sí

Fig. sí como los quadrados de sus radios AK, EL, OR, &c. y una vez que, por el supuesto, $(AK)^2 : (EL)^2 : (OR)^2$: &c. :: $\sqrt{pK} : \sqrt{pL} : \sqrt{pR}$: &c. es evidente que tendremos $\frac{ABCD}{IT} = \frac{EFGH}{Vu} = \frac{OQPZ}{or}$ &c. Pero, por la construccion general (172), $IX = \frac{ABCD}{IT}$, $Va = \frac{EFGH}{Vu}$, $oc = \frac{OQPZ}{or}$, &c. Luego $IX = Va = oc$ &c. Así, XY se convierte en una linea recta vertical; y el tiempo t que se busca está cifrado en la equacion $t = t' \times \frac{\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{IX \times Io}{K}$.

176 Luego 1.° siendo siempre uno mismo el producto $t' \times \frac{\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{IX}{K}$, se echa de ver que los diferentes tiempos que se gastan en andar las alturas KL, KR, &c. son proporcionales á dichas alturas, y por consiguiente, que si se quiere, por egemplo, que las partes KL, LR, &c. sean andadas en tiempos iguales, es menester que sean iguales entre sí dichas partes.

177 2.° La cantidad de licor que sale mientras que la superficie baja desde $ABCD$ á $OPQZ$, es igual al sólido del trozo $AOPC$. Pero por ser los elementos $ABCD$, $EFGH$, $OQPZ$ &c. de dicho sólido proporcionales á las ordenadas correspondientes IT, Vu, or &c. de la parábola SrT, es evidente que el sólido del trozo $AOPC = \frac{2}{3} ABCD \times pK - \frac{2}{3} OQPZ \times pR$. Luego se conoce la cantidad de agua que sale en el tiempo t.

63. 178 Cuestion III. *Supongamos un vaso prismático* AMNC; *se pregunta ¿qué tiempo gastará la superficie del licor en bajar desde* ABCD *á* OQPZ?

Concibamos que un cuerpo no pesado sea impelido de aba-

abajo arriba en la direccion de la vertical pK por una fuerza Fig.
aceleratriz constante que le comunica los mismos grados de velocidad que dá la pesantez á un cuerpo que cae libremente; de forma que el cuerpo que sube corra el espacio pK segun la misma ley, y en el mismo tiempo que correría el espacio Kp el cuerpo que baja en virtud de la pesantez. Es evidente que por ser las diferentes velocidades del cuerpo *ascendiente* proporcionales á las raices quadradas de los espacios andados correspondientes, del mismo modo que las del cuerpo descendiente, los podrán representar las ordenadas de la parábola SrT. Supongamos que despues de llegado á l el cuerpo ascendiente, corra el pequeño espacio lL ó mV en un tiempo infinitamente pequeño, con la velocidad que representa la ordenada correspondiente Vu de la parábola. Para hallar la espresion de este tiempo elemental, se considerará que el tiempo total gastado en correr el espacio pK es igual á $\frac{t\sqrt{IS}}{\sqrt{a}}$ (IV. 50), y que si durára uniformemente la velocidad final del cuerpo ascendiente, correría este cuerpo, en el mismo tiempo $\frac{t\sqrt{IS}}{\sqrt{a}}$, un espacio igual á $2IS$ ó á IT (IV. 38). Pero, segun hemos visto en la Dynámica (IV. 21), los tiempos gastados en correr los espacios IT, mV deben ser entre sí como estos espacios divididos por las velocidades correspondientes IT, Vu. Así, el tiempecillo que gasta el cuerpo ascendiente en correr el espacio mV es representado por $\frac{t\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{Vm}{Vu}$. Comparando este tiempecillo con el tiempecillo $\frac{t\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{Va \times Vm}{K}$ que gasta la superficie $EFGH$ del agua en correr el mismo es-

Fig. espacio Vm (172), y considerando que $Va = \frac{ABCD}{Vu}$, por construccion; echaremos de ver que el primero tiene con el segundo la razon constante de la area K del orificio á la area $ABCD$ de la base del vaso prismático. Como hay esta misma razon entre los demás tiempos elementales que gastan el cuerpo ascendiente y la superficie del agua en correr unos espacitos iguales, se inferirá que el tiempo total que gasta el cuerpo ascendiente en correr la altura pK ó SI, es al tiempo total que tarda el vaso en vaciarse, como la area K es á la area $ABCD$. Luego si llamamos A la area $ABCD$, $\frac{t'\sqrt{IS}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$ representará el tiempo que tarda el vaso $AMNC$ en vaciarse enteramente.

Si consideramos que $OMNP$ sea el vaso propuesto, demostraremos del mismo modo que el tiempo que gasta dicho vaso en vaciarse enteramente, está cifrado en $\frac{t'\sqrt{oS}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$.

Ahora bien, el tiempo que gasta la superficie del agua en bajar desde $ABCD$ á $OQPZ$ es evidentemente igual á la diferencia de los dos tiempos de que acabamos de hablar. Así, la equacion $t = \frac{t'A(\sqrt{IS} - \sqrt{oS})}{K\sqrt{a}}$ que (haciendo $IS = h$, oS ó $NP = b$) se reduce á $t = \frac{t'A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$, dará el tiempo t que buscamos. Síguense de aquí varias consecuencias.

1.° De las siete cantidades t', a, t, A, K, h, b que incluye esta fórmula, hay dos constantes; es á saber t' y a, y las otras cinco t, A, K, h, b pueden ser indetermina-

das;

das; y conociendo quatro qualesquiera de estas últimas, se hallará el valor de la quinta. De aquí se deriva la resolucion de cuestiones análogas á las que resolvimos por lo dicho (143). Fig.

Si quisiéramos conocer, por egemplo, la altura $h - b$ que baja la superficie del agua, siendo dado todo lo demás, miraríamos b como la incógnita, y hallaríamos primero $b = \left(\sqrt{h} - \frac{tK\sqrt{a}}{t'A}\right)^2$, y luego $h - b = \frac{2tt'AK\sqrt{ah} - t^2K^2a}{t'^2A^2}$. Multiplicando esta cantidad por A, sacaríamos la cantidad de agua que sale en el tiempo t.

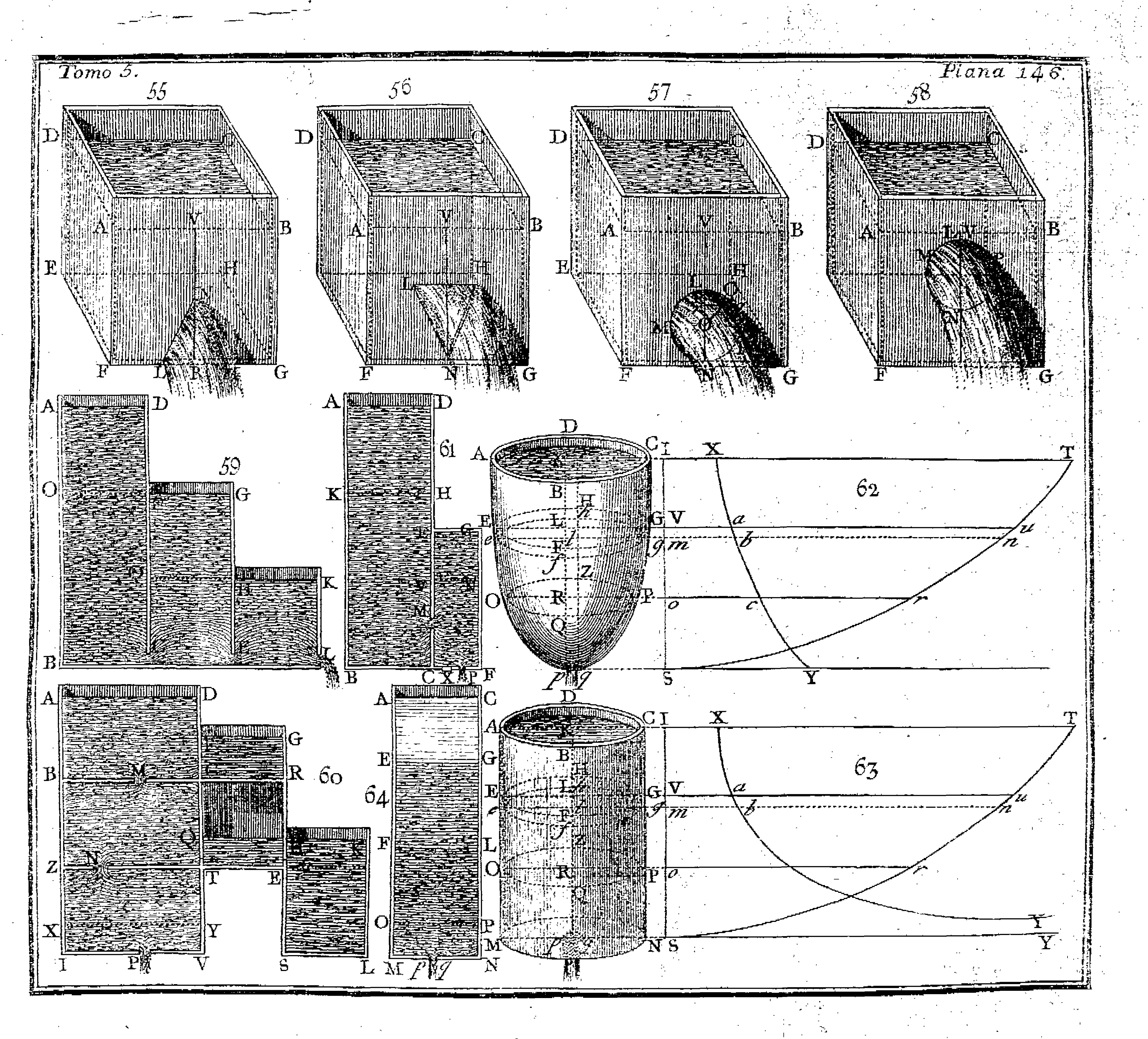
180 2.° La misma fórmula $t = \frac{t'A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$ suministra un modo de construir un clepsydro cilíndrico. Si queremos dividir, por egemplo, la altura *CN* del vaso *AMNC* en doce partes que sean andadas por la superficie del fluido en tiempos iguales, representaremos *CN* por 144 quadrado de 12; de estas 144 partes iguales que componen *CN*, restaremos 121, quadrado de 11, y la resta 23 dará á conocer la primera parte *CG* que buscamos; de 121 restaremos 100, quadrado de 10, la resta 21 será la segunda parte que se busca; de 100 se restará 81, quadrado de 9, y la resta 19 dará á conocer la tercera parte &c. Por donde se deja entender que la serie de los números 23, 21, 19, 17, 15 &c. espresa las partes sucesivas de la altura que se pide.

Por lo que mira á la medida exacta del tiempo que se gasta en correr cada parte de la altura *CN*, se determinará por nuestra fórmula. Así, si queremos que este

Fig. tiempo $=$ 1 hora, haremos $t = 1$ hora, y deberemos proporcionar de tal modo la base A, y la altura h del vaso con la area K del orificio, que sea 1 hora $= \frac{t'A(\sqrt{h} - \sqrt{\frac{121}{144}h})}{K\sqrt{a}}$, ó 1 hora $= \frac{t'A\sqrt{h}}{12K\sqrt{a}}$. Manifiesta esta equacion como dadas dos de las tres cantidades A, h, K, se hallará la tercera.

181 3.º Si fuere $AMNC$ un vaso prismático lleno hasta $ABCD$; dégesele vaciar enteramente, y volviéndole á llenar hasta $ABCD$, manténgasele constantemente lleno á dicha altura, mientras sale el agua por el orificio pq; en este segundo caso saldrá una cantidad de agua dupla de la que cabe en el espacio $AMNC$, en el mismo intervalo de tiempo que gastó primero el vaso en vaciarse enteramente. Porque en el primer caso el tiempo que gasta el vaso en vaciarse enteramente, es representado por $\frac{t'A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$ (178). Pero (144) la cantidad de licor que sale en el segundo caso, en el tiempo $\frac{t'A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$, es representado por $\frac{t'A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}} \times \frac{2K\sqrt{ah}}{t'} = 2A.h$, cuya cantidad es dupla del prisma $AMNC$ igual á $A.h$.

182 4.º Quando se quisieren comparar unos con otros los tiempos de las evacuaciones de dos vasos prismáticos que se vacian; se observará que si conservamos para el primero las denominaciones de antes (178), y señalamos en el segundo las cantidades análogas á t, A, K, h, b con las mismas letras con acentos, sacaremos las dos equaciones $t = \frac{t'A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$, $t'' = \frac{t'A'(\sqrt{h'} - \sqrt{b'})}{K'\sqrt{a}}$, que dán la proporcion $t : t'' :: \frac{A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K} : \frac{A'(\sqrt{h'} - \sqrt{b'})}{K'}$, que está diciendo



do que los tiempos que gastan las superficies de las aguas Fig. en correr las alturas $b - b$, $b' - b'$, tienen entre sí la razon de los productos de las bases de los prismas por las diferencias de las raices quadradas de las alturas primeras y últimas de las aguas en los depósitos, divididos por las areas de los orificios.

183 5.° Por los mismos principios se puede determinar con facilidad la evacuacion de un vaso que contie- 64. ne fluidos de diferentes especies. Sea, por egemplo, $AMNC$ un vaso prismático que contiene diferentes fluidos $MNLF$, $FLGE$, $EGCA$, que suponemos no poderse mezclar unos con otros, por estar los mas ligeros encima de los mas pesados. Supongamos tambien que vaciándose dicho vaso por el orificio pq, llegue á ponerse al cabo de cierto tiempo la superficie FL del fluido inferior á la posicion OP. Si llamamos p, p', p'' respectivamente las pesanteces específicas de los fluidos $MNLF$, $FLGE$, $EGCA$; la presion que causa la evacuacion por el orificio pq, es la misma que sería (31), si en lugar del fluido $FLGE$ se substituyera una columna de la misma especie que $MNLF$, y cuya altura fuese $GL \times \frac{p'}{p}$; y si en lugar del fluido $EGCA$ se substituyese una columna de la misma especie que $MNLF$, y cuya altura fuese $GC \times \frac{p''}{p}$. Luego si hacemos $NL = c$, $LG = f$, $GC = g$, y guardamos todas las demás denominaciones de antes (178), todo estará en substituir $c + \frac{fp'}{p} + \frac{gp''}{p}$ en lugar de b en la espresion que hallamos del tiempo; de donde resultará $t = \frac{t'A(\sqrt{[pc + fp' + gp'']} - \sqrt{pb})}{K\sqrt{a}.\sqrt{p}}$. Se echa de ver que quando ha sali-

Fig. do enteramente el fluido $MNLF$, y le ha sucedido en la evacuacion el segundo, la espresion del tiempo es $t = \frac{t'A(\sqrt{[fp'+gp'']}-\sqrt{p'b})}{K\sqrt{a}.\sqrt{p'}}$. Y quando ha salido enteramente el segundo fluido para dar lugar á la evacuacion del último, la espresion del tiempo es $t = \frac{t'A(\sqrt{g}-\sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$.

Del mismo modo discurriremos si fuese mayor el número de los fluidos.

184 Cuestion IV. *Supongamos que el vaso* ASODHPVC
65. *compuesto de los dos vasos prismáticos* ASVC, ODHP, *se vacie por el pequeño orificio* pq *hecho en el suelo* DH; *se pregunta ¿qué tiempo gastará la superficie del fluido en bajar una altura propuesta?*

Despues de prolongadas las AS, CV hasta que encuentren DH prolongada tambien por ambos lados, se reparará que por ser muy pequeña la abertura pq, la velocidad del fluido en p es la misma que si saliera del vaso simple $AMNC$; y que á cada instante es efecto de la altura de la superficie del fluido mas arriba de pq. Así, si llamamos A la area de la base del primer vaso $ASVC$; K, la del orificio; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer de la altura a, hallaremos (178)

1.° Que el tiempo que gasta el fluido en bajar desde AC á EG, en el primer vaso $ASVC$, es representado generalmente por $\frac{t'A(\sqrt{AM}-\sqrt{EM})}{K\sqrt{a}}$, y el tiempo que gasta en bajar desde AC á SV es espresado por $\frac{t'A(\sqrt{AM}-\sqrt{SM})}{K\sqrt{a}}$.

2.° Quando ha llegado al segundo vaso $ODHP$ la superficie del fluido, se halla (llamando B la area de la base

de

de dicho vaso) que el tiempo que gasta la espresada superficie en llegar desde *OP* á *QZ*, es representado por $\frac{t'B(\sqrt{OD}-\sqrt{QD})}{K\sqrt{a}}$. Fig.

Añadiendo este tiempo al que se ha gastado en correr *AS*, resultará el tiempo que la superficie del agua gasta en llegar desde *AC* á *QZ*, cuya espresion es por consiguiente $\frac{t'A(\sqrt{AM}-\sqrt{SM})+t'B(\sqrt{OD}-\sqrt{QD})}{K\sqrt{a}}$.

185 Hemos supuesto muy pequeño el orificio *pq* con la mira de poder considerar el fluido al salir de dicho orificio (170), como impelido á cada instante del peso absoluto de la columna correspondiente, y para poder inferir de aquí que la velocidad es efecto de toda la altura del fluido mas arriba del agugero. Sin embargo, la esperiencia enseña que mientras se mantiene el fluido á cierta altura sobre *SV* en el vaso superior *ASVC*, la velocidad en *p* proviene, sensiblemente por lo menos, de la altura entera del fluido sobre *pq*, aun quando vá creciendo *pq* hasta llegar á ser igual con el fondo *DH*, con tal sin embargo que sea delgado el tubo *ODHP* respecto del vaso superior *ASVC*, y que además de esto no sea muy largo. Pero en este caso no es la presion del fluido superior la que produce toda esta velocidad; parte de ella es efecto del movimiento libre y finito que han adquirido las partículas al bajar. Se puede, pues, determinar tambien en este caso el tiempo que gasta la superficie del fluido en bajar en el vaso *ASVC*, una altura propuesta, por medio de la fórmula del artículo precedente (184 1.°). Quando ha llegado

Fig. el fluido al vaso *ODHP*, y es el orificio $pq = DH$, la masa del agua *ODHP* cae toda de una vez del mismo modo que los cuerpos pesados. Si se quisiera averiguar el tiempo que gastará en salirse toda, se hallaría, representando por *XO* la altura correspondiente á su velocidad inicial, que dicho tiempo es igual al exceso del tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer de la altura *XD* respecto del que gastaría en caer de la altura *XO*.

186 Cuestion V. *Declarar en general el modo de hallar la espresion del tiempo* t *que gasta un vaso en vaciarse por una abertura lateral de estension sensible.*

Despues de suponer que la superficie del fluido haya bajado una altura indeterminada, buscaremos por lo dicho (148), quanto licor saldría en el tiempo t, si subsistiese siempre en esta misma posicion la superficie del agua. La cantidad de que vamos hablando siempre tiene esta forma $F \times t$, siendo F una funcion dada del orificio y de la altura actual de la superficie del agua mas arriba de un punto *dado* del mismo orificio. Supondremos despues que la superficie del agua baja, en el elemento del tiempo, una altura infinitamente pequeña, de suerte que salga una cantidad de agua igual al producto de la superficie del fluido por la alturita que ha bajado. Si llamamos q esta cantidad elemental de agua; es evidente que tendremos la proporcion $F \times t : t :: q$ al elemento del tiempo, cuya espresion será por lo mismo $\frac{q}{F}$. En esta espresion siempre se podrá conseguir que no haya sino funciones del orificio y de la al-

altura variable del fluido, una vez que es dada la figura del vaso. Fig.

Nos contentaremos con haber indicado aquí está resolucion general sin aplicarla á casos particulares, porque son muy pocos los que se pueden resolver sin el auxilio del cálculo integral. En la práctica se puede determinar por lo regular la evacuacion, sin recelo de error sustancial, como si fuese orizontal el orificio, y como si la altura del fluido fuese la que corresponde al centro de gravedad del mismo orificio.

187 Cuestion VI. *Supongamos que desde un vaso qualquiera* ISTL *que se mantiene constantemente lleno á la altura* TL, *pase el agua al vaso prismático* AMNC *por medio del tubito orizontal* TM; *se pregunta ¿qué tiempo gastará la superficie del agua en el vaso* AMNC *para llegar á una posicion qualquiera* EG? 66.

Es evidente (136) que quando se abre el orificio *M* para introducir el agua en el vaso *AMNC*, se abalanza con una velocidad correspondiente á la altura *TL* ó á *AM*. Esta velocidad subsistiría continuamente si pudiera salirse el agua, y no se quedára en el vaso *AMNC*. Pero despues que ha entrado en él cierta cantidad *MRSN*, la pequeña masa que cada instante pasa por *M*, y vá á chocar con la masa finita *MRSN*, pierde en este choque su velocidad primitiva, y de aquí no puede resultar movimiento alguno reparable en el fluido *MRSN*. Sube, pues, en este caso la superficie *RS* con la misma ley que si la velo-

Fig. cidad en *M* fuera simplemente efecto, cada instante, de la altura *LX* que es el exceso que lleva la altura total *LT* á la altura *RM*; porque las aguas *ZXTS*, *RSNM* que están á una misma altura, y se comunican unas con otras por el orificio *M*, se han de mirar como que forman equilibrio unas con otras (20).

Sentado esto, la cuestíon se resuelve del mismo modo que la de antes (178). Porque si consideramos como dada la altura *AR*, y como si fuera la del vaso prismático *ARSC* que recibe el agua por el orificio *M*; y llamamos despues *A* la base *ABCD*; *M*, la area del orificio *M*; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer de la altura dada a; t, el tiempo que gasta la superficie del agua en llegar desde *RS* á *EG*; sacaremos $t = \frac{t'A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}$.

Con efecto, la velocidad con que sube el agua en el vaso *ARSC*, es de todo punto la misma que sería en los mismos parages, la de un fluido *ARSC*, el qual concibiéndole impelido de la accion de una fuerza igual á la pesantez, pero dirigida de abajo arriba, saliese por un orificio hecho en el fondo superior *AC*, é igual á *M*. Pero se viene á los ojos (178) que en este último caso la equacion precedente dá á conocer el tiempo que gasta la superficie del fluido en llegar desde *RS* á *EG*. Luego esta misma equacion espresa tambien el tiempo que se busca en el supuesto de la cuestion.

188 De aquí se saca una consecuencia análoga á la de antes (181). En el tiempo que gasta el vaso *ARSC*

en

en llenarse del todo, saldria por el orificio *M*, de un vaso que se mantuviera constantemente lleno á la altura *AR* respecto de dicho orificio, una cantidad dupla de *ARSC*; esto viene á ser lo mismo que si digéramos, *que el tiempo que el vaso* ARSC *gasta en llenarse en el supuesto de la cuestion, es duplo del que gastaría un vaso que se mantiene constantemente lleno á la altura* AR *mas arriba del orificio* M, *en echar por este mismo orificio la cantidad de agua* ARSC. Fig.

189 Es de advertir que no puede ser mucha la diferencia entre la altura *AR* que hemos considerado como conocida, y la altura *AM*. Será facil de valuarla al poco mas ó menos en cada caso particular, atendiendo á la estension del suelo *MN*. Quando se quisiere determinar el tiempo total que gasta el agua en llegar desde *M* á *E*, se podrá conseguir, sin recelo de error sustancial, del modo siguiente. Dándole á *MR* un corto número *conocido* de pulgadas, 1.º se buscará (146) el tiempo que gasta la cantidad de agua *RMNS* en salir por el orificio *M*, suponiendo que es constantemente *LT* la altura del fluido mas arriba del orificio; 2.º se buscará por la fórmula precedente el tiempo que gasta el agua en llegar desde *R* á *E*. Juntando uno con otro estos dos tiempos, la suma será el tiempo que se pide, á lo menos con muy corta diferencia.

190 Cuestion VII. *Estando metido verticalmente el vaso cilíndrico* VMNT, *en cuyo fondo* MN *hay un agugerito* K, *en un fluido indefinito, cuya superficie por lo* 67.

mis-

Fig. *mismo, ni sube, ni baja; hallar el tiempo que gasta la superficie del agua en el cilindro en llegar á* EG.

Esta cuestion es cabalmente de la misma especie que la precedente; y si suponemos que habiendo llegado á RS la superficie del agua en el cilindro, no haya choque sensible del fluido que entra por K, con el fluido $RMNS$, ó que no tiene mas causa la velocidad en K, á cada instante, que la altura AR que es el exceso que lleva la del fluido ambiente á la del fluido contenido en el cilindro; sacaremos la equacion $t = \frac{t'A(\sqrt{AR} - \sqrt{AE})}{K\sqrt{a}}$, en la qual A es la base del cilindro; K, la area del orificio; t, el tiempo que gasta el agua en llegar desde R á E; t', el tiempo que gasta un cuerpo grave en caer de la altura a.

191 Si suponemos infinitamente pequeño el orificio K, se viene á los ojos que la superficie del agua en el cilindro no debe subir mas arriba de AC, por desvanecerse la velocidad en K, y con mas razon la de la superficie EG, quando se desvanece la altura AE. Pero no sucedería lo mismo si tuviera la abertura K una razon sensible con la area del fondo MN. Porque en este caso no puede destruir la pesantez sino al cabo de cierto tiempo, el movimiento primitivo que el fluido ambiente comunica al que entra por el orificio K; y como la presion que proviene de la altura AE, obra además de esto para que suba la masa de agua $EMNG$: se echa de ver que la superficie de dicha agua debe subir mas arriba de AC, para bajar despues quando está aniquilado todo el movimiento ascensional. En este caso es dificul-

cultosísimo de determinar el movimiento del fluido rigurosa y Fig.
no hypotéticamente. Esta misma advertencia se puede aplicar, con alguna leve alteracion, á lo dicho (187).

192 Cuestion VIII. *Suponiendo lleno hasta* VT *el mismo cilindro* VMNT, *y que se vacie por la abertura* K *en el fluido ambiente; se pregunta ¿qué tiempo gastará la superficie* VT *en bajar á* OL.

Es evidente que el exceso que la altura del fluido en el cilindro lleva á la del fluido ambiente, produce el movimiento descensional en el cilindro, y que por consiguiente la equacion $t = \frac{t'A(\sqrt{VA} - \sqrt{OA})}{K\sqrt{a}}$ dá el tiempo que se busca.

Si se supone infinitamente pequeño el orificio *K*, la superficie *OL* no puede bajar mas abajo de *AC*. Si tuviera este orificio una razon sensible con el suelo *MN*, bajaría mas abajo de *AC*; pero no nos detendremos en considerar este caso.

193 Cuestion IX. *En el supuesto de que el vaso prismático* ACKB *que se comunica con el tubo* KL, *el qual no tiene mas abertura que* D, *esté dividido por muchos diafragmas* EF, OP, VH, *en los quales se han hecho los agugeritos* G, M, N; *se pregunta ¿qué ley seguirá dicho vaso al desocuparse por el pequeño orificio* D? 68.

1.° Figuremonos que sea *TB* la altura primitiva del fluido en el vaso *ACKB*; y que al cabo de cierto tiempo llegue á *ab* la superficie de dicha agua. Por lo dicho (161) se hallará que en la primera posicion, la altura correspondiente á la velocidad en *D* es

TB

Fig. $TB \times \frac{G^2M^2N^2}{G^2M^2N^2+D^2M^2N^2+D^2G^2N^2+D^2G^2M^2}$;
y en la segunda, la altura correspondiente á la velocidad en D es $Tb \times \frac{G^2M^2N^2}{G^2M^2N^2+D^2M^2N^2+D^2G^2N^2+D^2G^2M^2}$.

Estas espresiones manifiestan que en todo lo que coge el espacio BF, se sale el fluido por el órificio D del mismo modo que si fuera un vaso prismático de la misma base que el precedente, en cuyo fondo hubiese una abertura igual á D, y en el qual la altura variable del fluido mas arriba del fondo fuese la que acabamos de decir. Así, el tiempo de la evacuacion que corresponde á BF, se determinará por lo dicho (178.).

2.º Quando llega á EF la superficie del fluido, el movimiento es el mismo que si no estuviera el diafragma EF; ó, lo que es lo propio, como si el orificio G fuera infinito respecto de los demás M, N, D. Si hacemos, pues, $G = \infty$, hallaremos que quando está en EF la superficie del agua, la altura correspondiente á la velocidad en D es $TF \times \frac{M^2N^2}{M^2N^2+D^2N^2+D^2M^2}$, y que estando la superficie en la posicion indeterminada ef, la altura correspondiente á la velocidad en D, es $Tf \times \frac{M^2N^2}{M^2N^2+D^2N^2+D^2M^2}$. Por donde se echa de ver tambien, como poco ha, que el tiempo de la evacuacion que corresponde á FP, se determinará en virtud de lo dicho (178).

3.º Igualmente, quando la superficie del agua estuviere en OP, deberemos hacer $M = \infty$, y se sacará, tambien por lo dicho (178), el tiempo de la evacuacion que corresponde á PH. Se proseguirá á este tenor res-

pec-

pecto de quantos diafragmas se quisieren. Sumando despues unos con otros todos estos tiempos parciales, se averiguará el tiempo total que gasta la superficie del agua en bajarse una altura propuesta. Síguese de aquí Fig.

194 1.° Por las espresiones de las alturas correspondientes á las diferentes velocidades del fluido en *D* se echa de ver que segun vá bajando la superficie del agua desde *B* á *F*, vá menguando la velocidad en *D* hasta que llegue á *F* la superficie; que entonces crece la velocidad, y despues vá menguando hasta que la superficie llegue á *P*; que entonces crece, y luego mengua hasta que la superficie llegue á *H*; que entonces crece y vuelve á menguar á medida que prosigue bajando la superficie; y lo mismo sucedería si fuera mayor el número de diafragmas y orificios. Las distancias de los diafragmas se pueden arreglar de tal forma que el surtidor por el orificio *D* varie una cantidad dada á medida que el fluido pasa desde una separacion del depósito á otra. Con efecto, supongamos, por egemplo, que sean iguales todas las aberturas *G*, *M*, *N*, *D*; y si queremos que sean iguales las velocidades en *D*, quando la superficie del fluido está succesivamente en *B*, *F*, *P*, *H*: igualemos unas con otras las alturas correspondientes á dichas velocidades; sacaremos $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2} = TH \times 1$; y por consiguiente $TH = HP = PF = FB$. Y porque las alturas *TB*, *TF*, *TP*, *TH* forman una progresion arismética decreciente, cuya razon es *TH*, se echa de ver que la velocidad en *D* será constantemente efecto de la altura

ra

Fig. ra *TH*, quando la superficie del fluido estuviere en *B*, *F*, *P*, *H*.

195 2.° Esta doctrina es facil de aplicar al supues-
69. to de que el depósito contenga fluidos diferentes. Porque sea un vaso igual al que representa la figura citada antes (193), y para mayor brevedad supongamos que no tiene mas de dos diafragmas *EF*, *OP*, con las pequeñas aberturas *M*, *N*, *D*, y que las tres separaciones *AEFB*, *EOPF*, *OCKLP* contengan tres fluidos de diferentes especies. Supongamos que en el primer instante que la superficie del fluido superior está en *AB*, la velocidad de dicho fluido en *M*, sea efecto de la altura *BS* análoga á *BF*; la velocidad del fluido *EOPF* en *N*, sea efecto de la altura *SV* análoga á *FP*; la velocidad del fluido *OCKLP* en *D*, sea efecto de la altura *TV* análoga á *TP*. Llamaremos x la altura *BS*; y, la altura *SV*; z, la altura *VT*; t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer de la altura dada a; Q, cada uno de los volúmenes iguales de licor, que pasan por cada una de las tres aberturas *M*, *N*, *D* en un mismo tiempo t, que supondremos infinitamente pequeño, para que no se baje, por lo menos sensiblemente, la superficie *AB*; sacaremos primero (144)

Para el gasto de la abertura *M*, $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{t'}$;

Para el gasto de la abertura *N*, $Q = \frac{2tN\sqrt{ay}}{t}$;

Para el gasto de la abertura *D*, $Q = \frac{2tD\sqrt{az}}{t'}$.

De estas equaciones se saca $\frac{M^2x}{N^2} = y$, $\frac{M^2x}{D^2} = z$.

Sentado esto, si hacemos ahora la pesantez específica

del

del fluido $AEFB = p$, la del fluido $EOPF = p'$, la del fluido $OCKLP = p''$, $BF = b$, $FP = c$, $PT = f$; y tenemos presente que cada una de las alturas BS y BF, SV y FP, VT y PT que corresponden de dos en dos no mas á un mismo fluido, se debe multiplicar (IV.48) por la pesantez específica del fluido correspondiente, para que se puedan reducir á una misma unidad de medida; tendremos $x \times p + y \times p' + z \times p'' = p \times b + p' \times c + p'' \times f$. Comparando esta equacion con las precedentes, hallaremos Fig.

$$x = \frac{N^2 D^2 (pb + p'c + p''f)}{pN^2 D^2 + p'M^2 D^2 + p''M^2 N^2},$$

$$y = \frac{M^2 D^2 (pb + p'c + p''f)}{pN^2 D^2 + p'M^2 D^2 + p''M^2 N^2},$$

$$z = \frac{M^2 N^2 (pb + p'c + p''f)}{pN^2 D^2 + p'M^2 D^2 + p''M^2 N^2}.$$

Una vez determinadas de este modo las alturas correspondientes, en el primer instante, á las velocidades en M, N, D, supongamos que despues de cierto tiempo se haya bajado á ab la superficie del fluido superior, y que de resultas de esto haya bajado á ef la superficie del segundo, y la del tercero á op. Es evidente que siempre será $bf = BF$, $fp = FP$; y que solo es variable la altura Tp del último fluido. Así, si llamamos k la altura Tp, hallaremos, por el mismo método, que para dicha posicion qualquiera de los tres fluidos, la altura correspondiente á la velocidad en M $= \frac{N^2 D^2 (pb + p'c + p''k)}{pN^2 D^2 + p'M^2 D^2 + p''M^2 N^2}$; la altura correspondiente á la velocidad en $N = \frac{M^2 D^2 (pb + p'c + p''k)}{pN^2 D^2 + p'M^2 D^2 + p''M^2 N^2}$; la altura correspondiente á la velocidad en $D = \frac{M^2 N^2 (pb + p'c + p''k)}{pN^2 D^2 + p'M^2 D^2 + p''M^2 N^2}$.

3.°

Fig. 196 3.º Para hacer una aplicacion muy sencilla de lo que acabamos de decir, supongamos que no haya mas de dos fluidos, ó que estén aniquilados el fluido superior *AEFB*, y el diafragma *EF*; que *OCKLP* sea agua, y *EOPF* ayre. Sacaremos primero $b = 0$, $M = \infty$, $\frac{p'}{p''} = \frac{1}{850}$. Debemos además de esto hacer $c = 0$, por hacerse equilibrio (55) las presiones con que el ayre exterior obra en *N* y *D*. Luego la espresion de la altura correspondiente á la velocidad del ayre quando pasa por *N*, es $k \times \frac{D^2 \times 850}{D^2 + 850 N^2}$; y la de la altura correspondiente á la velocidad del agua al salir del orificio *D* es $k \times \frac{N^2 \times 850}{D^2 + 850 N^2}$. Quando la abertura *D* es infinitamente pequeña respecto de la abertura *N*, la primera altura es nula, y la segunda es k, y así debe ser. Si son iguales las dos aberturas *N*, *D*, son tambien iguales las velocidades del ayre en *N*, y del agua en *D*, y la espresion de cada una de las alturas que les corresponden es $\frac{850}{851} k$, &c.

En virtud de esta doctrina podemos formar juicio cabal de la velocidad con que sale el vino de un tonel, por un agugero hecho en el uno de sus suelos, quando es muy pequeña la abertura hecha en la pared superior, con la mira de que por ella se introduzca el ayre en el tonel.

Del movimiento de las aguas quando salen por la abertura de un vaso mobil.

197 Las cuestiones que vamos á resolver tienen uso en la práctica. Por egemplo, si un cubo lleno de agua sube

be ó baja con un movimiento que no sea uniforme, y se Fig.
quiere conocer la presion con que obra el fluido en cada punto de las paredes, ó del fondo, ó, lo que es lo mismo, qué altura corresponderia á la velocidad del fluido si saliese por una aberturita hecha en qualquier parage del vaso; si se quisiera tambien determinar la posicion que debe tomar una masa fluida en un vaso que se mueve por un plano con un movimiento acelerado ó retardado, y la presion que de aquí resulta en un punto qualquiera del vaso &c: para resolver todas estas cuestiones, se necesitan otros principios distintos de los precedentes, y son los que vamos á sentar.

198 Cuestion I. *Supongamos que el peso* R *tire verticalmente del vaso* ACDB *que se mantiene constantemente* 70.
lleno hasta AB, *por medio de una cuerdecita* HMNR *no pesada, que pasa por las dos poleas* M *y* N; *se pregunta ¿con qué presion obrará el fluido en la parte* pq *infinitamente pequeña del fondo?*

Llamemos P la suma de las masas del vaso $ACDB$, y del agua que contiene; y sea G el centro de gravedad de la masa total. Supongamos que si estuvieran abandonados los dos cuerpos R y P al impulso libre de la gravedad, hubiesen andado en un instante los espacitos iguales Rt, Gx; pero que por razon de la reaccion con que obran uno en otro, el cuerpo R ande Rr, y el cuerpo P ande Gy. Si llamamos g la gravedad natural Gx ó Rt; f, la fuerza aceleratriz simple Gy ó Rr, sacaremos (IV. 574) la equacion

Fig. $R(g-f) = P(g+f)$; de donde se saca $f = \frac{g(R-P)}{R+P}$. Así, los dos cuerpos R y P se mueven, bajando el uno, y subiendo el otro, con un movimiento uniformemente acelerado, por haber entre la fuerza aceleratriz f y la gravedad g la razon constante de $R-P$ á $R+P$. Ahora bien, si representa xy ó $g+f$ ó $\frac{2gR}{R+P}$ la fuerza que impele de abajo arriba cada partícula de la masa P, es evidente que subsistiría en equilibrio el systema de todas estas partículas, si se le comunicára un movimiento igual y contrario. Pero en este último caso, en virtud de la fuerza $\frac{2gR}{R+P}$ que obra verticalmente de arriba abajo en cada partícula del fluido, debe resultar en uno qualquiera de los puntos del fondo, ó de las paredes una presion que es á la presion que aguantaría el mismo punto, si el fluido no recibiera mas impulso que el de la pesantez, como $\frac{2gR}{R+P}$ es á g, ó como $2R$ es á $R+P$. Así, una vez que en virtud de la pesantez es $p' \times pq \times bq$, la espresion de la presion que aguanta la area pq (24), siendo p' la gravedad específica del fluido, se sigue que, en el supuesto de la cuestion, $p' \times pq \times bq \times \frac{2R}{R+P}$ espresa la presion que sufre la area pq.

199 Luego 1.° Si el fluido sale por la aberturita pq, su velocidad será efecto de la altura $bq \times \frac{2R}{R+P}$; y para determinar la cantidad de licor que sale en un tiempo determinado, basta substituir en lo dicho (143) $b \times \frac{2R}{R+P}$ en lugar de b, conservando todas las demás denominaciones. Luego la equacion $Q = \frac{2tK}{t'} \sqrt{\left(\frac{2ahR}{R+P}\right)}$ dá el valor de la cantidad propuesta.

Quan-

Quando no se mantiene constantemente lleno el vaso, cuesta mas dificultad determinar la evacuacion, porque el peso P y la altura del fluido en el vaso son entonces variables. Fig.

200 2.° Está diciendo la equacion $f = \frac{g(R-P)}{R+P}$ que si $R = P$, será $f = 0$, $\frac{2R}{R+P} = 1$. En este caso está el vaso en reposo, y la evacuacion sucede puntualmente del mismo modo que en la cuestion que resolvimos en otro lugar (143). Lo mismo se verificaría si se moviese verticalmente el vaso *ACDB* con un movimiento uniforme.

Si $R = 0$, será $\frac{2R}{R+P} = 0$. La presion del fluido en pq se desvanecerá, y no saldrá licor alguno por el orificio pq. Esto es evidente de suyo; porque todos los puntos de la masa P bajarán á impulsos de la pesantez natural con la misma velocidad.

Si fuese infinito el peso R, se deberá despreciar P en comparacion de R; y en este caso $\frac{2R}{R+P} = 2$. Así, la altura correspondiente á la velocidad en p será $2hq$; y saldrá $Q = \frac{2tK\sqrt{2ah}}{c}$.

Si los dos pesos P y R fuesen cantidades finitas, siendo $P > R$, bajaría el peso P, y subiría el peso R; y se determinaría su movimiento solo con hacer f negativa. Se halla que en este caso, del mismo modo que en el primero, la altura correspondiente á la velocidad en p es $hq \times \frac{2R}{R+P}$, y que la cantidad del licor que ha salido, siempre se saca de la equacion $Q = 2tK\sqrt{\left(\frac{2ahR}{R+P}\right)}$.

201 Cuestion II. *Averiguar la presion que sufrirá un punto qualquiera de las paredes del vaso* ACDB *en que* 71.

 hay

Fig. *hay agua, y que está tirado á lo largo del plano orizontal* DQ *por el peso* R *atado á la cuerda* HNR *que pasa por la polea* N.

Llamemos como antes P la suma de las masas del vaso y del agua que contiene. Supongamos que el cuerpo R hubiese andado en un instante á impulsos de su pesantez natural el corto espacio Rt, pero que por causa del cuerpo P de quien tira, no ande mas que Rr, mientras que P anda el pequeño espacio Cc igual á Rr. Si llamamos g la gravedad natural; f, la fuerza aceleratriz Rr ó Cc, sacaremos sin dificultad alguna (IV. 580) la equacion $R(g-f) = Pf$ ó $f = \frac{gR}{R+P}$. Se echa, pues, de ver que cada partícula del fluido es impelida en la direccion DQ por una fuerza $\frac{gR}{R+Q}$, y por consiguiente que se mantendría en equilibrio el systema, si se le comunicára una fuerza igual y contraria. Pero en este último caso cada partícula fluida esperimenta la accion de dos fuerzas, la una vertical que es la pesantez g, y la otra orizontal, es á saber, $\frac{gR}{R+P}$, y de estas dos fuerzas se deriva otra cuya espresion es $g \times \frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$. Así, para que esté en equilibrio el fluido, es forzoso (19) que la superficie del mismo fluido corte perpendicularmente la direccion de la derivada que acabamos de hallar; y como esta misma fuerza siempre es constante en cantidad y direccion, es patente que la superficie del fluido ha de ser un plano inclinado OM, tal que tirando la orizontal OE á la vertical ME, resulte $\frac{OE}{OM} = \frac{R+P}{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}$.

Sentado esto, si desde un punto qualquiera T de las pa-

paredes del vaso se tira la recta TZ perpendicular á la superficie OM del fluido, es evidente que la presion que sufre la area infinitamente pequeña Tt, en el supuesto de la cuestion, es á la presion que sufriría á la profundidad TZ, si el fluïdo no esperimentára mas impulso que el de la pesantez en un vaso en reposo, como $\frac{g\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$ es á g, ó como $\sqrt{\left[R^2+(R+P)^2\right]}$ es á $R+P$. Luego $Tt \times TZ \times \frac{\sqrt{[R^2+(R+P)^2]}}{R+P}$ representa la primera presion. Fig.

202 Por consiguiente, en conociendo la presion que sufre la area Tt, se conocerá la altura que corresponde á la velocidad con que saldria el fluido por la aberturita Tt, y la cantidad de licor que saldria en un tiempo dado, suponiendo que recibiera el vaso por una *afusion* lateral tanta agua quanta perdiese por la abertura Tt. Esta cuestion es análoga á la de antes (199).

203 Es de observar que subsiste inclinada la superficie del fluido mientras que dura el movimiento del cuerpo R, y es uniformemente acelerado dicho movimiento. Pero si despues de haberse movido el vaso por espacio de cierto tiempo con un movimiento uniformemente acelerado, llega á moverse con un movimiento uniforme, ó al estado de reposo, la superficie del agua pierde la posicion inclinada, y para en una posicion orizontal. La resolucion misma que hemos dado lo manifiesta, porque podemos suponer en este caso $R = 0$, la fuerza f es nula, y la superficie del agua, que debe ser perpendicular á la direccion de la fuerza que comprime cada una de las partículas que están en esta mis-

Fig. ma superficie, es forzosamente orizontal; porque no hay ya mas fuerza que obre en las partículas del fluido, sino es la gravedad natural.

Del movimiento de oscilacion y ondulacion de los fluidos.

204 Dejamos demostrado (108, ó IV. 252 y 253)
72. que si un péndulo *P* anda arcos muy pequeños de círculo *Pp*, *Qq*, oscilando al rededor del punto fijo *O*, todas sus oscilaciones son isócronas ó de igual duracion, bien que sean desiguales los arcos andados *Pp*, *Qq*. Fúndase este isocronismo en que los espacios *Pp*, *Qq* son proporcionales á las fuerzas á cuyos impulsos son andados.

Tambien dejamos (IV. 255) demostrado que si dos péndulos de longitudes desiguales andan arcos pequeños de círculo, las duraciones de sus oscilaciones son entre sí como las raices quadradas de sus longitudes.

73. 205 Sentado esto, sea un tubo *KLNM* de grueso uniforme, formado de dos tubos verticales y otro orizontal. Echesele una cantidad determinada de licor. En el estado de equilibrio las dos superficies *AB*, *CD* están á nivel (20). Supongamos que alguna causa, sea la que fuere, haga subir el licor á *EF* en el brazo *KL*, y bage por lo mismo á *GH* en el brazo *MN*; y que despues quede entregado al impulso libre de su pesantez. Es constante que subirá y ba-
72. jará alternadamente. Sea *P* un péndulo cuya longitud *OP* es la mitad de la longitud *xyz* de la columna fluida, y que

an-

anda hasta el punto mas bajo *I* arcos *PI* iguales á los espacios *AE*. La fuerza que es causa de que oscile el fluido es el exceso que el peso del agua contenida en el uno de los brazos del sifon lleva al peso del agua que hay en el otro brazo. Así, quando el agua sube á *EF* en el brazo *KL*, y por consiguiente baja á *GH* en el brazo *MN*, dicha fuerza es el peso de la columna *ESTF*, ó el duplo del peso de la columna *EABF*. Es, pues, al peso de toda el agua como 2 *AE* es á *xyz*, ó como *AE* es á *OP*. De donde se sigue 1.° que siendo la longitud *xyz* una cantidad constante, la fuerza que es causa de que oscile el agua siempre es proporcional al espacio que la hace andar; y que por lo mismo las oscilaciones del agua son isócronas entre sí. 2.° Estas oscilaciones son de igual duracion que las del péndulo *P*; porque la fuerza á cuyo impulso el péndulo *P* anda el arco *PI*, es á la pesantez del mismo péndulo, como *PI* es á *OP* (IV. 253), ó como *AE* es á *OP*; luego el agua y el péndulo son impelidos de una misma fuerza, y por consiguiente deben hacer sus oscilaciones en un mismo tiempo. Fig.

206 Yá que las oscilaciones del agua están arregladas á las mismas leyes que las del péndulo, si aumentamos ó disminuimos la longitud de la columna de agua, el tiempo de sus oscilaciones crecerá ó menguará, y seguirá la razon duplicada de dicha longitud.

207 Esta teórica de las oscilaciones de los fluidos se aplica al movimiento de las olas.

Fig. 74. Sea *ABCDEF* una agua estagnante cuya superficie suba ó bage haciendo olas. Sean *A*, *C*, *E* las eminencias de estas olas; *B*, *D*, *F*, las cavidades intermedias que las separan. Como el movimiento de las olas es tal que las partes *A*, *C*, *E* llegan á ser despues las mas bajas, y porque la fuerza que hace bajar las mas altas y subir las mas bajas, siempre es el peso del agua levantada, es patente que las oscilaciones de las ondas son de la misma especie que las del agua en el sifon *KLNM*. Luego si se toma un péndulo cuya longitud sea la mitad de las distancias entre los sitios mas altos *A*, *C*, *E*, y los sitios mas bajos *B*, *D*, *F*, las partes mas altas *A*, *C*, *E* llegarán á ser las mas bajas en el discurso de una oscilacion de dicho péndulo; y en el discurso de otra oscilacion llegarán á ser las mas altas. Hará, pues, el péndulo dos oscilaciones en el discurso de cada ondulacion; quiero decir, en el tiempo que cada una de dichas olas gastare en andar su latitud; y como un péndulo cuya longitud fuese quádrupla de la longitud del precedente, no haria mas que una oscilacion en el tiempo que este hace dos, síguese que las olas hacen sus oscilaciones en el mismo tiempo que un péndulo cuya longitud fuese igual á la latitud de las mismas olas.

208 Luego la velocidad de las mayores ó menores olas crecerá ó menguará en razon duplicada de su latitud. Las ondas cuya latitud es de 3 pies 8 $\frac{1}{2}$ lineas, andan su latitud en 1 segundo, y por consiguiente 183 pies 6 pulgadas 6 lineas en 1 minuto.

Pre-

Prevenimos que todo esto se debe entender al poco Fig. mas ó menos, porque hemos supuesto que en las ondulaciones todas las partes del agua suben y bajan por lineas rectas, siendo así que su movimiento mas es circular que rectilineo.

Investigaciones esperimentales acerca de la direccion de las partículas de un fluido en lo interior del vaso en que se mueven, y acerca de la contraccion de la vena fluida al salir del orificio.

209 Hasta aquí hemos tratado teóricamente no mas la evacuacion de los fluidos; y si hemos apelado alguna vez á la esperiencia, lo hemos hecho solo con la mira de tomar los resultados sin individualizar las operaciones de que provinieron. Ahora traheremos los esperimentos que hemos hecho sobre esta materia, juntamente con las reflexiones á que han dado motivo. Con esto se verá tambien hasta donde ván conformes la teórica y los fenómenos. Consideraremos primero el rumbo que siguen las partículas de un fluido que se mueve en un vaso, antes de llegar al orificio; y despues la forma que toma la vena fluida al salir del mismo orificio. Estos dos puntos tienen uno con otro un enlace muy estrecho; porque la forma de la vena fluida pende de la direccion que siguen las partículas en el instante que ván á salir del vaso.

Pa-

Fig. 75. 76. 210 Para ver mejor lo que sucede en lo interior de una masa fluida, se mandó hacer un vaso cilíndrico de vidrio *ADCB* cuya altura era de cerca de 17 pulgadas, y el diámetro de $5\frac{1}{2}$ pulgadas. En el fondo y en uno de los lados habia dos aberturas *M* y *N*, á las quales se podian acomodar tubos aditicios de diferentes diámetros. Este vaso le sostenian á altura de antepecho dos clavijas orizontales, afianzadas en un pie derecho. Los tubos aditicios estaban acomodados bien perpendicularmente en planchas de cobre de $\frac{1}{2}$ linea de grueso.

75. 211 Esperimento I. Despues de llenado de agua el vaso *ADCB* hasta 16 pulgadas mas arriba del fondo, se dejó salir el fluido por un tubo aditicio orizontal *M* de 4 lineas de diámetro. Se mantenia el vaso constantemente lleno hasta la altura propuesta, échandole el agua con un cántaro, y con la mayor suavidad posible. Apenas era sensible la comocion que ocasionaba esta agua provisional en la superficie. Sentado esto, se observó que unos corpúsculos estraños como limaduras, pedacitos de pizarra molida, mezclados con el agua se dirigian ácia el orificio. Al principio iban bajando en direcciones verticales. Pero así que llegaban á *OH*, á 3 ó 4 pulgadas de distancia del fondo, se apartaban visiblemente de esta direccion, y venian por todas partes, con movimientos mas ó menos oblicuos, á meterse por el orificio.

Los mismos resultados se han sacado, con poca diferencia, de este mismo esperimento despues de repetirle con otros tubos aditicios.

Lo

Lo mismo sucede quando sale el agua por una luz lateral *N*: todas las partículas tienen una tendencia ácia el orificio, conforme representa la figura. Fig. 76.

212 Esperimento II. Despues de llenar de agua el vaso *ADCB* hasta 16 pulgadas de alto, se la dejó salir por un orificio orizontal *M* de 4 lineas de diámetro, sin echarle mas agua. La superficie del fluido al bajarse se mantuvo orizontal hasta la distancia de cerca de 6 lineas del orificio. A esta altura se formó en la superficie una especie de *olla* ó *embudito* hueco, cuya punta correspondia al centro del orificio. Se fue haciendo poco á poco mayor la concavidad de dicho embudo; y al último de la evacuacion el agua se resbalaba sobre la esquina del orificio á modo de *sábana*. La inclinacion de todas las partículas ácia el orificio se manifestó del mismo modo que antes. 75.

Lo mismo resultó repitiendo este esperimento con un tubo aditicio de 8 lineas de diámetro. Solo pareció que empezaba á formarse el embudo á una distancia del orificio que no llegaba del todo á 6 lineas.

Quando se vacia el vaso por una abertura vertical *N*, la superficie del agua se mantiene sensiblemente orizontal mientras está á cierta altura sobre el orificio. Pero quando yá está para tocar su borde superior, se advierte que se inclina un poco ácia aquel lado. Se forma en longitud un corto hundimiento en la direccion del orificio. Pero esta especie de medio embudo no es tan sensible, ni con mucho, como en las evacuaciones por orificios orizontales.

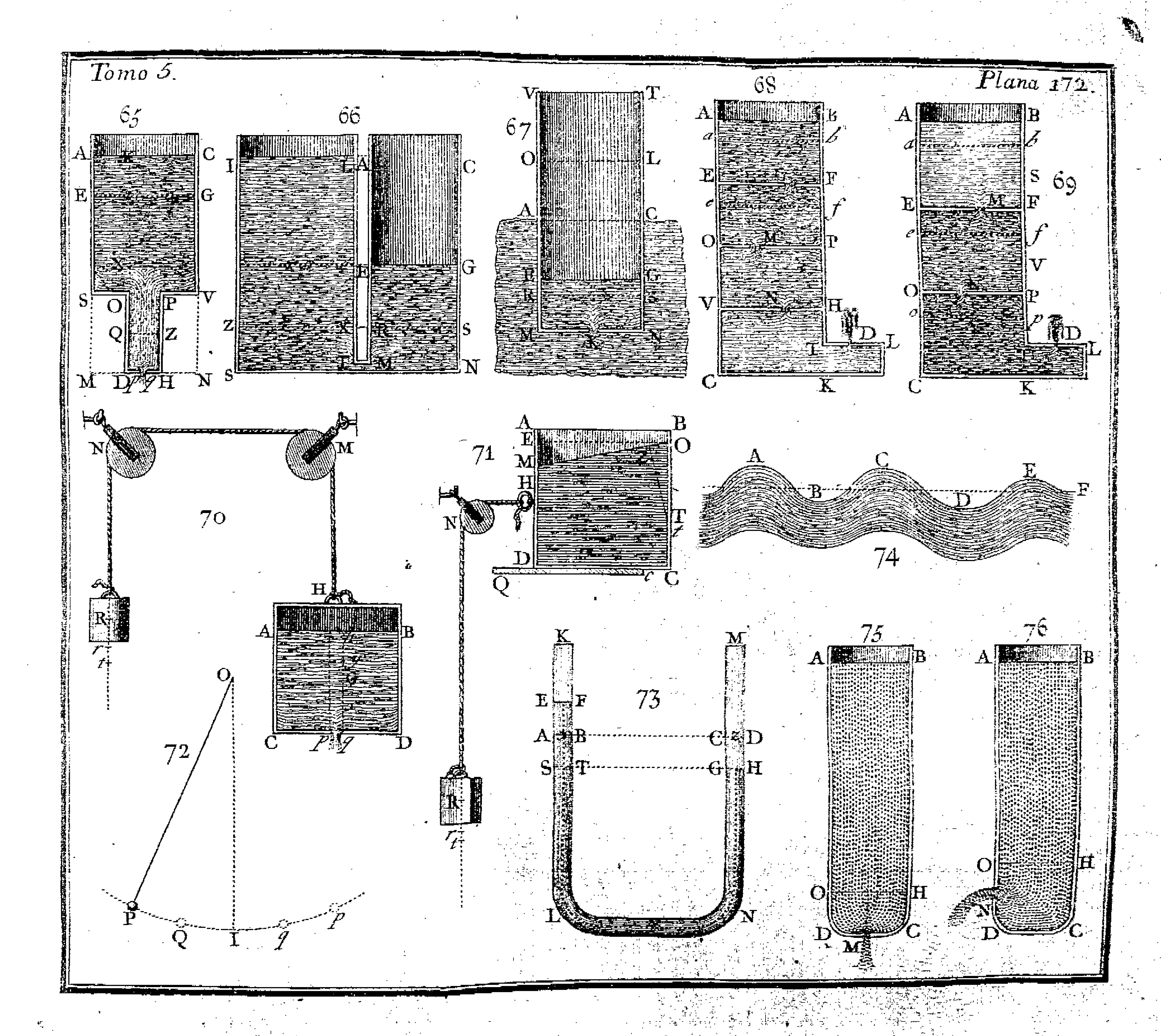
Es-

Fig. Esto mismo se puede observar siempre que se quiera en los estanques ó en otros depósitos grandes. La superficie del agua se baja ó inclina algun tanto ácia la abertura por donde se hace la evacuacion.

213 Reflexiones. La inclinacion universal de las partículas fluidas ácia el orificio es una consecuencia forzosa de su perfecta mobilidad. Porque es evidente que se deben dirigir ácia el punto que menos resiste á las fuerzas con que se hallan comprimidas en una profundidad determinada. Es así que el parage donde está el orificio es cabalmente el punto de la menor resistencia. Luego &c.

214 Así que salen unas partículas, ván en su seguimiento otras que al instante ocupan su lugar. Pero qualquiera se hará cargo de que este reemplazo no se puede efectuar en un instante indivisible. Así, hablando con rigor geométrico, desde el primer momento de la evacuacion se debe formar en la superficie, sea donde quiera, un pequeño hundimiento ácia donde tienen las partículas *circunambientes* una inclinacion igual, al poco mas ó menos, con la que tiene para bajar un cuerpo colocado sobre un plano inclinado, por mas chica que sea la inclinacion de dicho plano. Quando tiene alguna profundidad el agua, no debe ser reparable el hundimiento de que vamos hablando, porque las partículas inferiores oprimidas de las superiores siguen rápidamente la direccion de la evacuacion, é inmediatamente tiran de las partículas contiguas en virtud de su *tenacidad* ó adherencia recíproca. Es, pues, entonces el

pa-


Tomo 5.
Plana 172.
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76

paralelismo de la superficie, con corta diferencia, el mismo Fig. que si estuviera el fluido en reposo. Pero al paso que vá bajando la superficie del agua, se reemplazan unas á otras con menos rapidez, y llega á ser considerable el embudo. En las evacuaciones por orificios orizontales, la presion del ayre contribuye para hacer mayor el embudo. Con efecto, la atmósfera comprime con su peso la superficie del agua. La columna vertical del ayre que corresponde al orificio, se mete en el hoyito ó embudito que se forma en el mismo parage. A esta columna la contrarestaría el esfuerzo contrario de la columna de ayre, que está debajo del orificio, si la accion de esta pudiera surtir todo su efecto; pero como el agua, al caer, rechaza el ayre, y destruye una porcioncita de su reaccion, la primera columna no puede menos de llevar alguna ventaja á la segunda. Luego si las partículas que por todas partes concurren ácia el orificio para continuar la evacuacion, no tienen bastante velocidad para impedir el efecto de esta desigualdad de presion de las dos columnas de que acabamos de hablar, se hará mayor el embudo, y tanto mayor quanto mas se bajare la superficie del agua, y por consiguiente quanto menores fueren las velocidades de las partículas. No sucede lo mismo en las evacuaciones por orificios verticales, porque en este caso no hay columna orizontal de ayre que impela el agua ácia el orificio. Tenemos por escusado prevenir que en las evacuaciones por orificios inclinados, la formacion del embudo debe participar de la que se verifica siendo orizontal

el

Fig. el orificio, y de la que sucede quando el orificio es vertical.

215 No podemos determinar generalmente á qué altura debe empezar el embudo á dejarse ver sobre un orificio orizontal. Esto pende de muchas circunstancias físicas que no siempre son unas mismas. Se ha esperimentado por medio de un cubo cónico que tenia 3 pies 4 pulg. de alto, 4 pies de diámetro en su base inferior, y 4 pies, 12 pulg. en la superior, que estando al principio enteramente lleno el cubo, y vaciándose por un orificio de un pie de diámetro, hecho en el fondo, empezaba á dejarse ver el embudo, quando la superficie del agua distaba del fondo cerca de 5 á 6 pulgadas. Vaciándose el mismo cubo por otro orificio, tambien orizontal, de 3 pulgadas de diámetro, empezó á dejarse ver el embudo, quando la superficie del agua distaba del fondo cerca de 6 pulgadas. Parece que la formacion del embudo es menos pronta ó menos sensible, segun vá creciendo el orificio en comparacion de la estension del fondo. Tambien contribuye mucho la mayor ó menor aspereza del fondo, y de las paredes del vaso para que sea mayor ó menor el embudo.

216 Estos esperimentos, aunque simplicísimos, se deben hacer con mucha precaucion para conocer con exactitud la generacion natural del embudo. Es forzoso poner cuidado en que no esperimente el fluido movimiento alguno distinto del que produce libremente la evacuacion. Porque si tiene la masa fluida algun movimiento primordial de

os-

oscilacion ó *turbinacion*, por mas leve que sea, se introduce Fig.
el ayre en aquellos huequecitos que dejan entre sí las partículas por causa de la irregularidad y la desigualdad de sus movimientos; y algunas veces empieza á verse el embudo desde el primer instante de la evacuacion, aunque tenga el agua una profundidad considerable. Esto es justamente lo que esperimentamos con el cubo de que acabamos de hablar. Quando despues de estar lleno el cubo, no se le daba tiempo al agua para sosegarse perfectamente antes de destapar un orificio orizontal, se dejaba ver al instante el embudo; su punta se encaminaba ácia la abertura, pero su base seguia el movimiento de la superficie del agua. Tenia una forma tortuosa é irregular. Bien se percibe que en este caso llena el ayre la concávidad del embudo, y forma allí una especie de *hueso* al rededor del qual circulan los puntos fluidos en virtud de sus fuerzas centrífugas. Aun quando llegasen á aniquilarse de todo punto estas fuercecillas, siempre subsistiría el embudo. Porque la dificultad que hallaría el ayre para salirse, sea por razon del rozamiento, sea por razon del engargante de sus partes con las del agua, sería mas que suficiente para destruir cada instante la fuercecilla que intenta restablecer el perfecto nivel de la superficie. Esta última fuerza vá menguando continuamente á medida que vá bajando la superficie del agua, siendo así que por el contrario ván creciendo las causas que producen el embudo.

Se forman con frecuencia delante del desaguadero de una pie-

Fig. pieza de agua grandes embudos harto parecidos á los que se observan en las evacuaciones por orificios orizontales. Las desigualdades del fondo son regularmente las que ocasionan estos embudos, porque detienen ó desvian el agua inferior, y con esto dan lugar á diferentes movimientos de rotacion en el fluido. Tambien se originan alguna vez de los movimientos anteriores con que está agitado el fluido al empezarse la evacuacion. Una vez violentada, de qualquier modo que sea, la inclinacion natural de las partículas ácia el fondo, deben resultar en el fluido remolinos y huecos donde se mete el ayre, y que ván creciendo á medida que vá bajando el fluido, conforme acabamos de declarar. Lo mismo sucede con muy corta diferencia con los remolinos que se echan de ver en los parages de un rio donde tiene el agua mucha profundidad y poca velocidad.

217 Es evidente que quando llega á estar bien formado el embudo, y está para acabarse la evacuacion de un vaso que se desocupa, no sale tanta agua como saldria si no hubiese embudo. Porque el ayre que llena su concavidad, ocupa el lugar del agua que naturalmente debería salir. Es, pues, por esta razon estremadamente incierto el fin de las evacuaciones, y si nos quisiéramos empeñar en determinarle teóricamente, nos espondríamos al riesgo de padecer equivocaciones de bastante consideracion. Pero esta duda solo recae sobre la cantidad de agua que ha salido, y no sobre su velocidad que siempre es la misma que si no hubiese embudo; porque el ayre que ocupa el lugar del

agua

agua, se mueve con la misma velocidad, con que esta se moveria, y no debe alterar la evacuacion del agua contigua. Fig.

El efecto del embudo en las evacuaciones por orificios verticales, es insensible.

218 Vengamos á considerar la contraccion de la vena fluida al salir por el orificio.

El depósito que nos sirvió en los esperimentos siguientes, era un paralelipípedo rectángulo vertical, de cerca de 12 pies de alto, y cuya base era un quadrado de 3 pies de lado, midiéndole por adentro. El suelo y las paredes de este paralelipípedo, muy bruñidas y bien cortadas, eran de tablones de unas 20 lineas de grueso. Estaba fuertemente empotrado en unos bastidores que le sostenian, y cargaban sobre un armamento de madera, quedando perfectamente libre el suelo. Tambien estaban libres las paredes hasta cerca de dos pies mas arriba del fondo. El agua que se necesitaba la suministraba un tubo acomodado al conducto que abastece las fuentes de la Ciudad de *Mezieres*. Esta agua, que primero se echaba en un cubo colocado sobre un puente de madera, al nivel de la parte superior del depósito, pasaba despues, por medio de una compuerta y de un canal, al depósito.

Todo esto se vé por menor en las figuras 77, 78, 79 y 80. La figura 77 es un perfil general que corta perpendicularmente el puente, el depósito y el cubo. En este perfil, 1*HG*2 es el puente; *ADCB*, el depósito; *NOEP*, el cubo; *TM*, el tubo que saca las aguas 77. hasta 80.

Fig. del conducto *T* de las fuentes ; *M*, una llave que se abre y cierra segun se quiere ; *E* , la compuerta que , conforme se alza ó baja, permite ó corta el paso del agua del cubo al depósito ; *PK*, una palanca que sirve para levantar ó bajar la compuerta ; *X* , el canal por donde ván las aguas desde el cubo al depósito ; *R* y *L* , los pilares que sostienen los bastidores donde está empotrado el depósito.

La figura 78 es un corte orizontal de la máquina. *ZY&W*, es el piso del puente ; *tm* , la proyeccion orizontal del tubo *TM* ; *mnop* , la del cubo ; *adcb* , el plan del depósito ; *SIV* , el plan del armamento que mantiene el depósito ; *X*, el plan del canal que tiene comunicacion con el cubo y el depósito.

La figura 79 representa separadamente el plano del depósito , del canal y del cubo. El suelo del depósito está horadado , y tiene , segun se vé , diferentes aberturas.

Es la figura 80 un perfil *kfgh* del cubo , perpendicular al primero *NOEP* ; sirve para manifestar el desaguadero con sus dimensiones orizontales.

219 No solo está horadado el suelo del depósito *ADCB* , sino que tambien lo están sus paredes, llevando diferentes aberturas á las quales están acomodadas por la parte de adentro unas planchas de cobre anchas y bien derechas, de cerca de $\frac{1}{2}$ linea de grueso. Tambien tienen estas planchas unos agugeros perpendiculares por donde sale el agua y son menores que las aberturas hechas en la madera á fin de reconocer y medir con comodidad por la parte de afuera

ra el diámetro de la vena fluida. Se interrumpe la evacuacion, siempre que se quiere poniendo, por afuera en las aberturas de madera tapones de lo mismo, que no lleguen hasta el cobre. Siempre que en adelante usáremos la voz *luz, orificio* ó *abertura*, solo hablarémos de los orificios abiertos en el cobre; porque solo por ellos se hace la evacuacion, segun acabamos de decir. Fig.

220 El diámetro de la vena fluida se midió con un compas esférico *A, B, C* en la parte donde, contando desde la cara interior del orificio, deja de angostarse la vena. En un trecho de algunas lineas conserva sensiblemente el mismo grueso; y despues crece ó mengua por causa de la resistencia del ayre ambiente combinada con la pesantez; estas variaciones no son por ahora de nuestro asunto. 81.

Para escusar quanto sea posible repeticiones inútiles, incluiremos en un mismo número, siempre que no sea á costa de la claridad, muchos esperimentos, quando tuvieren comun alguna condicion principal, proponiendo una vez no mas esta condicion al principio del artículo.

221 Esperimentos III, IV, V, VI. En estos quatro esperimentos, se mantuvo el agua en el depósito *ADCB* constantemente á la altura de 11 pies 8 pulg. 10 lineas respecto del suelo, por medio del agua provisional contenida en el cubo, y se observaron los hechos siguientes. 82.

I. Saliendo el agua por una abertura orizontal y circular de una pulgada de diámetro, el grueso de la vena fluida iba menguando hasta 6 á 7 lineas de distancia de la

Fig. cara interior del suelo; y entonces no tenía 10 líneas cabales de diámetro. Valuóse este diámetro en $9\frac{4}{5}$ lineas.

II. Saliendo el agua por una abertura orizontal y circular de 2 pulgadas de diámetro, el diámetro de la vena medido á unas 12 ó 13 lineas de la cara interior del orificio, era de $19\frac{1}{2}$ lineas, con corta diferencia.

III. Saliendo el agua por una abertura orizontal y circular de 3 pulgadas de diámetro, el diámetro de la vena medido á 18 lineas de la cara interior del orificio, era de cerca de $29\frac{1}{4}$ líneas.

IV. Saliendo el agua por una abertura orizontal y quadrada de una pulgada de lado, la seccion de la vena, medida á 7 lineas de la cara interior del orificio, era un quadrado de cerca de $9\frac{4}{5}$ lineas de lado. Los ángulos de este quadrado correspondian á los medios de los lados del primero. Añadiremos de paso que la misma correspondencia que tienen los ángulos con los medios de los lados de los quadrados superiores, se vá repitiendo hasta quedar enteramente desfigurada la vena por la resistencia del ayre. Este fenómeno dá mucho gusto á la vista.

Resultados de estos esperimentos.

222 Llamando A la area del orificio; a, la area de la seccion de la vena fluida *angostada* ó *contraída*, resulta, con poca diferencia, del primer esperimento $A : a :: 150 : 100$,

del segundo .... $A : a :: 151\frac{1}{2} : 100$,

del tercero .... $A : a :: 151\frac{1}{2} : 100$,

del quarto .... $A : a :: 150 : 100$.

Es-

223 Esperimentos VII, VIII. Aquí se hicieron Fig. las evacuaciones por aberturas verticales, y en cada uno de los esperimentos se mantuvo constantemente el agua en el depósito á 9 pies de alto mas arriba del centro de cada abertura.

I. Saliendo el agua por una abertura circular de *6* lineas de diámetro, la vena fluida se angostaba igualmente por todas partes hasta 4 ó 5 lineas de distancia de la cara interior del orificio; y en este caso su diámetro era de cerca de $4\frac{8}{9}$ lineas.

II. Saliendo el agua por una abertura circular de una pulgada de diámetro, la vena fluida se contraía igualmente por todas partes hasta *6* á 7 lineas de distancia de la cara interior del orificio; y en este caso parecia el diámetro de $9\frac{4}{5}$ lineas.

Resultado de estos dos esperimentos.

Por el primero, $A : a :: 150\frac{3}{5} : 100$, con corta diferencia,
por el segundo, $A : a :: 150 : 100$, con corta diferencia.

224 Esperimentos IX, X. Dejando salir el agua por dos aberturas verticales é iguales con las dos precedentes, pero puestas á 4 pies no mas de la superficie del fluido que siempre se mantenia á dicha altura, en ambos casos se sacaron los mismos resultados que acabamos de ver.

225 Reflexiones. La contraccion de la vena fluida es generalmente una prueba incontrastable de que en lo interior del vaso, tanto las partículas laterales como las que directamente corresponden al orificio, se dirigen ácia dicho

Fig. punto con movimientos mas ó menos oblicuos. Del mismo modo se verifica esta contraccion sea que salga el fluido por una abertura orizontal ó por una abertura lateral; y el punto donde cesa, siempre dista de la cara interior de la pared una cantidad igual poco mas ó menos al radio del orificio. Quando la evacuacion se hace por una abertura orizontal, son iguales todos los diámetros de la vena contraída. Esto mismo se verifica en las aberturas laterales cuyos diámetros son muy pequeños en comparacion de la altura que tiene el fluido en el depósito, como en los quatro esperimentos últimos. Pero si hubiese junto á la superficie del fluido una abertura lateral, de estension sensible, el diámetro orizontal de la vena contraída sería mayor que los demás. Así lo hemos esperimentado en la evacuacion por un orificio vertical de una pulgada de diámetro, cuyo borde superior distaba una linea de la superficie del agua. Bien se percibe que así debe ser. Porque teniendo en este caso sensiblemente mas velocidad las partículas inferiores que las superiores, las parábolas que estas describen tienen menos amplitud que las que describen las demas. De donde resulta un incremento en el diámetro orizontal, y un decremento en el diámetro vertical. En este caso no es posible determinar con exactitud la contraccion con medir los diámetros de la vena.

226 En las evacuaciones por aberturas verticales, lo que propiamente se llama contraccion, es efecto del movimiento oblicuo que las partículas laterales han adquirido en lo interior del vaso. Pero en las evacuaciones por aber-

tu-

turas orizontales, la pesantez acelera las partículas inmediatamente despues que salen del orificio; cuya aceleracion es una nueva causa que se dirige á aumentar la primera contraccion. El efecto que causa de este modo, no puede menos de ser de muy poca consideracion, quando la altura del fluido sobre el orificio es considerable, como en los esperimentos anteriores. Fig.

227 Estos mismos esperimentos están diciendo que las diferentes alturas del fluido sobre el orificio no causan variaciones en la cantidad de la contraccion. Pero en el supuesto de que se verifiquen tales variaciones, no pueden determinarse sino por medio de esperimentos que admitan mucho mayor exactitud que la que podemos esperar quando medimos el diámetro de la vena contraída. En adelante veremos las consecuencias que en orden á este asunto se pueden sacar por medio de las cantidades del agua que ha salido.

228 Es evidente que, en virtud de la contraccion, la cantidad de agua que sale en un tiempo dado, debe ser menor de lo que sería si salieran todas las partículas perpendicularmente al plano del orificio. Porque el movimiento oblicuo que realmente tienen las partículas laterales, se resuelve en otros dos, el uno paralelo al plano del orificio, y es el que angosta la vena; el otro perpendicular al mismo plano, y es el único que produce la evacuacion.

229 Ya que en el punto de la contraccion toma y conserva la vena en un corto trecho la forma prismática, si se conociera en dicho parage la velocidad del fluido, y

Fig. se hubiera medido con exactitud la seccion de la vena contraída, es evidente que si consideráramos dicha seccion como el verdadero orificio por donde se hace la evacuacion, se sabría cabalmente la cantidad de agua que sale en un tiempo dado. Pero es dificultosísimo medir el diámetro de la vena contraída con la precision que exigiría este método. Esta es la razon porqué los Autores, que se han empeñado en determinar la contraccion por esta especie de mediciones, han sacado resultados harto diferentes.

230 Segun Newton, la area A del orificio es á la area a de la seccion de la vena contraída, como $\sqrt{2}$ es á 1, ó como 141 es á 100, con corta diferencia. Otros Autores han señalado otras razones. De nuestros esperimentos resulta sensiblemente que $A : a :: 150 : 100 :: 3 : 2$. No hay que estrañar la diferencia que se repara entre estos resultados. Porque sobre que las variedades en los rozamientos con los bordes del orificio deben ocasionar otras en la contraccion, si se comete algun error en la medicion del diámetro de la vena contraída, llegará á ser sensible este error en la determinacion de la area de la seccion, por ser proporcionales las areas de los círculos á los quadrados de sus diámetros; y lo será tanto mas quanto menor fuere el diámetro medido. Newton señaló la razon espresada despues de medir una vena fluida que salia por un orificio de cerca de 6 lineas de diámetro. Si en los esperimentos VIII y IX en que sale el fluido por una luz de 6 lineas de diámetro, hubiéramos hallado el diámetro de la vena contraída

de

de 5 lineas en lugar de $4\frac{8}{9}$, hubiera salido $A : a :: 36 : 25 :: 144 : 100$ cuya razon se aproxima mucho á la que halló Newton. Quantos repitieren dichos esperimentos, echarán de ver que muy lejos de poder asegurar que no han errado $\frac{1}{9}$ de linea la medida de un diámetro, se corre riesgo de cometer errores mucho mayores. Se deben, pues, preferir para esta investigacion los orificios grandes á los pequeños, y esto nos determinó á hacer las esperiencias III, IV, V, VI, VIII, X. Aunque se hicieron estos esperimentos con el mayor cuidado posible, no los tenemos por tan seguros, ni tan exactos, que en virtud de ellos se puedan determinar las evacuaciones, quando se quieran determinar con toda la exactitud que admite este asunto. Buscaremos, pues, otros medios mas apropósito para conseguirlo. Pero antes de intentarlo, era forzoso manifestar á la vista la existencia de la contraccion, y la forma que por ella toma la vena fluida, para no estrañar despues las diferencias que se encuentran entre los resultados que dá la teórica, quando se usan los orificios sin hacer en ellos correccion alguna, y los que dá en realidad la esperiencia. Por no haber considerado como se debia el efecto de la contraccion, Newton en la primera edicion de sus *Principios Matemáticos* se equivocó al señalar, en virtud de la medida de las cantidades de agua que habian salido, la altura que corresponde á la velocidad del fluido al salir del orificio. Hacia esta altura igual con la mitad no mas de la del depósito, siendo así que la verdadera teórica y la práctica de los surtidores de agua evidencian, Fig.

con-

Fig. conforme lo reconoció mas adelante, atendiendo á la contraccion, que la primera altura es igual con muy corta diferencia á toda la segunda.

231 Algunos Autores célebres han considerado la contraccion como un efecto puramente casual, y han creido que la podrian dar por el pie haciendo que saliese el agua por las bocas de cabos de tubos acomodados al depósito. Verdad es que el agua sigue las paredes de dichos tubos, por lo menos quando tienen alguna longitud, y sale entonces la vena en forma de cilindro. Pero siempre subsiste parte de la contraccion á la entrada de estos mismos tubos, y mas adelante probaremos que esta contraccion disminuye notablemente las cantidades de agua que deberian arrojar naturalmente.

Esperimentos y reflexiones acerca del movimiento de las aguas que salen de los depósitos en que están.

232 El fin que aquí nos proponemos es determinar, por medio de los esperimentos, quanto pertenece á la evacuacion de un fluido que sale de un vaso por una abertura, comparar estos resultados con los que dá la teórica, y sentar en orden á este asunto reglas generales que se puedan aplicar con facilidad á los casos prácticos.

Para seguir en esto el mismo orden que antes, consideraremos separadamente los dos casos que pueden ocurrir;

rir; es á saber, aquel en que sale el agua de un vaso que Fig.
se mantiene constantemente lleno, y el caso en que sale sin que reciba el vaso mas agua.

Medida de las aguas que salen de depósitos que se mantienen constantemente llenos.

233 Para determinar la cantidad de agua que sale de un depósito en un tiempo dado, son indispensables un vaso cuya cabida se conozca con exactitud para recibir y medir el agua, y un instrumento acomodado que determine el tiempo de la evacuacion.

234 En consecuencia de esto se le mandó hacer pri- 83.
mero á un Oficial muy habil un cubo *X* de cobre, de *6* pulgadas cabales de lado por adentro, y abierto por arriba. Ya se vé que su cabida es la octava parte de un pie cúbico quando está enteramente lleno. En sus quatro caras interiores y, verticales estaban trazadas quatro escalas verticales exactamente divididas en lineas, que servian para medir, quando se ofrecía, las cantidades de agua que no llenaban enteramente el cubo.

235 Por medio de este mismo cubo, que siempre
sirvió de unidad fundamental, se determinó el pie cúbico 84.
en un barrilito *PRQT* cerrado por todas partes, y en cuyo suelo superior *PQ* estaban acomodados dos tubos *S* y *K* de hoja de lata. El primer tubo de 10 lineas de diámetro, que estaba puesto en la parte mas eminente de *PQ*, servia para dar salida al ayre que lleva consigo el agua. En el segundo se

se-

Fig. señaló el punto *K* adonde llegaba la superficie del agua para formar el pie cúbico. Como esta superficie tiene poca estension, no se puede cometer error ninguno sustancial al señalar en el cilindro *K* los puntos que la limitan; y de este modo se consigue una medida muy exacta del pie cúbico.

236 Del mismo modo, con el socorro del pie cúbico se formó una medida de 8 pies cúbicos en un tonel ancho
85. cho *IFGE*, cerrado por todas partes, y armado con dos tubos *S* y *K* de hoja de lata en su fondo superior, que servian para lo mismo que llevamos espresado (235). El primero *S* siempre tenia 10 lineas de diámetro. Pero el segundo *K* tenia aquí 8 pulgadas de diámetro; tambien se le dió alguna amplitud para que pudiese recibir el agua con mayor facilidad. Su altura sobre el punto *K* que señala el límite de los 8 pies cúbicos, era de 10 á 11 pulgadas.

237 El tubo *S* es absolutamente indispensable. Porque al precipitarse el agua ó en el barril *PRTQ*, ó en el tonel *IFGE*, lleva consigo mucha cantidad de ayre que podria alterar sensiblemente y con desigualdad su volumen, si no se le diera salida. Nosotros lo vimos en un esperimento, que aunque hecho toscamente, basta para probar lo que acabamos de decir. Habiendo mandado quitar del tonel *IFGE* el tubo *S*, y tapar el agugero en que estaba, se echó agua en este mismo tonel, hasta que estubo casi lleno el tubo *K*; y se halló despues de menearla con un palo para hacer salir el ayre, que bajaba su superficie muchas pulgadas en el cilindro *K*.

Ade-

238 Además de las medidas precedentes habia tambien otros vasos donde se echaba algunas veces el agua que despues se media con padrones propuestos, especialmente con el cubo *X*. Pero siempre que se podia se la echaba inmediatamente en un barril *PRTQ*, ó en el tonel *IFGE* para evitar las mermas y los errores que estas pueden ocasionar en las medidas. Quando en qualquiera de los dos casos no llegaba el agua ó pasaba del punto *K*, se determinaba lo que *faltaba* ó *sobraba* por medio del cubo *X*. Fig.

239 Es notorio que la superficie del agua de un vaso, puede pasar sus bordes mas de una linea sin verterse. Para quitar este exceso en la medida del agua que ha de caber en el cubo *X* enteramente lleno, se pasó muchas veces por su base superior, muy de nivel, una regla que no dejaba debajo mas que la cantidad precisa de agua para llenar la cabida del cubo. Este padron tenia toda la exactitud que se puede desear. Sirvió para determinar el peso del agua de las fuentes de Mezieres. La cantidad que en él cabía, pesaba 8 libras 11 onzas 6 dragmas, de donde se sigue que el pie cúbico pesa 69 libras 14 onzas. El agua de que hablamos es muy cristalina y excelente para beber. Este esperimento se hizo á principios de Septiembre del año de 1766, con un tiempo muy hermoso.

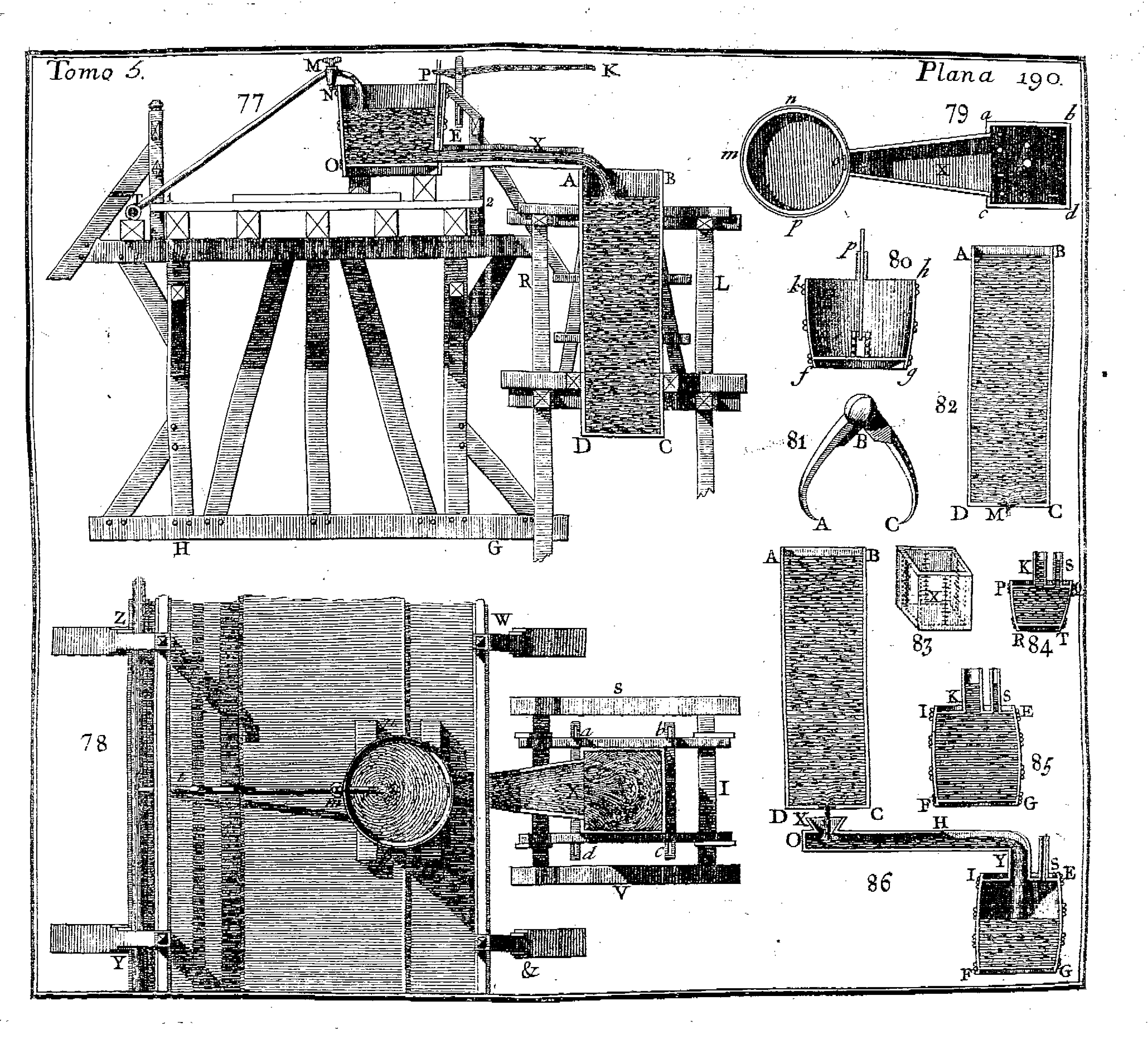
240 El tiempo se midió ó con un excelente relox que señalaba los segundos, ó las mas veces con el simple péndulo de segundos. Compónese este péndulo, como todos saben, de un hilo de seda ó alaton, del qual colgaba

una

Fig. una bala de plomo de 3 ó 4 lineas de diámetro, cuyo centro distaba del punto de suspension 3 pies 8 $\frac{1}{2}$ lineas, y cada oscilacion, suponiéndola muy corta, era exactamente de un segundo. Esta es la longitud del péndulo que señala los segundos en París, cuya longitud no es una misma en todos los Paises por la razon insinuada (IV. 274), y por lo que declararemos mas por menor en otro lugar.

241 En los quince primeros esperimentos siguientes, nos valimos del depósito cuya descripcion dimos (218), y le representan las figuras 77, 78, 79, 80. Solo añadiremos aquí que el canal *X* que lleva el agua desde el cubo al depósito, estaba inclinado del lado del cubo, con la mira de minorar la velocidad del agua provisional, y precaver que comunicase alguna conmocion á la masa que estaba en el depósito.

242 Para coger cómodamente el agua que salia por agugeros hechos en el fondo del depósito, sirvió un canal largo *YOXH* armado de un embudo fijo *X*, y tapado en la mayor parte de su longitud con la tabla *XH*. Este canal llevaba el agua al vaso de aforo, pongo por caso, al tonel *IFGE*. No se empezó á coger el agua hasta despues que la evacuacion estuvo bien corriente. El que tenia á su cargo hacer correr el embudo *X* por debajo del agugero, oía contar las oscilaciones del péndulo. Podia tambien seguir facilmente con la vista el movimiento de la bala, y coger con cortísima diferencia el primer instante de la oscilacion, desde la qual se habia acordado empezar la operacion. Lo propio


77
78
79
80
81
82
83
84
85
86

pio diremos del último instante de la evacuacion. Fig.

243 Por lo que mira al agua que salia por aberturas 87.
laterales, se cogía con el tonel *IFGE* por medio de un embudo grande *ZV* de hoja de lata, que tenia en lo interior de su parte superior un poco de heno ó paja, para impedir que el agua saltára.

244 No es indiferente, por lo que mira á la cantidad de la evacuacion, que el agua salga por un orificio hecho en una pared delgada, ó por un cabo de tubo cuyas paredes siga, conforme se hará patente dentro de poco. Consideraremos por su orden todos los diferentes casos.

Entre todos los esperimentos que propondremos no hay ninguno que no se haya repetido muchas veces, y variado de muchos modos.

I. *Evacuaciones por orificios hechos en paredes delgadas.*

245 Los orificios de que hablamos en este lugar se habian hecho muy perpendicularmente en planchas de cobre que tenian cerca de $\frac{1}{2}$ linea de grüeso. Primero referiremos los hechos; despues manifestaremos las consecuencias que de ellos se deducen.

246 Esperimentos I, II, III.. VI. En todos estos esperimentos, el agua se mantuvo en el depósito á la altura constante de 11 pies 8 pulgadas 10 lineas mas arriba de cada orificio, y se repararon los hechos que siguen.

I. En 50 segundos una abertura orizontal y circular

de

Fig. de 6 lineas de diámetro dió 1 pie cúbico de agua + 198 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 1926 pulgadas cúbicas.

II. En 90 segundos, una abertura orizontal y circular de 1 pulgada de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua + 97 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13921 pulgadas cúbicas.

III. En 21 segundos, una abertura orizontal y circular de 2 pulgadas de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua — 803 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13021 pulgadas cúbicas.

IV. En 50 segundos, una abertura orizontal y rectangular de 1 pulgada de largo, y 3 lineas de ancho dió 1 pie cúbico de agua + 716 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 2444 pulgadas cúbicas.

V. En 71 segundos, una abertura orizontal y quadrada de 1 pulgada de lado dió 8 pies cúbicos de agua + 160 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13984 pulgadas cúbicas.

VI. En 17 segundos, una abertura orizontal y quadrada de 2 pulgadas de lado dió 8 pies cúbicos de agua — 405 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13419 pulgadas cúbicas.

Resultado de estos esperimentos.

247 Una vez que la altura del fluido se mantiene constantemente la misma respecto del orificio todo el tiempo que dura la evacuacion, y sale por lo mismo el agua por dicho orificio con una velocidad uniforme, es evidente que las

las cantidades de agua, que dá en tiempos diferentes una misma abertura, son entre sí como los tiempos mismos. Así, reduciendo todos los tiempos de las evacuaciones propuestas á una misma medida, y tomando 1 minuto por esta medida comun, formaremos la tabla siguiente solo con hacer unas proporciones. Como es imposible estemos seguros de que un mismo esperimento, bien que repetido muchas veces, sea exacto sin diferencia de 1 ó 2 pulgadas, mayormente quando es considerable el gasto de agua, no nos ha parecido del caso embrollar nuestras tablas con las fracciones que las proporciones suelen dar. Quando estas fracciones son menores que $\frac{1}{2}$, no las llevamos en cuenta; y quando valen $\frac{1}{2}$ ó mas de $\frac{1}{2}$, ponemos 1 en su lugar. Fig.

Altura constante del agua mas arriba de cada orificio = 11 pies 8 pulgadas 10 lineas.	Número de pulg. cúbicas de agua, que salieron en 1 minuto.
Por el orif. circ. de 6 lin. de diam.	2311
Por el orif. circ. de 1 pulg. de diam.	9281
Por el orif. circ. de 2 pulg. de diam.	37203
Por el orif. rect. de 1 pulg. por 3 lin.	2933
Por el orif. quad. de 1 pulg. de lado	11817
Por el orif. quad. de 2 pulg. de lado	47361

248 Esperimentos VII y VIII. El agua salia por orificios verticales, y se la mantenia en el depósito á la al-

 tu-

Fig. tura constante de 9 pies mas arriba del centro de cada abertura en cada esperimento.

I. En 55 segundos, una abertura vertical y circular de 6 lineas de diámetro dió 1 pie cúbico de agua + 122 pulg. cúbicas, esto es, en todo 1850 pulg. cúbicas.

II. En 100 segundos, una abertura vertical y circular de 1 pulg. de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua — 266 pulg. cúbicas, esto es, en todo 13558 pulg. cúbicas.

Resultado de estos esperimentos.

249 Reduciendo los tiempos de las evacuaciones á 1 minuto, y egecutando proporciones análogas á las de antes (248), se formará la tabla siguiente.

Altura constante del agua mas arriba del centro de cada orificio = 9 pies.	Número de pulg. cúbicas de agua, que salieron en 1 minuto.
Por el orif. circ. de 6 lin. de diám.	2018
Por el orif. circ. de 1 pulg. de diám.	8135

250 Esperimento IX y X. El agua salia por dos orificios iguales, cada uno al suyo, con los dos antecedentes; y se la mantenia en el depósito á la altura constante de 4 pies mas arriba del centro de cada abertura.

I. En 60 segundos, una abertura vertical y circular de 6 lineas de diámetro dió 1353 pulg. cúbicas de agua.

En

II. En 1 5 0 segundos, una abertura vertical y circular de 1 pulg. de diámetro dió 8 pies cúbicos de agua — 2 3 3 pulg. cúbicas, esto es, en todo 1 3 5 9 1 pulg. cúbicas. Fig.

Resultado de estos esperimentos.

2 5 1 Tomando, como hasta aquí, el minuto por la unidad de tiempo, se formará la tabla siguiente.

Altura constante del agua mas arriba del centro de cada orificio = 4 pies.	Número de pulg. cúbicas de agua, que salieron en 1 minuto.
Por el orif. circ. de 6 lin. de diám.	1 3 5 3
Por el orif. circ. de 1 pulg. de diám.	5 4 3 6

2 5 2 Esperimento XI. Manteniendo el agua en el depósito á la altura constante de 7 lineas mas arriba del centro de una abertura vertical y circular de 1 pulg. de diámetro, en 2 minutos 4 5 segundos, salió un pie cúbico de agua. Esto viene á ser lo mismo que si hubiera dado 6 2 8 pulg. cúbicas en 1 minuto.

La superficie del agua se bajó en longitud en la direccion del orificio; pero esta especie de medio embudo apenas fue reparable.

Si suponemos, como es costumbre, que el pie cúbico de agua contiene 3 6 *pintas* de París, se hallará que el gasto antecedente viene á ser de unas $1\,3\frac{1}{12}$ pintas por minuto. *Mariotte* que hizo el mismo esperimento, halló el gas-

Fig. to algo mayor. Pero me parece que puedo salir por fiador de la exactitud de mi operacion. La egecuté en una superficie de agua muy dilatada, sensiblemente inmobil; siendo así que en el esperimento de Mariotte el agua provisional que se echaba en el vaso para mantenerle lleno á la misma altura, podia ocasionar en él alguna comocion. Pero si la superficie sube mas arriba de las 7 lineas, ó baja mas abajo, saldrán resultados notablemente diferentes. Tambien puede suceder que Mariotte, y yo nos hayamos valido de padrones que no fuesen exactamente de una misma cabida. Finalmente se ha de tener presente que dicho Autor sacó varias veces resultados diferentes en este mismo asunto.

253 Reflexiones. Cada una de las tablas antecedentes manifiesta que *los gastos hechos en tiempos iguales por diferentes aberturas, siendo una misma la altura del fluido en el depósito, son entre sí, con corta diferencia, como las areas de dichas aberturas.* Porque tomemos, por egemplo, en la primera tabla, las cantidades 37203 pulgadas cúbicas, y 9281 pulgadas cúbicas, que dieron las dos aberturas circulares que tenian la una 2 pulgadas de diámetro, la otra 1 pulgada de diámetro, se verá que dichos dos gastos tienen uno con otro, con corta diferencia, la razon de 4 á 1, que es la que hay entre las dos aberturas. Lo mismo se verifica en los casos parecidos al que consideramos. Mas adelante averiguaremos porqué los gastos no son exactamente proporcionales á las aberturas.

254 Comparando una con otra dos qualesquiera de nues-

nuestras tablas, se hallará que *los gastos hechos en tiempos iguales, por una misma abertura, siendo distintas las alturas de los depósitos, son entre sí, con corta diferencia, como las raices quadradas de las alturas correspondientes del agua en los depósitos mas arriba de las mismas aberturas.* Así, por egemplo, si tomamos en las tablas II y III los gastos 8135 pulg. cúbicas, y 5436 pulg. cúbicas, que dió un mismo orificio de 1 pulgada de diámetro, siendo las alturas del agua en el depósito 9 pies, y 4 pies, se verá que dichos gastos están sensiblemente uno con otro en la razon de 3 á 2, la misma que hay entre las raices de las alturas. Averiguarémos tambien porqué esta proporcion no se verifica con todo rigor. Fig.

255 Síguese de lo que acabamos de decir (253 y 254) que *en general las cantidades de agua que gastan en el mismo tiempo diferentes aberturas, siendo distintas las alturas en los depósitos, están unas con otras en razon compuesta de las areas de las aberturas, y de las raices quadradas de las alturas de los depósitos.*

Porque si llamamos Q y q las cantidades de agua gastadas en un mismo tiempo por dos luces o y O, siendo la misma la altura de depósito; q y Q', las cantidades de agua gastadas, en el mismo tiempo, por una misma abertura O, con dos alturas distintas h y H de depósito, tendremos, en virtud de lo probado (253 y 254), $Q : q :: o : O$, y $q : Q' :: \sqrt{h} : \sqrt{H}$, cuyas proporciones multiplicadas ordenadamente dan $Q : Q' :: o\sqrt{h} : O\sqrt{H}$.

Fig. Esta regla general es bastante exacta para lo que se ofrece comunmente en la práctica. Pero quando se quisieren apreciar las evacuaciones con toda la exactitud posible, será preciso tener presentes las prevenciones que haremos dentro de poco.

256 En todo esto no hablamos, como se echa de ver, sino de orificios chicos en comparacion de la amplitud del depósito. Porque como el mayor que sirvió era un quadrado que tenia 2 pulgadas de lado, siendo así que la basa del depósito era un quadrado de 3 pies de lado, la superficie del primer quadrado era á la del segundo como 1 es á 324. Los resultados serian todavia los mismos aun quando fuesen los orificios mayores respecto de la amplitud del depósito. Hay sin embargo en esta razon un límite, pasado el qual los orificios grandes darian menos de lo que deben dar por la regla antecedente en comparacion de otros menores. Mas adelante determinaremos este límite.

257 Veamos ahora si la esperiencia concuerda con la teórica.

Hemos probado (144) que llamando t' el tiempo que gasta un cuerpo grave en caer desde la altura dada a; Q, la cantidad de agua que sale en un tiempo dado t, por un orificio chico K, siendo constante la altura h del depósito, tenemos $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'}$. Si llamamos tambien respectivamente Q', K', h' las cantidades análogas á Q, K, h, respecto de otro depósito, y suponemos que sean iguales los tiempos de las evacuaciones, será $Q' = \frac{2tK'\sqrt{ah'}}{t'}$. Luego Q : Q'

$Q' :: \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'} : \frac{2tK'\sqrt{ah'}}{t'} :: K\sqrt{b} : K'\sqrt{b'}$, cuya proporcion viene á ser la misma de antes (255). Por consiguiente prueban la teórica y la esperiencia que los gastos hechos en tiempos iguales por diferentes orificios, son como los productos de dichos orificios por las raices de las alturas de los depósitos. Fig.

258 Pero aunque los gastos efectivos estén unos con otros, sensiblemente por lo menos, en la misma razon que los gastos naturales y teóricos, no por esto se debe inferir que los primeros sean iguales con los segundos, porque sería falsa esta consecuencia, y lo probaremos.

Busquemos por medio de la fórmula $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'}$ el gasto que haria en 1 minuto un orificio circular de 1 pulgada de diámetro, siendo de 9 pies la altura del agua en el depósito, en el supuesto de que salga el fluido perpendicularmente al plano del orificio, y que ningun obstáculo altere su evacuacion natural. Haciendo $a = 15$ pies, $t' = 1$ segundo, hallaremos $Q = 13144$ pulg. cúbicas poco mas ó menos. Pero la esperiencia enseña (249) que el gasto que hace realmente el orificio propuesto no es mas que de 8135 pulg. cúbicas. Falta, pues, mucho para que el gasto efectivo sea igual con el gasto teórico. El primero es al segundo, con corta diferencia, como 100 es á 161,57, cuya razon discrepa poco de la de 5 á 8. Esta misma razon se verifica tambien, con cortísima diferencia, en todos los demás casos.

259 Dos son las causas de que pende la diminucion

Fig. del gasto, es á saber, el rozamiento y la contraccion de la vena fluida. El efecto de la primera es poco sensible; la merma del gasto se debe atribuir casi toda á la contraccion de la vena. A mas de esto, prevenimos que esta merma no proviene de diminucion alguna, sensible por lo menos, de la velocidad del fluido al salir del orificio. Porque,

1.° Enseña la teórica (136) que la velocidad al salir de todo orificio muy pequeño en comparacion de la latitud del depósito, proviene de toda la altura del fluido en el depósito mas arriba del mismo orificio.

2.° El esperimento de los surtidores de agua, que (quando salen por orificios hechos en paredes delgadas), suben casi á la altura de sus depósitos, y que por razon de la resistencia del ayre no suben tan alto como subirian, enseña que la velocidad al salir del orificio no padece alteracion ninguna sensible.

260 Síguese de aquí que se podrán determinar por lo dicho (143), con exactitud y arreglo á la esperiencia, las evacuaciones de los fluidos que salen de vasos que se mantienen constantemente llenos, por orificios chicos, solo con disminuir la area verdadera del orificio en la razon de 8 á 5, con corta diferencia, sin hacer mudanza alguna en los demás datos de la cuestion.

261 Esto manifiesta tambien que la razon entre la area del orificio y la area de la seccion de la vena contraída, qual nos la dió antes (221 y sig.) la medida inmediata del diámetro de la vena, es sensiblemente menor de la que es-

espresan los gastos. La de 141 á 100 que señaló Newton, es absolutamente defectuosa. La de 150 á 100, que nosotros hemos señalado (230), es todavia corta. Hemos tomado algo mayor el diámetro de la vena contraída. Pero si se considera que el rozamiento con los bordes del orificio disminuye el movimiento de las partecillas que mas contribuyen para la contraccion, se echará de ver que el diámetro de la vena contraída ha de ser en realidad algo mayor de lo que le dá el gasto. Fig.

262 Las evacuaciones que se hacen por aberturas laterales de altura notable respecto de la del depósito, esperimentan tambien los efectos de la contraccion. Esta siempre disminuye el gasto teórico en la razon de 8 á 5, con poca diferencia. Así, quando se quisiere aplicar á la práctica lo dicho (148), será del caso tener presente esta correccion.

263 Hemos señalado (259) en general y de un modo vago no mas, los efectos del rozamiento y de la contraccion. Se mezclan y complican una con otra estas dos causas de tal modo, que es dificultosísimo separarlas y señalar exactamente los efectos de cada una. Procuremos no obstante hacer, hasta cierto punto por lo menos, esta separacion. Empezaremos por el rozamiento.

264 Parece evidente que con una misma altura de agua en el depósito, la vena se ha de contraher del mismo modo al salir por dos orificios de una misma especie, de superficies desiguales, y ambos muy pequeños en com-

pa-

Fig. paracion de la amplitud del depósito. Si acaso hay entonces alguna diferencia en la contraccion, no puede menos de ser muy leve, ó como infinitamente pequeña. Así, se puede suponer en este caso que el rozamiento es la única resistencia que causa alguna diferencia, si la hay, en la razon que habrian de tener unos con otros los gastos. Pero sea la que fuere la naturaleza de esta resistencia, es constante que quanto mayor fuere el número de los puntos que rozan con el borde del orificio en comparacion de la estension de su superficie, tanto mas reparable será el menoscabo que el rozamiento ocasionare en el gasto. Así, de dos orificios semejantes y desiguales, el menor ha de dar menos que el otro á proporcion; porque la razon de los perímetros varía menos que la de las superficies. Si consideramos, por egemplo, dos orificios circulares, tales que el uno tenga 1 pulgada de diámetro, y el otro 2 pulgadas de diámetro, echaremos de ver que el primero ha de dar menos agua á proporcion que el segundo, porque como el perímetro del primero es la mitad del perímetro del segundo, siendo así que las superficies están en razon de 1 á 4 no mas, es evidente que respecto de las superficies, el primer orificio presenta mas puntos á la accion del rozamiento que el segundo. Esto mismo lo confirma la esperiencia, conforme se echa de ver en cada una de nuestras tablas. Luego podemos sentar esta regla general: *El rozamiento es causa de que entre muchos orificios semejantes, los chicos dén á proporcion menos que los grandes, con una misma altura de agua en el depósito.*

De

265 De las mismas observaciones se saca estotra regla: *Entre muchos orificios de igual superficie, aquel cuyo perímetro es menor, debe por razon del rozamiento dar mas agua que los demás, siendo una misma la altura del depósito.* Por esta razon los orificios circulares son en quanto á esto mejores que los demás. Porque entre todas las figuras isoperímetras el círculo es la que tiene mayor superficie (I. 515); ó lo que viene á ser lo propio, la circunferencia del círculo es la mas corta de todas las lineas que se puedan escoger para encerrar un espacio dado. Fig.

266 Supongamos ahora dos orificios iguales y semejantes, pero que estén á distancias desiguales de la superficie del agua en el depósito. Sean H y h dichas distancias, y supongamos H mayor que h. Una vez que en ambos casos es uno mismo el número de puntos que rozan; si hay alguna diferencia en los rozamientos, esta solo provendrá de las alturas H y h. Pero por otra parte, como la contraccion de la vena fluida puede no ser la misma respecto de un mismo orificio, siendo distintas las alturas del agua en el depósito, no es posible decidir si el rozamiento tiene algun influjo en las variaciones que se reparan en la proporcion de los gastos, á no ser que alguna teórica dé á conocer la naturaleza de dicha resistencia. Pero entre las diferentes hypótesis que se pueden seguir acerca de esto, vamos á proponer dos que tienen la ventaja de ser muy sencillas, siendo la segunda tal que parece no apartarse mucho de la verdad. Siempre entendemos hablar de la accion *media* del rozamiento,

dis-

Fig. distribuida entre toda la area del orificio. Pero es evidente que no es el mismo en toda la espresada estension, y que por ser efecto del movimiento de las partículas que resbalan inmediatamente en la arista del orificio, ha de ir menguando gradualmente desde la circunferencia al centro.

267 Imaginemos primero que el rozamiento sea proporcional á la presion ó á la altura del fluido en el depósito. Suponiendo que F represente esta fuerza respecto de una altura *dada* L, será $\frac{F}{L} \times H$ respecto de la altura H, y $\frac{F}{L} \times h$ respecto de la altura h. Luego podrá espresar $H - \frac{F}{L} \times H$, la fuerza que causa la evacuacion quando es H la altura, y $h - \frac{F}{L} \times h$ espresará la que produce la evacuacion quando la altura es h. Pero claro está que tenemos la proporcion $H - \frac{F}{L} \times H : h - \frac{F}{L} \times h :: H : h$. Por consiguiente los dos gastos que hace el orificio propuesto, llevando en cuenta el rozamiento, serian entre sí como si no hubiese rozamiento. Así, en esta primera hypótesi el rozamiento no coadyuvaría de ningun modo para alterar la razon de los gastos que hace un mismo orificio siendo diferentes las alturas del depósito. Pero padece sus dificultades esta hypótesi. ¿Porqué el rozamiento ha de seguir la razon de las alturas ó de los quadrados de las velocidades? Es indubitable que quantos mas son los puntos que rozan en un tiempo dado, tanto mayor es el efecto del rozamiento. Pero esto parece suponer que el rozamiento sea proporcional á la simple velocidad, y no se alcanza porqué su espresion ha de llevar el quadrado de dicha velocidad. No le lleva respecto de

los

los cuerpos sólidos, y parece que la ley ha de ser una misma en ambos casos. Fig.

268 Supongo, pues, en segundo lugar que el rozamiento sea proporcional á la simple velocidad, ó á la raiz de la altura del fluido en el depósito. En este caso, la fuerza que produce la evacuacion, siendo H la altura, es $H - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{H}$, y la fuerza que causa la evacuacion, siendo b la altura, será $b - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{b}$. Pero yá que $H > b$, tenemos $H - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{H} : b - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{b} > H : b$, conforme lo echará de ver el que considerare que el producto de los estremos es mayor que el producto de los medios. Luego en esta hypótesi, el rozamiento debe ser menos sensible con la mayor altura H que con la menor b. La variacion que esto causa en la razon de los gastos, es estremadamente corta respecto de orificios hechos en paredes delgadas; pero puede ser reparable en tubos de alguna longitud. Enseña con efecto la esperiencia, y lo manifestaremos dentro de poco, que respecto de diferentes alturas de depósitos un mismo tubo dá mas á proporcion con alturas grandes que con pequeñas; esto prueba que es exacta la hypótesi de que estamos hablando.

269 Sentado esto, veamos lo que los esperimentos que hemos referido nos enseñan acerca de las variaciones que padece la razon de los gastos que hace un mismo orificio con distintas alturas de agua en el depósito. Si se comparan unos con otros, por medio de nuestras tablas, los gastos de un orificio circular de 1 pulgada de diámetro, respecto de las tres alturas 11 pies 8 pulg. 10 lineas, 9 pies, 4 pies; se ha-

Fig. hallará que atendiendo á la proporcion de las alturas, el gasto es mayor respecto de una altura pequeña que respecto de otra mayor. Pero este resultado es cabalmente contrario al que se sacaría de lo dicho (268), si la variacion de que se trata proviniese del rozamiento. Inferamos, pues, que esta misma variacion no es efecto del rozamiento; y que su causa es la mayor ó menor contraccion de la vena, conforme la altura del fluido en el depósito es mayor ó menor. Esta esplicacion nos parece evidente. Porque yá que las partículas comprimen perpendicularmente el plano del orificio quando está todavia tapado, y quando se le llega á destapar, la contraccion es efecto del movimiento oblicuo de las partículas laterales; quanto mayor es este movimiento, ó quanto mayor es la altura del fluido en el depósito, tanto mas tambien se ha de contraher la vena fluida. Luego podemos sentar esta regla. *En virtud de un leve aumento que le sobreviene á la contraccion de la vena á medida que crece la altura del fluido en el depósito, el gasto debe menguar un poco.* Verdad es que á este efecto se le opone algun tanto el rozamiento; pero aquí se debe despreciar el efecto de esta última fuerza.

270 Modificando los resultados teóricos, por medio de las observaciones precedentes, se determinarán los gastos con una exactitud mayor de la que se necesita ó busca en la práctica comun, pero que siempre agrada al entendimiento, aun quando no la quiere aprovechar. Un egemplo lo acabará de manifestar.

Su-

Supongamos un depósito al qual se le mantiene constantemente lleno á la altura de 5 pies mas arriba de un orificio de 9 lineas de diámetro, hecho en una pared delgada: se pregunta ¿qué cantidad efectiva de agua dará este orificio en un minuto? Fig.

Busco primero por la fórmula (144), sin hacer correccion ninguna en el orificio, el gasto natural del mismo orificio, y hallo que en un minuto es de 5510 pulgadas cúbicas. Despues busco tambien el gasto natural de un orificio de 6 lineas de diámetro, con 4 pies de altura de agua en el depósito; este gasto es de 2191 pulgadas cúbicas, siendo así que el gasto efectivo correspondiente no pasa de 1353 pulgadas cúbicas (251). Pero es evidente que los dos gastos naturales que acabamos de determinar, han de ser entre sí con cortísima diferencia, como los dos gastos efectivos correspondientes. Porque infiriendo de la altura de 4 pies lo que ha de suceder con la de 5 pies, el gasto efectivo tendrá un poco de aumento; pero tambien si inferimos de un orificio de 6 lineas de diámetro lo que ha de suceder con un orificio de 9 lineas de diámetro, el gasto padecerá alguna diminucion: esto produce una compensacion, y no puede menos de introducir entre los gastos efectivos una razon muy aproximada á la verdadera. Haciendo, pues, esta proporcion, 2191 : 1353 :: 5510 pulg. cubicas: un quarto término 3402 pulgadas cúbicas, que será el gasto que se pide.

Lo mismo se practicará en las demás cuestiones de esta na-

Fig. naturaleza. Será menester valerse de compensaciones como la del egemplo propuesto.

271 Haremos otra observacion que podrá ser de alguna utilidad en la práctica.

La propondremos, para mayor claridad, en forma de egemplo. Supongo que con una misma altura constante de 4 pies en el depósito, haya dos orificios, el uno de 1 pulgada de diámetro, el otro incógnito, y tal que su gasto haya de ser cabalmente la quarta parte del gasto del primero en un mismo tiempo: hemos de determinar qual ha de ser el diámetro del segundo orificio.

Es constante que si no hubiese ninguna causa de atraso, y diesen las aberturas pequeñas tanto á proporcion como las grandes, el orificio que buscamos debería tener *6* líneas de diámetro. Pero como los orificios chicos dan un poco menos á proporcion que los grandes, el orificio de que se trata ha de tener algo mas de *6* lineas de diámetro, y le determinaremos como sigue.

Hemos visto (251) como con una altura constante de 4 pies de agua en el depósito, un orificio de 1 pulgada de diámetro dá en 1 minuto, 5436 pulgadas cúbicas de agua. Tomemos la quarta parte de esta cantidad, y sacaremos 1359 pulgadas cúbicas que serán el gasto del orificio que buscamos. Pero (251) un orificio de *6* lineas de diámetro gasta en 1 minuto, 1353 pulgadas cúbicas. Estos dos gastos discrepan poco uno de otro; luego los dos orificios discrepan poco, y con mas razon sus perímetros

dis-

discrepan todavía menos á proporcion de sus estensiones. Así, la desigualdad que causa el rozamiento en los dos orificios, ha de ser como infinitamente pequeña. Luego si hacemos esta proporcion 1353 : 1359 :: 36 : un quarto término, este quarto término espresará en lineas quadradas el quadrado del diámetro del orificio que se busca. Concluyendo el cálculo, saco que dicho orificio ha de tener como unas *6,014* lineas de diámetro. El exceso que lleva este diámetro al de *6* lineas es insensible. Pero hay casos en que estos excesos no son de despreciar, y á estos casos se aplicará el método que acabamos de practicar. Fig.

272 Hemos seguido (248) la regla comun de que en las evacuaciones por orificios verticales ó inclinados, cuyas alturas son sensiblemente comparables con las de los depósitos, las velocidades de los diferentes filetes son iguales con las que adquiriría un cuerpo grave cayendo de las alturas correspondientes de la superficie del agua. Pero entonces ofrecimos indagar si concuerda con la esperiencia. Egecutémoslo, pues, ahora.

Supongamos un orificio circular y vertical de 1 pulgada de diámetro, cuyo centro dista constantemente 7 lineas de la superficie del agua, como antes (252). Por la fórmula (155) saco que en 1 minuto el gasto natural debería ser unas *966* pulgadas cúbicas. Pero la esperiencia enseña que el gasto efectivo es de *628* pulgadas cúbicas no mas. Ahora bien, si teniendo presentes las prevenciones que hemos hecho, se busca el gasto efectivo por

Fig. un orificio orizontal de 1 pulgada de diámetro, distante de la superficie del agua una cantidad igual á la altura media determinada (156), se hallará que este gasto efectivo es tambien 628 pulgadas cúbicas, con cortísima diferencia. Se echa, pues, de ver por la comparacion del gasto natural con el gasto efectivo, que la regla de que hablamos es con poca diferencia tan exacta como la que nos sirvió (143) para determinar el gasto por un orificio pequeño orizontal ó lateral, cuyos puntos se pueden considerar todos como igualmente distantes de la superficie del fluido. Pero para esto es menester que el orificio vertical ó inclinado (bien que de una estension sensible) no sea muy considerable respecto de la amplitud del depósito; y que á mas de esto la superficie del agua llegue mas arriba del borde superior del orificio (158).

Lo propio he hallado por medio de otros esperimentos hechos con orificios rectangulares y verticales; no los refiero, porque nada enseñan de nuevo.

273 Concluiremos con dar una tabla comparativa del gasto natural con el gasto efectivo, respecto de un orificio de 1 pulgada de diámetro, siendo distintas las alturas de depósito. Los gastos efectivos que no se han sacado inmediatamente de los esperimentos, se han determinado con las precauciones espresadas (270 y 271); y todos se han de considerar tan exactos, con corta diferencia, como si fuesen resultados de esperimentos directos. Por medio de esta tabla y de las reglas precedentes, se determinarán facilmen-

te

te los gastos respecto de otros orificios hechos en paredes delgadas, y de otras alturas de depósitos. Mas adelante manifestaremos varios usos de esta tabla; por ahora nos ceñiremos á aplicarla á un caso particular. Fig.

Se nos encarga averiguemos el gasto que hará en 1 minuto un orificio de 3 pulgadas de diámetro, con 30 pies de altura de depósito.

Una vez que los gastos naturales de dos orificios, en tiempos iguales, son como los productos de los mismos orificios por las raices de las alturas de los depósitos (257), y porque el gasto natural de un orificio de 1 pulgada de diámetro, con 15 pies de altura de depósito, es por nuestra tabla, 16968 pulgadas cúbicas en 1 minuto; tendremos la proporcion, $1\sqrt{15} : 9\sqrt{30} :: 16968$ pulgadas cúbicas: un quarto término 215961 pulgadas cúbicas, gasto natural del orificio propuesto. Disminuyendo este gasto en la razon de $8\frac{1}{10}$ á 5, por causa de la contraccion, sacaremos 133309 pulgadas cúbicas, que serán el gasto efectivo del mismo orificio.

Fig.

Alturas constantes del agua en el depósito sobre el orificio, espresadas en pies.	Gasto natural en 1 minuto, por un orificio de 1 pulgada de diámetro, espresada en pulgadas cúbicas.	Gasto efectivo en el mismo tiempo, por el mismo orificio, espresado tambien en pulgadas cúbicas.
1	4381	2722
2	6196	3846
3	7589	4710
4	8763	5436
5	9797	6075
6	10732	6654
7	11592	7183
8	12392	7672
9	13144	8135
10	13855	8574
11	14530	8990
12	15180	9384
13	15797	9764
14	16393	10130
15	16968	10472

Eva-

II. *Evacuaciones por caños aditicios.* Fig.

274 Quando el agua sale de un vaso por un orificio hecho en una pared delgada, la contraccion que siempre padece la vena fluida, disminuye mucho el gasto, conforme hemos visto. Indaguemos si sucederá lo propio, quando el agua saliere por un cabo de caño añadido siguiendo sus paredes. Propondremos lo que acerca de esto hemos averiguado por el mismo orden que seguimos en nuestras investigaciones.

275 Como nuestro primer empeño fue comparar uno con otro los gastos en ambos casos, quisimos determinar primero el gasto de un caño aditicio de 2 pulgadas de diámetro, para compararle con el de un orificio de 2 pulg. de diámetro tambien, hecho en una pared delgada. Con esta mira hicimos acomodar en el fondo del depósito *ADCB* un tubo cilíndrico vertical *MOPN* de cobre muy bruñido por adentro que tenia 2 pulgadas de diámetro, y 2 pulgadas de altura. Estando tapado este tubo con un tapon, y estando el depósito lleno de agua á la altura de 11 pies 8 pulgadas 10 lineas mas arriba de *MN*, quando se quitó el tapon para dejar salir el fluido, el agua no siguió las paredes del caño, y la vena se contrajo del mismo modo que si el orificio se hubiese hecho en una pared delgada. Se la veía al agua resbalarse por la arista de la base superior del caño, del mismo modo cabalmente que en los esperimentos antecedentes, y salió vano quanto se practicó para mudar su curso. Jamás fue posible obligarla á seguir las paredes del ca-

Fig. caño. No podíamos, pues, lograr nuestro intento con un tubo del espresado diámetro, sino con darle mas longitud; pero sobre que entonces maliciábamos que nos costaría trabajo egecutar con felicidad el esperimento por causa del mucho gasto del tubo, tampoco lo intentamos, porque por otra parte la prolongacion del tubo hubiera podido ocasionar un rozamiento sensible que queríamos evitar en esta investigacion. Estas consideraciones me obligaron á valerme de un caño de un diámetro menor. Se acomodó, pues, en el fondo del depósito un caño cilíndrico vertical, tambien de cobre muy bruñido por adentro, de 1 pulgada de diámetro, y 2 pulgadas de altura. Habiéndose llenado el depósito como antes, despues de quitado el tapon que tapaba el caño, el agua siguió sus paredes, y corrió á caño lleno. Se pudo, pues, valuar el gasto de este caño, y compararle con el gasto de un orificio de 1 pulgada de diámetro hecho en una pared delgada. Pero repitiendo varias veces este esperimento, se nos vino á las manos otro de una especie bastante estraña que nos proporcionó hacer la comparacion mencionada con toda la exactitud posible.

89. 276 Como la violencia del chorro no permitía tapar facilmente el caño por afuera, me ocurrió atajar la evacuacion por medio de una tablita *K* fijada á escuadra al estremo de una pértica larga *R*, y cubierta con muchos pedazos de sombrero. No era dificultoso aplicar dicha tablita á la abertura superior del caño. Pero quando se quitaba para dar lugar á la evacuacion, unas veces el agua seguia

las

las paredes del caño, otras se separaba de ellas, y la vena Fig. se contraía como antes. Con un poco de egercicio se adquirió la destreza necesaria para causar á arbitrio qualquiera de los dos efectos. El mismo fenómeno se reparó despues de reducida la altura del caño á 1 pulgada 6 lineas, con la diferencia sin embargo de que no se conseguia facilmente entonces que el agua siguiese las paredes del caño. Las hubiera seguido todavia menos, y quizá hubiera sido imposible conseguirlo, si el caño no hubiese tenido mas que 1 pulgada de altura. Es cierto por lo menos que habiendo reducido la altura del caño á $\frac{1}{2}$ pulgada, el agua siempre se separó de las paredes, y jamás se la pudo obligar á que las siguiese aun con poner el tapon delante del orificio inferior, ó tapándole con la palma de la mano. Como quiera, la comodidad de hacer salir el agua á caño lleno, ó hacerla correr no mas por su borde superior, quando el caño no tiene mas que 18 lineas de altura, tiene la ventaja de que siendo el orificio de entrada de todo punto el mismo en ambos casos, y siendo por otra parte el tubo perfectamente cilíndrico, la una de las causas de equivocacion en la razon de los gastos, la que pende de las imperfecciones inevitables en las capacidades de los orificios, desaparece aquí casi de todo punto. Tampoco es de temer que la altura del caño pueda ocasionar un rozamiento que altere sensiblemente la razon que se busca; porque es muy corta respecto de la que daremos al depósito.

277 Supuestas estas operaciones preliminares; para

Fig. lograr no solo mi primer intento, sino tambien para comparar uno con otro los gastos por tubos de igual diámetro y alturas diferentes, mandé acomodar en el fondo del depósito *ADCB* un caño cilíndrico vertical, muy bruñido por adentro que tenia 1 pulgada de diámetro interior, y cuya altura que al principio fue de 4 pulgadas, se fue disminuyendo succesivamente. En los tres primeros esperimentos siguientes, el agua salió á caño lleno, y en el quarto procuramos que se separase de sus paredes.

278 Esperimentos I, II, III, IV. El agua del depósito se mantuvo en todos los casos á la altura constante
88. de 11 pies 8 pulgadas 10 lineas mas arriba de la base superior *MN* del caño *MOPN*.

I. Teniendo el caño 4 pulgadas de altura, y siguiendo el agua sus paredes, en *66* segundos salieron 8 pies cúbicos de agua — 323 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13501 pulgadas cúbicas.

II. Teniendo el caño 2 pulgadas de altura, y siguiendo el agua sus paredes, en *66* segundos salieron 8 pies cúbicos de agua — 417 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13407 pulgadas cúbicas.

III. Teniendo el caño 1 pulgada *6* lineas de altura, y siguiendo el agua sus paredes, en *66* segundos salieron 8 pies cúbicos de agua — 439 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 13385 pulgadas cúbicas.

IV. Teniendo el caño 1 pulgada *6* lineas de altura, como en el esperimento antecedente, pero resbalando el agua

por

por la arista de su base superior, en 9'1 segundos salieron Fig.
8 pies cúbicos de agua + 254 pulgadas cúbicas, esto es, en todo 14078 pulgadas cúbicas.

Resultado de estos esperimentos.

279 Estos esperimentos dan la tabla siguiente.

La altura constante del agua en el depósito mas arriba de la base superior del tubo, es de 11 pies 8 pulg. 10 lineas; y el diámetro del tubo es de 1 pulg.	Alturas variables del tubo espresadas en lineas.		Número de pulg. cúbicas de agua gastada en 1 min.
	48	Saliendo el agua á caño lleno.	12274
	24		12188
	18		12168
	18	No siguiendo el agua las paredes.	9282

280 Reflexiones. Quando el agua sale por un caño vertical, como en los tres primeros esperimentos antecedentes, quanto mas largo es el caño, tanto mayor es el gasto. Los diferentes gastos siguen, con corta diferencia, la razon de las raices quadradas de las alturas del agua en el depósito mas arriba de la base inferior del caño. Pero aquí solo se trata de caños que tienen poca altura en comparacion de la del depósito. Mas adelante trataremos del movimiento del agua por caños largos.

281 Si comparamos uno con otro los gastos del ter-

ce-

Fig. cero y quarto esperimento, echaremos de ver que los dos gastos 12168 pulgadas cúbicas, y 9282 pulgadas cúbicas tienen entre sí una razon algo mayor que la de 13 á 10. Pero se ha de reparar que la altura del agua mas arriba del orificio de salida no es la misma en ambos casos; es mayor en el primero que en el segundo. El rozamiento á lo largo de las paredes del caño ha de minorar un poco el gasto en el primer caso, pero esta diminucion es muy leve, y no puede causar ninguna alteracion sensible en la razon de los dos gastos propuestos.

282 No atenderemos, pues, á esta alteracion; y para comparar uno con otro los dos gastos siendo una misma la altura de depósito, repararemos que en el tercer esperimento la altura del agua en el depósito mas arriba del orificio de salida $=$ 11 pies 8 pulgadas 10 lineas $+$ 18 lineas $=$ 1708 lineas; y que en el quarto la altura del depósito $=$ 11 pies 8 pulgadas 10 lineas $+$ 6 lineas $=$ 1696 lineas, porque la seccion de la vena contraída dista como unas 6 lineas del fondo del depósito. Así, para reducir el gasto del esperimento quarto al valor que ha de tener siendo de 1708 lineas la altura en el depósito, haremos (254) la proporcion $\sqrt{1696} : \sqrt{1708} :: 9282$ pulg. : al gasto que se busca $=$ 9314 pulg. cúbicas. Muy poco falta para que los dos gastos 12168 pulg. cúbicas, y 9314 pulg. cúbicas estén ahora uno con otro en la razon de 13 á 10.

283 Hemos hallado (258) que el gasto natural

ral y teórico es al gasto afecto de la contraccion ordinaria que se verifica al salir de los orificios hechos en paredes delgadas, casi como 8 á 5, ó como 16 es á 10; y acabamos de verificar que el gasto por un caño añadido es al gasto afecto de la contraccion ordinaria, como 13 es á 10. Inferamos, pues, que *siendo uno mismo el orificio de salida, el gasto natural, el gasto por un caño añadido, el gasto por un orificio hecho á una pared delgada son entre sí, con poca diferencia, como los tres números* 16, 13, 10. Son bastante exactas estas razones para los usos de la práctica. Fig.

284 Resulta de aquí una consecuencia análoga á lo dicho (260). Las evacuaciones por caños añadidos, de algunas pulgadas de altura, se podrán determinar por el método teórico (143), disminuyendo la area verdadera del orificio esterior en la razon de 16 á 13, y tomando por altura del depósito la vertical que coge desde el centro de dicho orificio hasta la superficie superior del agua, prolongándola quando fuere menester.

285 De lo mismo se echa de ver tambien que los caños añadidos no destruyen sino parte de la contraccion. Con efecto, es evidente que el fluido no puede pasar desde el depósito á dichos tubos, sin que las partículas laterales tomen direcciones oblicuas. Verdad es que la oblicuidad de estos movimientos mengua un poco; despues daremos la razon. En general siempre que un fluido movido en un vaso qualquiera que tiene desigualdades en su capacidad, pasa de un lugar á otro mas angosto, hay necesariamente

una

Fig. una contraccion mayor ó menor segun la diferencia de los casos. La mas reparable de todas, que por esta razon llamaremos *contraccion de la primera especie*, es la que sucede al salir por un orificio chico hecho á una pared delgada de un depósito grande.

286 Como la vena fluida, quando sale á caño lleno, tiene la forma cilíndrica á la salida, ó es entonces perpendicular al plano del orificio esterior, es evidente que la merma del gasto no se puede atribuir á la contraccion esterior;
88. su verdadera causa es que la velocidad del fluido en OP no es efecto de toda la altura KO del depósito. Sea h la altura que corresponde á la velocidad en OP; K, la area del orificio OP; Q, la cantidad de agua que sale en un tiempo dado t; t', el tiempo que gasta un cuerpo grave para caer de la altura a; sacaremos como antes (143) $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'}$, y por consiguiente $h = \frac{Q^2t'^2}{4K^2t^2a}$. Luego si hacemos, como en el tercer esperimento, $Q = 12168$ pulg. cúbicas, $t = 60$ segundos, $K = 36 \times \frac{355}{113}$ lineas quadradas, y á mas de esto $a = 15$ pies $= 2160$ lineas, $t' = 1$ segundo; sacaremos $h = 1111$ lineas. Pero la altura $KO = 1708$ lineas; luego la altura h es á la altura del agua en el depósito, como 1111 á 1708, ó como 100 es á 153,73, con corta diferencia, ó como 2 á 3 con poca diferencia.

287 Luego los surtidores de agua que salen por caños añadidos no han de subir tan arriba como los que salen por orificios hechos en paredes delgadas. Porque estos, pres-

cin-

cindiendo de la resistencia del ayre, subirian sensiblemente á la altura de sus depósitos. Esta consecuencia concuerda con la esperiencia, conforme se manifestará en su lugar. Fig.

288 Sea el caño *MOPN* vertical como en la primera figura, ú orizontal como en la segunda, dará la misma cantidad de agua, con tal que sea siempre igualmente largo, y que el orificio esterior *OP* esté metido á igual profundidad respecto de la superficie del agua en el depósito. En los esperimentos antecedentes nos valimos de un caño vertical, porque tambien queríamos averiguar las razones de los gastos á medida que este caño es mas ó menos largo. 88. 90.

289 Supongamos ahora que el agua salga por un caño cónico *MOPN* cuya base mayor *MN* está del lado del depósito. La forma de este caño facilita la entrada del agua en *MN*; y con tal que no sea muy abierto de boca, ha de dar mas que el caño cilíndrico *mOPn* que tiene el mismo orificio esterior *OP*. Así lo esperimentó el Marques *Polenì* en su tratado *de Castellis*. Habiendo acomodado en un depósito que se mantenia lleno á la misma altura constante de 256 lineas mas arriba del centro del orificio, un caño cónico que tenia 92 lineas de largo, 33 lineas de diámetro en su orificio del lado del depósito, 26 lineas de diámetro en el orificio esterior; despues un caño cilíndrico que tenia de largo 91 lineas, 26 lineas de diámetro, halló el citado Autor que para llenar un mismo vaso ó padron en que cabian 73035 pulg. cúbicas, el caño cónico gastaba 2′ 57″, y el caño cilíndrico 3′ 7.″ Y saliendo el agua por 91.

un

Fig. un orificio de 26 lineas de diámetro, hecho en una pared delgada, se gastaban 4′ 36″ en llenar el mismo vaso.

290 El mismo Autor compara tambien una con otra las evacuaciones por caños cónicos de una misma longitud, y de un mismo orificio esterior, pero de diferentes orificios del lado del depósito. La longitud comun de los caños de que se valió era de 92 lineas, y el diámetro de cada orificio esterior, de 26 lineas. Los diámetros de los orificios interiores eran respectivamente de 33, 42, 60, 118 lineas. Manteniéndose siempre el agua á la misma altura; el primer caño llenó el padron en 2′ 57″; el segundo en 2′ 58″; el tercero en 3′; el quarto en 3′ 5.″

291 Si reducimos á nuestro modo de calcular todos los gastos espresados en los dos últimos artículos, hallaremos que siendo la altura constante del agua en el depósito de 256 lineas, en 1 minuto,

El orificio hecho en una pared delgada dá	15877 pulg. cub.
El caño cilíndrico	23434
El primer caño cónico	24758
El segundo	24619
El tercero	24345
El quarto	23687

El primer gasto es menor de lo que se inferiría de nuestros esperimentos; y en esto Poleni se aparta mas que nosotros del resultado que se hallaría en virtud de los esperimentos que hizo Mariote para determinar la pulgada de agua.

Sin

292 Sin detenernos en examinar si Poleni hizo sus esperimentos con toda la exactitud que cabe, y si en particular su padron era algo defectuoso por exceso, como me lo presumo, ciñámonos á comparar unos con otros los gastos de la tabla antecedente, é inferamos Fig.

1.º Que el gasto efectivo es siempre menor que el gasto natural, el qual es 27425 pulgadas cúbicas en 1 minuto.

2º Que con ensanchar hasta cierto punto el orificio interior del caño, se aumenta el gasto; pero no se debe ensanchar mucho, porque esta mayor latitud ocasiona una contraccion esterior con lo que se reduce la evacuacion á la clase de las que se hacen por orificios hechos en paredes delgadas, y que son, entre todos, los que gastan menos.

293 Si se le diera al caño *MOPN* otra posicion, de modo que su base menor *OP* estuviese del lado del depósito, y la mayor á la parte de afuera, daría mas agua que el caño cilíndrico *mOPn*, porque la divergencia de los lados *OM*, *PN* hace que la vena sea divergente, y muda por consiguiente el movimiento oblicuo que tendrian las partes al pasar del depósito al caño. Pero se percibe que el exceso del primer gasto respecto del segundo tiene sus límites que no pueden ser muy dilatados. Por otra parte, si el caño cónico, siempre colocado como hemos dicho, no tiene bastante longitud respecto del diámetro de su mayor base, el agua no seguirá sus paredes, y habrá en su entrada contraccion de la primera especie. Esto sucede particularmente

quan-

Fig. quando está acomodado verticalmente en el fondo del depósito.

294 Entre todos los tubos añadidos que se pueden usar para conseguir la mayor cantidad posible de agua en un tiempo dado, el mas ventajoso es aquel que tiene la forma que toma naturalmente la vena fluida al salir de un orificio hecho en una pared delgada. Para darnos á entender,
92. sea *MSON* la pirámide truncada ó el conoide formado por la vena desde el orificio *MN* hasta el parage *SO* donde deja de contraerse y empieza á tomar la fórma cilíndrica. Imaginemos que *MS*, *NO* lleguen á ser la paredes de un caño *MSON*, qne no hagan mas que tocar la superficie del agua sin estorvar en ningun modo su movimiento. Es evidente que como la velocidad del fluido en *SO* proviene de toda la altura *rb* del depósito (259), y debiéndose considerar la seccion *SO* como el verdadero orificio por el qual se hace la evacuacion, el gasto efectivo al salir de *SO* tendrá toda la plenitud posible, y será igual al gasto natural y teórico.

295 Esta observacion puede aplicarse á algunos casos prácticos, quando se trata de desviar alguna porcion de agua de un rio, de un aqueducto &c. por medio de un canal ó encañado lateral. En la construccion de la parte anterior de dicho canal se imitará la forma *MSON*, y la otra porcion se hará prismática ó cilíndrica. Se habrá de tener presente que la area *MN* es á la area *SO*, como 8 es á 5, con corta diferencia, y que la distancia *rp* de *SO* á *MN*

es

es igual, con poca diferencia, á la mitad de la latitud *pM* ó *pN*. Por lo que mira á los lados *MS*, *NO*, son sensiblemente rectilineos. Su figura exacta es como indeterminable por teórica. Fig.

296 Volvamos á los caños cilíndricos, y averiguemos porqué dán mas agua que los orificios hechos en paredes delgadas. Consideraremos primero el caso mas sencillo.

Sea *MOPN* un caño cilíndrico orizontal acomodado en el depósito *ADCB*. Concibamos primero que antes de la evacuacion el caño esté tapado con una plancha puesta en *MN*, y que despues esta plancha se aniquile de repente. Al entrar la vena por *MN* se inclina á contraerse, y las partículas *M*, *N* trazarian sin cesar las parábolas *Mmx*, *Nny*, si tuviesen libertad para ello. Luego si el punto *P*, que es el estremo del caño, está entre los puntos *N*, *y*, habrá contraccion de la primera especie, y la evacuacion se hará del mismo modo que si el caño no tuviera mas altura que el grueso de una pared delgada. Pero si dicho punto *P* está mas allá de *x*, conforme pinta la figura, el choque que hace el agua en *xy*, hará que el agua suba, y se derrame en todo el espacio *MuxN*, y por lo mismo el agua saldrá á caño lleno. La misma hinchazon se verificará tambien, bien que con alguna mas dificultad, quando el punto *P* estuviere entre los puntos *x*, *y*. En ambos casos se pega por último el agua á las paredes del caño ácia su parte esterior, y llena todo el orificio *OP*. Pero quando el fluido sale así á caño lleno, es evidente que los movimientos na- 90.

Fig. turales de las partículas *M*, *N* padecen alguna alteracion, y llegan á ser menos oblicuos respecto del plano del orificio *MN*. Luego, en virtud de esta diminucion de oblicuidad, ha de pasar mas agua por *MN* que si la longitud del caño fuese infinitamente pequeña. Luego el caño *MOPN* ha de dar mas agua que el orificio *MN* hecho en una pared delgada.

297 Hay todavia mas. Como los movimientos oblicuos de las partículas *M*, *N* son alterados por la resistencia del agua anterior, la qual hallándose precisada á mudar su direccion primitiva para seguir las paredes del caño, ha perdido indispensablemente alguna parte de su velocidad primitiva, la resistencia de que se trata ha de tener por precision cierta intensidad para obrar su efecto tan completo como es posible. Por consiguiente el caño *MOPN* no ha ha de ser muy corto, y hay para él, en cada caso, una longitud adequada para dar un *máximo* de evacuacion. Pero esta longitud no puede ser muy considerable, porque al paso que llega á ser mas largo el tubo, el rozamiento con lo interior de sus paredes se hace mas sensible, y disminuye tanto mas el gasto.

298 El modo con que hemos imaginado (296) primero que el caño está tapado, es puramente ideal; pero se percibe que siempre se hará igualmente la evacuacion, si estando tapada, por egemplo, con un tapon la entrada esterior del caño, se quita despues este tapon para dar salida al agua. Estará tambien mas propensa en este caso á seguir las pare-

des

des del caño por poco largo que sea. Porque desde el primer instante las partículas *M*, *N* esperimentarán alguna resistencia, ó por parte del tapon que no cederá, por lo comun, á su impulso con bastante velocidad, ó por parte del agua que hubiese en la cavidad que hay entre la cabeza del tapon y el orificio *MN*; cuya resistencia hace que la vena se hinche, y la precisa á que salga á caño lleno. Fig.

Las mismas observaciones se aplicarán sin dificultad, con algunas leves mudanzas, á los caños cónicos acomodados orizontalmente en los depósitos.

299 Supongamos ahora que el agua salga por un caño cilíndrico vertical *MOPN* acomodado en el fondo del depósito *ADCB*. Si imagináramos, como antes (296), que la entrada *MN*, cerrada al principio, llegára á abrirse de repente, sin que de esto pudiese resultar alteracion alguna en el movimiento de las partículas, la vena se contraería á lo acostumbrado; y prescindiendo de toda resistencia del ayre, no habria razon ninguna para que se hinchára, y se arrimase á las paredes del caño. Luego la evacuacion se haria como si la altura del caño fuese infinitamente pequeña. Pero supongamos que el tubo propuesto *MOPN* esté tapado por afuera con un tapon *T* que llega hasta *XY*. Es patente, como en lo dicho antes, que como las partículas *m*, *n* esperimentarán resistencia por parte del tapon que no se mueve tan aprisa como ellas, ó por parte del agua inferior que llena la cavidad del caño, cuya agua impelen, aprovechan la libertad que las queda para resaltar en las direcciones

88. (beside line 1 of §299); 93. (beside "Pero supongamos…")

Fig. *mX*, *nY*; y que por consiguiente la vena se ha de hinchar y salir á caño lleno. Proseguirá saliendo del mismo modo, con tal que tenga alguna adherencia con las paredes del caño, yá en virtud de su *viscosidad* ó *pegosidad* natural, yá por razon de la fuerza que impele á cada instante las partículas *m*, *n* en las direcciones *mX*, *nY*. Pero de aquí se sigue que la oblicuidad natural del movimiento á la entrada *MN* del caño es menor, y que por consiguiente el gasto es mayor que si el agua saliera por un orificio hecho en una pared delgada. Añádase á esto que el peso particular del agua contenida cada instante en el caño *MOPN* se dirige en este caso á coadyuvar la evacuacion.

300 Es del caso notar que la adherencia del agua con las paredes del caño suele ser muy leve, y basta la mas mínima fuerza para cortarla. Por egemplo, estando el agua en un tonel á la altura constante de 2 pies mas arriba del orificio inferior de un caño vertical de 2 pulgadas de altura y 6 lineas de diámetro, y saliendo el agua á caño lleno, se ha esperimentado muchas veces que dándole ligeramente al caño con una llave, el agua se separaba de sus paredes, y no hacia mas que resbalarse por su borde superior como en las evacuaciones por orificios hechos en paredes delgadas. Se viene á los ojos que los golpecitos dados al caño rompen la especie de engargante, en virtud del qual las partículas fluidas están adherentes á sus paredes.

301 En virtud de estos principios se puede esplicar facilmente porqué en la hypótesi (276) el agua sigue

ó

ó no las paredes del caño, conforme el modo con que se le tapa ó destapa. Quando para este fin se hace uso de la pértica *R*, y se saca de modo que alguna porcion de agua empiece á seguir las paredes, ó, en general, quando la tabla *K* muda la direccion natural de las partículas á la entrada del caño, podrá suceder que la evacuacion tome y guarde su curso por las paredes, y que por lo mismo el agua salga á caño lleno. Por el contrario, la vena se angostará, si el movimiento oblicuo de las partículas á la entrada del caño no padeciese una alteracion sobrado grande. Es evidente que este último caso se verificaría tambien, si estando el caño tapado con un tapon, este tapon alcanzára casi *MN*, y se le pudiese quitar con una velocidad igual por lo menos á la del agua que le sigue. Fig. 89.

302 Por los mismos principios se saca que aun con hacer que el agua salga á caño lleno, no se debe esperar un gasto efectivo igual con el gasto natural y teórico. Porque parte de la fuerza que espele el agua en *MN*, se gasta en hacer que se hinche la vena, y obligarla á que siga las paredes del caño. Esto es tambien verdadero, guardando la debida proporcion, respecto de los caños cónicos, y no padece excepcion sino respecto del caño mencionado (294).

303 La propiedad que gozan los caños añadidos de dar mas agua que los orificios hechos en paredes delgadas, es muy opuesta á las ideas que vulgarmente corren acerca de esta materia. He oido decir á muchos prácticos hábiles por otra

Fig. parte, que para sacar la mayor cantidad posible de agua por un orificio dado, es preciso que la hoja donde está hecho dicho orificio, sea lo mas delgada que se pueda, porque, decian, con esto se minora el rozamiento. Pero hacian esta resistencia mayor de lo que es en realidad, y no conocian la merma mucho mayor que la contraccion de la primera especie causa en el gasto.

304 Para decir en este asunto quanto se necesita en la práctica, añadiremos algunos esperimentos que se dirigen á manifestar directamente la razon que hay entre los gastos por caños añadidos de diferentes diámetros, y con diferentes alturas de depósitos.

94. Para estos esperimentos sirvió de depósito un tonel *ADCB* en cuyo fondo *DC* estaban acomodados verticalmente dos caños cilíndricos *QSTH*, *MOPN*, cada uno de 2 pulgadas de alto, siendo el diámetro del uno de *6* lineas, y el diámetro del otro de 10 lineas. Los orificios superiores *QH*, *MN* estaban á nivel con la cara superior y orizontal del fondo *DC*. La agua provisional la suministraba otro tonel *IFEK* que la trasladaba al depósito por medio del canal *R*. Con levantar mas ó menos el tapon *V* cuyo estremo *G* era cónico, iba mas ó menos agua al canal. Se puso cuidado en quebrantar el choque del agua provisional al entrar en el depósito *ADCB*, de modo que no ocasionase en él ninguna comocion sensible.

305 Esperimentos V, VI, VII, VIII. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del orificio de

sa-

salida = 3 pies 10 pulgadas. Este orificio de salida era *ST* ú *OP* quando el agua seguia las paredes del caño, y *QH* ó *MN* quando el agua no seguia las paredes del caño. Fig.

I. Quando el agua salia por el caño *QSTH* de 6 lineas de diámetro, siguiendo sus paredes, en 1 minuto dió 1689 pulg. cúbicas de agua.

II. Quando salia el agua por el mismo caño, pero no haciendo mas que tocar el borde superior *QH*, sin seguir lo restante de las paredes, en 80 segundos dió 1724 pulg. cúbicas de agua.

III. Quando el agua salia por el caño *MOPN* de 10 lineas de diámetro, y seguia sus paredes, en 24 segundos dió 1881 pulg. cúbicas de agua.

IV. Quando salia el agua por el mismo caño, pero sin hacer mas que tocar el borde superior *MN*, sin seguir lo restante de las paredes, en 30 segundos dió 1799 pulg. cúbicas de agua.

306 Esperimentos IX, X, XI, XII. La altura constante mas arriba del orificio de salida = 2 pies. Por orificio de salida entendemos lo propio que poco ha.

I. Quando el agua salia por el caño *QSTH* de 6 lineas de diámetro, siguiendo sus paredes, en 85 segundos dió 1731 pulg. cúbicas de agua.

II. Quando salia el agua por el mismo caño sin hacer mas que tocar su borde superior *QH*, sin seguir lo restante de las paredes, en 110 segundos dió 1714 pulg. cúbicas de agua.

Fig. III. Quando el agua salia por el caño *MOPN* de 10 lineas de diámetro, siguiendo sus paredes, en 30 segundos dió 1701 pulg. cúbicas de agua.

IV. Quando salia el agua por el mismo caño, sin hacer mas que tocar su borde superior *MN*, sin seguir lo restante de sus paredes, en 40 segundos dió 1735 pulg. cúbicas de agua.

Resultado de estos esperimentos.

307 De estos ocho últimos esperimentos se saca la tabla siguiente.

Alturas constantes del agua en el depósito mas arriba del orificio de salida, espresadas en lineas.	Diámetros de los tubos espresados en lineas.		Pulg. cúbicas de agua gastadas en 1 minuto.
552	6	Saliendo el agua á caño lleno.	1689
	10		4703
	6	No siguiendo el agua las paredes.	1293
	10		3598
288	6	Saliendo el agua á caño lleno.	1222
	10		3402
	6	No siguiendo el agua las paredes.	935
	10		2603

308 Reflexiones. Manifiesta esta tabla que los

gas-

gastos por diferentes caños añadidos, con una misma altura de agua en el depósito, son sensiblemente proporcionales á las areas de las superficies, ó á los quadrados de sus diámetros. Fig.

Nos valimos de caños de una misma altura, á fin de que las circunstancias del rozamiento fuesen unas mismas quanto cabe. Sin embargo, el caño de 10 lineas de diámetro dá algo mas á proporcion que el otro.

309 Manifiesta la misma tabla que *los gastos por tubos añadidos de un mismo diámetro, con alturas diferentes en los depósitos, son sensiblemente proporcionales á las raices quadradas de las alturas de los depósitos.* Acerca de esto hemos de prevenir que las alturas cortas en los depósitos dán á proporcion alguna agua mas que las grandes. Pero si los caños fuesen muy largos, sucedería lo contrario por razon del rozamiento; conforme lo probaremos á su tiempo.

310 De lo que acabamos de decir (308 y 309) se infiere que en general *los gastos que hacen en un mismo tiempo diferentes caños aditicios, con diferentes alturas en el depósito, son entre sí con corta diferencia, como los productos de los quadrados de los diámetros de los caños por las raices quadradas de las alturas de los depósitos.*

Esto está diciendo que las evacuaciones por tubos aditicios siguen entre sí las mismas leyes que las que se hacen por orificios hechos en paredes delgadas, y que por consiguiente las prevenciones que hemos hecho acerca de estos, se aplican tambien á los primeros con las mudanzas correspondientes.

311 Si comparamos unos con otros los gastos, quando

Fig. do el agua sale á caño lleno, y quando se separa de las paredes, con una misma altura de depósito mas arriba del orificio de salida, y los llamamos Q y q respectivamente, sacaremos (307) las proporciones siguientes.

$Q : q :: 1689 : 1293$, $Q : q :: 4703 : 3598$,
$Q : q :: 1222 : 935$, $Q : q :: 3402 : 2603$.

La segunda razon de cada una de estas proporciones se acerca mucho á la de 17 á 13, ó de 13 á 10; y en la práctica se puede suponer, sin recelo de error sustancial, que $Q : q :: 13 : 10$.

312 Luego quando se quisiere que un caño aditicio, y un orificio hecho en una pared delgada dén, con una misma altura de depósito, una misma cantidad de agua en un mismo tiempo, será preciso que sus diámetros estén en razon de $\sqrt{10}$ á $\sqrt{13}$. Porque supongamos que, para una misma altura de depósito, haya un caño aditicio, cuyas paredes siga el agua, y dos orificios hechos en una pared delgada; que el gasto del caño, en el tiempo propuesto, sea Q, el diámetro del mismo caño $= D$; que los gastos de los dos orificios, en el mismo tiempo, sean q y q', sus diámetros D y d. Tendremos las dos proporciones siguientes $Q : q :: 13 : 10$ (311), $q : q' :: D^2 : d^2$ (253). Luego $Q = q \times \frac{13}{10}$, y $q' = q \times \frac{d^2}{D^2}$. Así, para que q' sea $= Q$, es preciso que sea $q \times \frac{d^2}{D^2} = q \times \frac{13}{10}$, y por consiguiente $D^2 : d^2 :: 10 : 13$. De donde sacaremos $D : d :: \sqrt{10} : \sqrt{13}$.

313 Acerca de los gastos de la última tabla hemos de

de prevenir que son algo menores de lo que saldrian por las Fig.
tablas (247, 249 y 251). No soy de parecer que estas diferencias se hayan de atribuir únicamente á las equivocaciones inevitables en las medidas de los orificios, de los tiempos, y de los mismos gastos. Creo que se han de atribuir principalmente á la diferencia de las *fluideces* de las aguas. Todos los esperimentos en que estriban las tablas espresadas, se hicieron en la primavera con una agua muy cristalina y fluida. Pero los esperimentos pertenecientes á la última tabla se hicieron con una agua algo turbia é impregnada de corpusculos estraños. A mas de esto, en los dos toneles de que me valí habia habido antes aceyte. Tambien habia habido aceyte en los caños aditicios acomodados en el tonel que servia de depósito. Es cierto que estas especies de materias pingues pueden aumentar sensiblemente la adherencia de las partículas con el suelo y las paredes, y disminuir por consiguiente la velocidad de las evacuaciones. Como quiera, bien se percibe que la mayor ó menor fluidez de las aguas en nada altera los resultados de los artículos precedentes, pues en las evacuaciones de las mismas aguas se deben esperimentar unas mismas leyes.

314 La tabla siguiente es una tabla comparativa del gasto natural por un orificio de 1 pulg. de diámetro con el gasto efectivo por un caño aditicio del mismo diámetro, en diferentes alturas de depósitos. Es análoga á la de antes (273). Los gastos efectivos que componen la tercera columna de esta nueva tabla, son á los gastos natura-

les

Fig. les que componen la segunda columna, como 13 es á 16, con poca diferencia. Estos cálculos no tienen toda la precision que se les hubiera podido dar en virtud de las prevenciones precedentes; pero son bastante exactos para los usos de la práctica, que son nuestro principal asunto.

Es facil de dilatar el uso de la misma tabla, y hallar por su medio el gasto que hará un caño aditicio qualquiera, con una altura dada de depósito.

Supongamos, por egemplo, que se nos pregunte ¿qual será en 1 minuto el gasto de un caño aditicio de 4 pulg. de diámetro, de 8 pulg. de longitud, con 25 pies de altura de depósito mas arriba de su orificio esterior? Para responder á esta pregunta, buscaremos primero, conforme esplicamos (273), el gasto natural por un orificio de 4 pulg. de diámetro, con 25 pies de altura de depósito, y sacaremos que este gasto es de 350490 pulg. cúbicas en 1 minuto. Disminuyendo este gasto en razon de 16 á 13, saldrán 284773 pulg. cúbicas que serán el gasto efectivo que se busca.

Se le han dado 8 pulg. de largo al caño propuesto, porque como tiene 4 pulg. de diámetro, es preciso que tenga bastante longitud para que el agua siga sus paredes, principalmente si está acomodado verticalmente en el suelo del depósito.

Al-

Fig.

Alturas constantes del agua en el depósito mas arriba del orificio esterior del caño, espresadas en pies.	Gasto natural en 1 minuto, por un orificio de 1 pulgada de diámetro, espresado en pulgadas cúbicas.	Gasto efectivo en el mismo tiempo, por un caño cilíndrico de 1 pulg. de diámetro, y 2 pulg. de largo, espresado tambien en pulg. cúbicas.
1	4381	3539
2	6196	5002
3	7589	6126
4	8763	7070
5	9797	7900
6	10732	8654
7	11592	9340
8	12392	9975
9	13144	10579
10	13855	11151
11	14530	11693
12	15180	12205
13	15797	12699
14	16393	13177
15	16968	13620

Mo-

Fig. III. *Modo de determinar las evacuaciones con solo el auxilio de la esperiencia.*

315 Hemos declarado (260 y 284) el modo de determinar las evacuaciones por medio de la teórica combinada con la esperiencia. Pero el que no quisiese valerse de la teórica, podrá conseguir lo mismo con solo el auxilio de la esperiencia. Esto es lo que vamos á declarar ahora. Para mayor claridad, aplicaremos á egemplos particulares lo que nos proponemos decir, y supondremos que los orificios estén hechos en paredes delgadas. Los mismos métodos se podrán aplicar facilmente á las evacuaciones hechas por caños aditicios. Todas las preguntas que acerca de este asunto se pueden hacer se reducen á las siguientes que son análogas á las que respondimos antes (144 .. 147).

316 Pregunta I. *Se supone que se mantenga un depósito constantemente lleno á la altura de 11 pies 6 pulg. mas arriba de un orificio de 16 lineas de diámetro; se pregunta ¿qué cantidad de agua dará este orificio en 8 minutos?*

Los gastos hechos en un mismo tiempo por diferentes orificios, con distintas alturas de depósitos, son entre sí como los productos de dichas aberturas (255) por las raices de las alturas de los depósitos, ó como los productos de los quadrados de los diámetros de las aberturas por las raices de las alturas de los depósitos. Pero (273) yá que en 1 minuto, una abertura de 12 lineas de diámetro, con 11 pies de altura de agua en el depósito, dá

8990.

8990 pulgadas cúbicas de agua, es patente que con hacer Fig.
esta proporcion, $144 \times \surd(11 \text{ pies}) : 256 \times \surd(11 \text{ pies } 6 \text{ pulg.}) :: 8990$ pulg. cúbicas de agua : un quarto término que es 16341 pulg. cúbicas, y son el gasto que el orificio propuesto de 16 lineas de diámetro hace en 1 minuto. Multiplicando esta cantidad por 8, saldrán 130728 pulg. cúbicas que serán el gasto que hace en 8 minutos.

317 Pregunta II. *Se supone que un depósito se mantiene constantemente lleno á la altura de 11 pies 6 pulg. mas arriba de un orificio que dá 245544 pulg. cúbicas de agua en 6 minutos; se pregunta ¿qual es el diámetro de dicho orificio?*

Yá que el orificio dá 245544 pulg. cúbicas en 6 minutos, dará 40924 pulg. cúbicas en 1 minuto. Luego si llamamos D su diámetro, espresado en lineas, sacaremos por la misma regla de arriba 144 lineas quadradas $\times \surd(11 \text{ pies}) : D^2 \times \surd(11 \text{ pies } 6 \text{ pulg.}) :: 8990 : 40924$; y por consiguiente $D^2 = 144$ lineas quadradas $\times \frac{40924}{8990} \times \frac{\surd 132}{\surd 138} = 641{,}1$ lineas quadradas. Luego $D = 25{,}32$ lineas. Es, pues, el diámetro que se pedia de casi 2 pulg. $1\frac{1}{3}$ lineas.

318 Pregunta III. *Se supone que un depósito que se mantiene constantemente lleno á la altura de 16 pies, haya dado 45678 pulg. cúbicas de agua por un orificio de 16 lineas de diámetro, por espacio de cierto tiempo; se pregunta ¿quánto duró la evacuacion?*

Buscaremos primero por el método de la pregunta I el gasto que este orificio haria en 1 minuto; y hallaremos que

Fig. que este gasto $=$ 19276 pulg. cúbicas. Repararemos despues que los gastos hechos por un mismo orificio, con una misma altura constante de depósito, son entre sí como los tiempos que duran, y tendremos la proporcion 19276 : 45678 :: 1 minuto : al tiempo que se pide, y hallaremos que es $=$ 2 minutos $22\frac{1}{5}$ segundos, con corta diferencia.

319 Pregunta IV. *Se supone que un depósito dé* 40000 *pulg. cúbicas de agua en* 4 *minutos por un orificio de* 10 *lineas de diámetro; se pregunta ¿quál será la altura del depósito?*

Ya que el depósito propuesto dá 40000 pulg. cúbicas de agua en 4 minutos, dará 10000 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto. Si llamamos h la altura que se pide, espresada en pies, siempre tendremos por la regla general (255), la proporcion $144 \times \sqrt{(11 \text{ pies})} : 100 \times \sqrt{h} ::$ $8990 : 10000$. Luego $h = 11 \text{ pies} \times \frac{(144)^2 \times (100)^2}{(8990)^2} = 28,22$ pies $=$ 28 pies 2 pulg. 8 lineas, con corta diferencia.

Todos estos resultados tienen la precision que bastā por lo comun en la práctica. Pero si pareciese oportuno sacarlos todavia mas exactos, se conseguiría facilmente por medio de las prevenciones hechas (270 y 271).

IV. *De la distribucion de las aguas.*

320 Sea *MNOP* la altura de un depósito que sur-
95. ten las aguas de un aqueducto, de un manantial, de un rio &c. Se trata de hacerle á la pared *MNOP* muchas aberturas por las quales juntas salga tanta agua como recibe el depósito, y tales que los gastos particulares sean en-

entre sí en razon dada. Esta cuestion ocurre mucho en la práctica, y es de suma utilidad, particularmente quando se han de repartir entre las fuentes públicas ó particulares las aguas que se han conducido á los depósitos hechos para este fin en distintos barrios de una Ciudad, desde los quales ván despues por medio de los encañados á sus diferentes destinos. Fig.

321 La primera operacion que este punto requiere, consiste en determinar la cantidad de agua que recibe y dá el depósito en un tiempo determinado. Para esto se hará perpendicularmente á la pared *MNOP* un agugero de estension conveniente, por el qual se dejará salir el agua. Quando despues de los movimientos de oscilacion que se repararán al principio, la superficie del agua en el depósito se mantuviere quieta y siempre en el mismo punto sin subir ni bajar, será señal cierta de que el agugero propuesto gasta cabalmente tanta agua como recibe el depósito. Entonces se cogerá con una cubeta el agua que diere en un tiempo conocido; y despues de medida exactamente esta cantidad con una medida ó padron muy seguro, se conocerá toda el agua que recibe y gasta el depósito. Siempre se podrá valuar en pulgadas cúbicas. Es escusado, segun se echa de ver, afanarse por saber la area precisa del agugero, ni la altura del agua en el depósito.

322 Hecha esta operacion preliminar, y tapando el agugero que se hizo al principio, se repartirá el agua del depósito en varias porciones del modo siguiente.

Se determinarán las figuras que se les quiere dar á los

Fig. orificios de distribucion, y sus distancias á la superficie del agua en el depósito, que, segun suponemos, siempre corresponde al mismo punto de la pared $MNOP$, á lo menos en el discurso de cierto tiempo. Si llamamos Q el gasto total que puede hacer el depósito en un tiempo dado, y que acabamos de determinar; y suponemos que los gastos parciales, correspondientes al mismo tiempo, sean entre sí respectivamente como los números qualesquiera m, n, p &c. tendremos estas diferentes proporciones,

$m+n+p$ &c : m :: Q : el primer gasto parcial $= \frac{mQ}{m+n+p \text{ \&c.}}$,
$m+n+p$ &c : n :: Q : el segundo gasto parcial $= \frac{nQ}{m+n+p \text{ \&c.}}$,
$m+n+p$ &c : p :: Q : al tercer gasto parcial $= \frac{pQ}{m+n+p \text{ \&c.}}$.

Luego la cuestion se reducirá á hallar la estension que ha de tener cada orificio para gastar en un tiempo dado una cantidad dada de agua, con una altura dada de depósito; y esto se reduce á la cuestion de antes (317).

323 Con la mira de aclarar esto con un egemplo, supongamos que el agua corra por los tres orificios circulares A, B, C, hechos en una pared delgada que dá lugar á la contraccion de la primera especie; que sus centros estén en una misma linea orizontal DE distante de la superficie QR del agua la cantidad dada CH; que el gasto total Q sea de 3600 pulg. cúbicas en 1 minuto, y que los gastos particulares de los orificios A, B, C, en el mismo tiempo, sean entre sí como los números 6, 3, 1. Tendremos las proporciones,

10 : 6 :: 3600 pulg.cúb. : gasto de $A = 2160$ pulg.cúb. Fig.
10 : 3 :: 3600 pulg.cúb. : gasto de $B = 1080$ pulg.cúb.
10 : 1 :: 3600 pulg.cúb. : gasto de $C = 360$ pulg.cúb.

Hecho esto, conociendo la altura *CH* que siempre se puede tomar, sin recelo de error sustancial, por la altura media del agua mas arriba de los tres orificios, solo falta hallar los diámetros que han de tener los orificios *A*, *B*, *C* para dar las tres cantidades de agua que acabamos de determinar. Supongamos, por egemplo, $CH = 6$ pulg. y llamemos D, d, d' los diámetros de los tres orificios propuestos, espresados en lineas; fundándonos en lo dicho (273), esto es, que un orificio circular de 1 pulg. de diámetro, con 1 pie ó 12 pulg. de altura de depósito, dá 2722 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto, sacaremos (255) las proporciones siguientes,

$$2722 : 2160 :: 1 \times 144 \text{ lin. quadr.} : DD \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$2722 : 1080 :: 1 \times 144 \text{ lin. quadr.} : dd \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$2722 : 360 :: 1 \times 144 \text{ lin. quadr.} : d'd' \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

que dán $D = 12{,}71$ lineas, $d = 9$ lineas, $d' = 5\frac{9}{10}$ lineas.

324 Se hubieran hallado con igual facilidad las estensiones de los orificios, aun quando sus centros no hubieran estado en una misma linea orizontal. Todas las disposiciones de centros se pueden igualmente admitir en la teórica, siendo siempre el mismo el nivel del agua. Pero en la práctica se debe considerar que como el agua provisional que surte el depósito, mengua en los tiempos secos, la superficie del agua podrá bajar, por egemplo, á *DE* ó *FG*.

Fig. Entonces los orificios *A*, *B*, *C* no darán agua en la razon que conviene. El orificio *C* no dá ninguna, quando el nivel del agua está en *FG*. El mismo inconveniente se esperimenta á otro respecto, con los tres orificios *V*, *T*, *S*. Quando el nivel del agua está en *IK*, el orificio *S* dá mas á proporcion que los otros dos. Dispónganse como se quisiere los orificios; quando son muy desiguales, siempre habrá tiempos en que los unos darán á proporcion mas que los otros.

325 De aquí infirió Mariote que se habian de desechar los orificios circulares. Substituye en su lugar orificios rectangulares verticales todos de igual altura, y cuyas bases están todas en una misma linea orizontal. En virtud de esto, suba ó bage el nivel del agua, los gastos se mantendrán siempre unos respecto de otros en la misma razon. Sin embargo no ha prevalecido este pensamiento. Es dificultosísimo hacer con la exactitud que es menester los orificios rectangulares; dán lugar á mucho rozamiento, mayormente quando son pequeños; suelen taparlos amenudo el légamo, y demás porquerías que el agua lleva consigo. Por esto han prevalecido los orificios circulares, cuya construccion es facil, y el uso acomodado.

326 Es facil evitar en gran parte los inconvenientes que, segun hemos visto, tienen estas aberturas. Para lograrlo, se han de poner todos los centros en una misma linea orizontal, y dividir una abertura grande en otras menores, que juntas dén la misma cantidad de agua, y la sumi-

ministren á un mismo caño. Dando de este modo la misma Fig. estension, poco mas ó menos, á todas las aberturas, no solo se conseguirá que sus gastos guarden siempre entre sí, con corta diferencia, la misma razon, sino que se logrará que las aberturas grandes no dén á proporcion mas que las pequeñas; y esto no dejaría de suceder (264) si las aberturas fuesen muy desiguales.

327 En nuestros cálculos siempre hemos valuado en pulg. cúbicas las cantidades de agua gastadas. Pero no es esta la medida que usan los Fontaneros. Usan *la pulgada de agua*, *la linea de agua &c.* Declaremos qué cosa significan estas denominaciones.

Halló Mariote que en 1 minuto una abertura circular y vertical, de 1 pulg. de diámetro, cuyo centro dista 7 lineas de la superficie del agua, gasta como unas 14 *pintas* de Paris, suponiendo que el pie cúbico contiene 36 pintas. Dicho Autor, y los que han venido despues han llamado este gasto *pulgada de agua*. La linea de agua es la $\frac{1}{144}$ parte de la pulgada de agua; por consiguiente la dá en 1 minuto un orificio de 1 linea de diámetro, cuyo centro dista 7 lineas de la superficie del agua &c.

Es sin duda alguna muy lícito usar las voces que uno quiere, con tal que se esplique lo que significan; pero muchos fontaneros ignorantes han abusado de la espresion de Mariote, y se han persuadido á que la pulgada de agua era en general el gasto hecho en un minuto por una abertura circular y vertical de 1 pulg. de diámetro, sin atender á la al-

Fig. tura del agua en el depósito mas arriba del agugero ; esto es un absurdo , porque la altura del depósito es uno de los elementos esenciales del gasto. Todas las medidas son arbitrarias ; la comodidad y facilidad que dán en la práctica son los únicos motivos en que debe fundarse la preferencia que se dá á las que se eligen. No habria, ni equivocacion ni otro inconveniente que recelar, si se valuasen los gastos en pulg. cúbicas, ó por lo menos en medidas que contuviesen un número conocido de pulg. cúbicas. En este particular creo que es tanto mas justo apartarse de Mariote, quanto (252) atribuye un gasto sobrado grande á una abertura circular y vertical de 1 pulg. de diámetro, con 7 lineas de carga.

328 Siempre será facil averiguar por medio del peso el número de pulg. cúbicas que cupieren en un vaso ó padron qualquiera ; teniendo presente que el pie cúbico de agua dulce pesa 70 libras, con corta diferencia. Si se toma por padron la pinta de París, y se la mide cabal, se necesitarán 36 para hacer el pie cúbico. Por consiguiente su cabida es de 48 pulg. cúbicas. Quando el agua pasa los bordes de la medida, como puede suceder sin que se vierta, bastarán 35 pintas para hacer el pie cúbico. El *Muid* de París contiene 8 pies cúbicos, ó 288 de las primeras pintas, y 280 de las últimas.

Medida de las aguas que salen de vasos que se vacian.

329 En las evacuaciones de los vasos que se mantie-

tienen constantemente llenos, los gastos por orificios chicos son siempre los mismos, sea la que fuere la figura de dichos vasos. No entra en su espresion mas que la estension del orificio, el tiempo de la evacuacion y la altura del fluido en el depósito. No sucede lo propio respecto de las evacuaciones de los vasos que se vacian. Su figura es un elemento esencial de su gasto, conforme lo prevenimos (169). Nuestro empeño consiste en hallar, por medio de la teórica y de la esperiencia, las leyes que siguen estos gastos entre sí. Fig.

330 Como nos es preciso ceñirnos en esta investigacion á algunos casos particulares, no consideraremos aquí mas que las evacuaciones de los vasos prismáticos. El depósito que nos servirá es el mismo, cuya descripcion hemos dado (218) tiempos há, y pintan las figuras allí citadas.

331 Al principio me habia propuesto determinar el tiempo que dicho depósito, llenado en el primer instante hasta cierta altura, gasta para vaciarse enteramente, á lo menos con corta diferencia, por orificios hechos en su suelo; y habia hecho algunos esperimentos sobre este asunto; pero eché de ver que no podian salir exactos. El embudo que se forma en la superficie del agua, quando está todavia á algunas pulgadas de distancia del suelo, y disminuye el producto del orificio, hace muy dudoso el fin de la evacuacion. A medida que este embudo se ensancha, el ayre se introduce en él, y ocupa el lugar del agua. Está todavia

Fig. la superficie á mas de dos lineas del suelo, quando el agua no hace mas que caer gota á gota; y no se puede sentar regla general alguna acerca de la duracion de esta especie de lluvia.

332 Consideremos, pues, la evacuacion antes que el embudo empiece á desnaturalizarla. El agua salia en los esperimentos siguientes unas veces por un orificio de 1 pulg. de diámetro, y otras por un orificio de 2 pulg. de diámetro. Ambos estaban en el fondo del depósito, y hechos en planchas delgadas de cobre, como antes. La altura primitiva del agua en el depósito siempre fue de 11 pies 8 pulg. ó de 140 pulg. A las distancias de 4 pies y 9 pies mas abajo del vértice de esta altura, se hicieron en planchas de cobre pegadas en las paredes, dos agugeritos que se tapaban con espitas. Estos agugeritos servian para manifestar el instante en que llegaba allí la superficie del agua al ir bajando. Quando se hacia juicio á ojo de que estaba para llegar, se quitaba la espita, y se formaba un surtidor que determinaba con mucha precision el instante que se buscaba, esto es, aquel en que se dejaba de considerar cada evacuacion. Con esto se averiguó quanto tiempo gastaba dicha superficie para bajar 4 pies ó 9 pies en el depósito. Se vé que siendo la altura primitiva del agua en el depósito 140 pulgadas, su altura última, en el primer caso, es 140 pulgadas — 48 pulgadas = 92 pulgadas, y que su altura última, en el segundo caso, es 140 pulg. — 108 pulg. = 32 pulg.

333 Esperimentos I, II, III, IV. Altura primitiva del

del agua en el depósito = 11 pies 8 pulg. Fig.

I. Quando el agua salia por un orificio circular de 1 pulg. de diámetro, en 7 minutos $25\frac{1}{2}$ segundos, su superficie bajaba 4 pies.

II. Quando el agua salía por un orificio circular de 2 pulg. de diámetro, en 1 minuto 52 segundos, su superficie bajaba 4 pies.

III. Quando el agua salía por un orificio circular de 1 pulg. de diámetro, en 20 minutos $24\frac{1}{2}$ segundos, su superficie bajaba 9 pies.

IV. Quando el agua salía por un orificio de 2 pulg. de diámetro, en 5 minutos 6 segundos, su superficie bajaba 9 pies.

334 Reflexiones. Comparemos ahora la teórica con la esperiencia por medio de la fórmula $t = \frac{t'A(\sqrt{h}-\sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$ (178), en la qual t es el tiempo que se busca de la evacuacíon; t', el tiempo que un grave gasta en caer de la altura dada a; A, la base ó seccion orizontal del depósito; K, la area del orificio; h, la altura primitiva del agua en el depósito; b, su altura última; y tengamos presente que hemos de disminuir su area K en la razon de 8 á 5, porque hay contraccion de la primera especie. Tengamos tambien presente que la area A es un quadrado que tiene 3 pies de lado. Aplicando esta fórmula á nuestros esperimentos, sacamos

En

Fig.

En el primero, $t = 7' \; 22'', 36$

En el segundo, $t = 1' \; 50'', 59$,

En el tercero, $t = 20' \; 16''$,

En el quarto, $t = 5' \; 4''$,

Estos tiempos deberian ser iguales con los que hemos hallado en los esperimentos, pues en el uso de la fórmula hemos llevado en cuenta el efecto de la contraccion. Con efecto, poco falta para que esta igualdad se verifique; y atendidas todas las circunstancias que pueden alterar los resultados de los esperimentos, podemos inferir con seguridad que las evacuaciones efectivas siguen entre sí la misma ley que las evacuaciones naturales y teóricas, con corta diferencia.

335 Luego una vez que se conozca por via de esperiencia quanto pertenece á la evacuacion de un vaso prismático que se vacia, se determinará quanto corresponde á la evacuacion de otro vaso prismático que tambien se vacia, por medio de la proporcion $t : t'' :: \frac{A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K} : \frac{A'(\sqrt{h'} - \sqrt{b'})}{K'}$ que se halló (182).

Esta proporcion no se verifica, hablando con rigor, sino en las evacuaciones que se hacen por orificios orizontales. Pero tambien se puede aplicar á las evacuaciones que se hacen por orificios laterales, fijando en estos últimos un punto medio desde el qual se cuenten las alturas del agua. Por egemplo, en los orificios circulares, el centro se puede tomar por dicho punto medio. En general, se puede suponer en la práctica que dicho punto se confunde con el

cen-

centro de gravedad de un orificio qualquiera, con tal que Fig.
la altura última del agua llegue algo mas arriba que el borde superior del mismo orificio.

336 En lo que consideramos (187 y sig.) referimos á las evacuaciones de los vasos que se vacian, la teórica del movimiento del agua en un vaso que está sumergido en un fluido, ó recibe por un *aflujo* lateral el agua de algun depósito mas alto, porque en realidad todas estas cuestiones son de un mismo género. Seguiremos aquí el mismo orden; traheremos algunos esperimentos que aclaran lo dicho (187 .... 192).

337 *ADCB* es un tonel de 2 pies de diámetro, 96.
dentro del qual está sumergido un cilindro vertical *VMNT* de hoja de lata que tiene 1 pie de alto, y 20 lineas de diámetro interior. El espresado cilindro descansa sobre unas trévedes aseguradas á tornillo en el suelo del tonel. Sobre su superficie convexa se han graduado en lineas tres escalas verticales que sirven para determinar la altura del agua, y poner el cilindro muy á plomo. En el suelo se han acomodado diferentes orificios. Estando primero el tonel vacío, á lo menos hasta mas abajo de *MN*, se tapaba el orificio superior del cilindro, para impedir que el agua se introdugera en él, á medida que se llenaba el tonel. Despues se destapaba de golpe el cilindro, y se veía en él el movimiento del agua, como sigue.

338 Esperimentos V y VI. El cilindro estaba 11 pulg. dentro del agua del tonel.

I. Entrando el agua en el cilindro por un orificio *K*

que

Fig. que tenia 1 linea de diámetro, subió en él cabalmente al nivel de la del tonel, no mas arriba, en 119 segundos.

II. Entrando el agua en el cilindro por un orificio de 3 lineas de diámetro, subió en él al nivel de la del tonel y no mas arriba, en 15 segundos.

Mientras que el agua sube por dentro del cilindro, baja un poco en el tonel. Hemos atendido á esta baja que es muy corta, en el hundimiento que hemos atribuido al cilindro.

339 Reflexiones. Para manifestar las reflexiones á que dán lugar estos esperimentos, repararemos primero que estando tapado el orificio superior del cilindro mientras que el agua sube en el tonel, esta agua comprime al ayre contenido en el cilindro, y le reduce por consiguiente á menor volumen. Es facil de determinar la altura que ocupará. Porque el dia que se hizo el esperimento, el ayre en su estado natural, por lo que señalaba el barómetro, era comprimido con una fuerza que sensiblemente equivalia al peso de una columna de agua de 32 pies de altura. Luego la altura de la columna de compresion era de 32 pies 11 pulg. quando el agua del tonel estaba 11 pulg. mas alta que el punto *M* ó *N*. Así (68), la altura actual del ayre en el cilindro será á su altura primitiva y natural de 11 pulg. como 32 pies son á 32 pies 11 pulg. ó como 10,69 es á 11. Por consiguiente el agua subirá en el fondo del cilindro 0,31 pulgadas, ó como unas 3,72 lineas.

340 Sentado esto, busco quanto dura cada uno de los dos esperimentos antecedentes por el método teórico decla-

ra-

rado (190), y saco, con atender al efecto de la contraccion que disminuye el gasto natural en razon de 8 á 5, que el primer esperimento deberia durar 155,97 seg. y el otro 17,33 seg. Verdad es que falta mucho para que cada duracion teórica sea igual á cada duracion efectiva correspondiente, pero la diferencia es menor en el segundo caso que en el primero. Al principio malicié algun defecto en las cantidades absolutas y comparativas de los dos orificios. Pero despues de comprobados por segunda vez, los hallé muy exactos. A mas de esto, como el suelo del cilindro apenas tenia un quarto de linea de grueso, la contraccion habia de ser de la misma especie respecto de los dos orificios. ¿Qual será, pues, la causa de esta diferencia entre la teórica y la observacion? La que vamos á manifestar. Fig.

341 Quando se destapa el estremo superior del cilindro, el agua que entra por el orificio *K* cala la rebanada de agua contenida en el suelo del cilindro, y forma alli un verdadero surtidor separado que dura hasta que el agua llegue á cierta altura; despues de esto, la superficie se pone á nivel en toda la latitud del cilindro, y prosigue guardando esta posicion al tiempo de subir. Pero en los primeros instantes, la velocidad al pasar por el orificio es efecto de casi toda la altura *HM* del agua del tonel mas arriba del punto *M* ó *N*; vá menguando poco á poco; y finalmente despues de cesar el surtidor, solo proviene del exceso de la altura del agua en el tonel, respecto de la altura del agua que hay en el cilindro. Sentado esto, es evidente, y lo

ates-

Fig. atestigua la vista, que quanto menor es el orificio, tanto mas ha de durar el surtidor. Con efecto, si consideramos los casos estremos, es á saber, el caso en que el orificio *K* fuese infinitamente pequeño respecto del suelo *MN*, y el caso en que *K* fuese igual á *MN*, se echará de ver que en el primer caso el surtidor duraría siempre, y que no le habria en el segundo. Luego el cilindro ha de gastar menos tiempo, á proporcion, en llenarse por el orificio de 1 linea de diámetro que por el de 3 lineas de diámetro. Es tambien patente que el tiempo efectivo puede ser menor que el tiempo teórico, porque el agua que entra en el cilindro en los primeros instantes, tiene casi la misma velocidad que si saliera al ayre. Esto lo confirma un esperimento de *Daniel Bernoulli*, quien halló muchas veces que un cilindro se vacia en el mismo tiempo, sea que las aguas salgan al ayre, sea que el suelo del cilindro esté metido dentro de una agua estagnante.

342 Inferamos tambien de aquí que con mucha razon digimos (187) que no se debe empezar á determinar por la teórica el tiempo que el vaso *AMNC* gasta en llenarse, sino quando el fluido tiene alguna altura en el mismo vaso. Quando añadimos despues (189) que la altura *AR* no puede discrepar mucho de *AM*, suponemos que el orificio *M*, aunque pequeño, tiene alguna estension. Porque si fuese estremadamente pequeño, las dos alturas propuestas podrian discrepar sensiblemente. Es imposible determinar en general su razon cabal. La teórica no suministra para esto ningun auxilio, y solo se puede es-

esperar que se consiga por medio de esperimentos muy repetidos. Fig.

343 Esperimentos VII, VIII, IX.

I. Entrando el agua en el cilindro *VMNT* por un orificio de 1 pulg. de diámetro, era preciso que el mismo cilindro estuviese metido 8 pulg. 11 lineas en el agua del tonel, para que el agua subiese en él hasta el borde superior *VT*.

Este esperimento sale algo incierto por causa de las ampollas de ayre que se mezclan con el agua, y turban su movimiento. Para egecutarle bien, será menester valerse de un caño mas largo que el que á mí me sirvió.

II. Despues de quitado enteramente el suelo *MN*; con meterle hasta 7 pulg. 7 lineas dentro del agua del tonel, el agua subió en el cilindro hasta el borde superior *VT*.

III. Mandé poner al rededor de *MN* un platillo ancho de hoja de lata de 10 pulg. de diámetro, que servia como de suelo al cilindro, y entrando siempre el agua por la abertura entera *MN*, como en el esperimento antecedente, bastó con un hundimiento de 6 pulg. $11\frac{1}{2}$ lineas para que el agua dentro del cilindro subiese hasta el borde superior *VT*.

344 Reflexiones. Hemos reparado (191), y dimos la razon, que quando el orificio *K* tiene una estension sensible respecto del suelo *MN*, el fluido que entra en el cilindro debe subir mas arriba del nivel del fluido ambiente; la esperiencia manifiesta que esto sucede con efecto. Quanto ma-

Fig. mayor es el orificio *K* respecto de *MN*, tanto mayor es el movimiento ascensional. Despues de quitado enteramente el suelo *MN*, el fluido debería naturalmente subir en el cilindro una cantidad dupla del hundimiento *HM*. Pero esta ascension no se verifica plenamente por causa de la contraccion que angosta el paso del agua en *MN*, y del rozamiento á lo largo de las paredes del cilindro.

345 Quando el estremo inferior del tubo está sumergido libremente en el agua, los movimientos oblicuos de las partículas que se dirigen ácia *MN* padecen menos alteraciones, que quando están impedidos de algun platillo ó suelo que disminuye necesariamente su oblicuidad. Ha de ser, pues, mayor la contraccion en el primer caso que en el segundo. Pero á medida que la contraccion crece, ó se angosta el paso en *MN*, el movimiento ascensional debe menguar indispensablemente. Esta es la razon porque en el primero de los dos casos propuestos el movimiento ascensional es menor que en el segundo.

De los Surtidores.

346 Un *Surtidor* es, como nadie ignora, un chorro de agua que al salir por un orificio qualquiera se abalanza con impetuosidad en una direccion que es una continuacion del caño que la arroja; pero este nombre se dá mas particularmente á las aguas que suben, ó son arrojadas á cierta distancia por un orificio lateral. La abertura *O*
97. por donde sale el surtidor, la llamaremos *salida*.

Las

347 Las aguas que han de mantener el gasto del surtidor, se recogen en un depósito *ADCB* de donde pasan al punto *O* por un tubo *GEO* que llamaremos *Encañado* ó *Tubo de Conduccion*; al estremo *RO* del encañado le llamaremos *Tronco*, por alusion al tronco de un arbol, con cuyas ramas se puede comparar el surtidor. A veces el tronco es mayor que lo demás del encañado, y no se hace de la misma materia que él. Suele ser de plomo. Fig.

348 Sea la que fuere la direccion del surtidor, el gasto que hace es siempre el mismo, con tal que la salida *O*, y la altura *FO* del depósito sean unas mismas. Esto es una consecuencia necesaria de la presion igual de los fluidos en todas las direcciones. Por consiguiente este gasto se determinará por los métodos declarados (232 y sig.). Indaguemos ahora cómo se les podrá dar á los surtidores de agua toda la altura, ó la amplitud posibles.

De los Surtidores verticales.

349 Enseña la teórica (138) que el agua al salir por una salida qualquiera muy chica, tiene una velocidad con la qual puede volver á subir á la altura de la superficie del agua en el depósito. Así, los surtidores dirigidos de abajo arriba en la direccion vertical subirian, si ningun obstáculo se lo estorvára, á toda la altura de sus depósitos.

350 Muchas son las causas que concurren para disminuir la elevacion natural de los surtidores de agua. Desde luego hay dos muy conocidas; es á saber, el rozamien-

Fig. to con el circuito del orificio, y la resistencia que el ayre opone al movimiento de la columna. El efecto del rozamiento es corto, pero la resistencia del ayre es mucha quando es mucha la altura de los depósitos.

351 A estas dos causas se agrega otra cuyos efectos daremos á conocer del modo siguiente. Imaginemos muchas filas de globos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. que se toquen, y no ten-
98. gan pesantez. Concibamos que en un mismo instante sean todos arrojados en la direccion *AM* por una fuerza dada. Concibamos tambien que cada uno de ellos esperimente la accion de una causa retardatriz que obra en la direccion opuesta *MA*, y tal que quando llegan á *MN*, su velocidad inicial quede totalmente aniquilada. Es evidente que si despues de llegada cada primera fila á *MN*, se la aniquilára de golpe para dar lugar á la fila siguiente de ocupar su misma posicion, todos los glóbulos (sea el que fuere el número de las filas que se suceden) conservarian entre sí la misma posicion, y que la columna *AMNB* se mantendria cilíndrica. Pero si las primeras filas no desaparecen para dejar el lugar desocupado á las siguientes, el espacio *AMNB* se irá llenando gradualmente: entonces los globulillos que sin discontinuar salen de *AB*, chocarán con los que están esparramados en su camino; estos choques, que por la mayor parte son oblicuos, obligan á la columna *AMNB* á ensancharse, y la quitan parte de su velocidad. Lo mismo le sucede sin quitar ni poner á un surtidor de agua. Las partículas que salen sin cesar de la salida, y suben, son retardadas por la pesantez; y

co-

como el espacio que hay entre la salida, y el punto donde acaba su velocidad inicial, está lleno de moléculas, estas moléculas son chocadas por el agua que sucede; se ensancha, pues, indispensablemente la columna al apartarse de la salida, y pierde por esta razon parte de su velocidad. A mas de esto, quando el surtidor es enteramente vertical, las partículas, despues de subir lo mas arriba que pueden, vuelven á caer á impulsos de la pesantez; y esto debe disminuir tambien la velocidad de las partes ascendientes. Y con efecto se repara que con inclinar un poco el surtidor, sube un poco mas arriba que quando es enteramente vertical. Fig.

352 Los surtidores gruesos suben mas arriba que los delgados, porque de dos surtidores que salen de sus salidas, con velocidades iguales, el mayor tiene mas mole, y por lo mismo mas fuerza que el delgado para superar los obstáculos que se le resisten. Hablo aquí de los surtidores que suben á una altura algo considerable, porque en quanto á los surtidores que no pasan de 2 ó 3 pies de diámetro, y cuyas salidas no bajan de una linea de alto, los chicos suben sensiblemente á la misma altura que los grandes. Pero aun quando los grandes suben tan alto como los chicos, no por esto gastan á proporcion mas agua que estos últimos. Porque el gasto se ha de apreciar por la velocidad al salir de la salida, cuya velocidad es sensiblemente la misma en ambos casos, prescindiendo del rozamiento.

353 Para comparar la altura de los surtidores con la de sus depósitos, egecuté los esperimentos siguientes.

Fig. En el depósito grande *ADCB* cuya descripcion dimos
99. antes (218), se acomodaron orizontalmente dos caños
100. *OE* de hoja de lata, cerrados ambos por el estremo *E*, y abiertos del lado del depósito. Cada uno tenia 6 pies de largo; el diámetro del primero era de 3 pulg. 8 lineas; el del segundo de 9 á 10 lineas. En *F* habia una salida de 2 lineas de diámetro; en *G*, una salida de 4 lineas de diámetro; en *H*, una salida de 8 lineas de diámetro. A mas de
99. esto habia en *K* un tubo cónico *KM* cuya altura cogia 5 pulg. 10 lineas, el diámetro de la base inferior 9 lineas, el de la base superior 4 lineas. En *I* habia un caño cilíndrico *IN* de 5 pulg. 10 lineas de alto, cuyo diámetro era de
99. 4 lineas. Para abreviar llamaremos el caño *OE caño gran-*
100. *de*; y *caño chico* al caño *OE*.

Por la parte de afuera mandamos soldar al rededor de cada una de las salidas unos caños de hoja de lata de mayor diámetro que el de la salida, para atajar, quando se quisiese, la evacuacion por medio de unos tapones de corcho que entraban en dichos caños.

99. 354 Esperimentos I, II, III, IV, V. El agua se mantenia en el depósito á la altura constante de 11 pies mas arriba de la pared superior *OF* del caño grande. Se cuenta la altura de cada surtidor desde la misma pared.

I. El surtidor vertical por la salida *F* de 2 lineas de diámetro, subió 10 pies 10 lineas. La columna formaba una hermosa garzota. Inclinando un poco el surtidor, subia 10 pies 4 pulg. 6 lineas.

El

II. El surtidor vertical por la salida *G* de 4 lineas de diámetro, subió 10 pies 5 pulg. 10 lineas. La columna no se ensanchaba mucho por la parte de arriba; formaba una hermosa garzota. Inclinando algun tanto el surtidor, subió 10 pies 7 pulg. 6 lineas. Fig.

III. El surtidor vertical por la salida *H* de 8 lineas de diámetro, subió 10 pies 6 pulg. 6 lineas. En todos los surtidores el agua daba brincos que no eran de una misma altura. En este caso eran mas reparables que en los dos antecedentes. La columna se ensanchaba mucho por arriba. Inclinando un poco el surtidor, subia hasta 10 pies 8 pulg. y la columna perdia menos su forma que quando era exactamente vertical.

IV. El surtidor vertical por el tubo cónico *KM* subió 9 pies 6 pulg. 4 lineas. La columna era muy hermosa. Inclinando un poco el surtidor, subió 9 pies 8 pulg. 6 lineas.

V. El surtidor vertical por el tubo cilíndrico *IN* subió 7 pies 1 pulg. 6 lineas. La columna era muy hermosa. Inclinando un poco el chorro, subió 7 pies 3 pulg. 6 lineas.

355 Esperimentos VI, VII, VIII. El agua se mantenia en el depósito á la altura constante de 11 pies mas arriba de la pared superior *OF* del tubo chico. Contamos siempre la altura del surtidor desde dicha pared. 100.

I. El surtidor vertical por la salida *F* de 2 lineas de diámetro, subió 9 pies 11 pulg. La columna era hermosa.

II. El surtidor vertical por la salida *G* de 4 lineas de

Fig. diámetro, subió 9 pies 7 pulg. 10 lineas. La columna se desfiguraba mucho, y la garzota se ensanchaba mucho por arriba.

III. El surtidor vertical por la salida *H* de 8 lineas de diámetro, no subió mas de 7 pies 10 pulgadas. La columna se esparramaba muchísimo, y no se formaba, digamoslo así, sino de surtidores separados que se sucedian unos á otros.

356 REFLEXIONES. Por los tres primeros esperimentos se echa de ver que quando el encañado dá las aguas con bastante abundancia, los surtidores grandes suben mas arriba que los chicos. Pero quando el encañado es muy angosto, los tres últimos esperimentos manifiestan que los surtidores chicos suben mas que los grandes. Es, pues, preciso que el diámetro del encañado tenga una proporcion determinada con el diámetro de la salida para que el surtidor suba todo lo posible. Despues determinaremos esta proporcion.

357 Suelen hacerse las salidas á manera de conos ó cilindros salientes cierta altura mas arriba del tronco. Esta práctica es muy defectuosa. Porque los surtidores que suben por esta especie de salida, conforme enseñan los esperimentos IV y V (354), no suben tan alto como los surtidores por salidas hechas inmediatamente en la pared del tubo. Las salidas cilíndricas son las peores de todas. Las salidas que dán mas elevacion al agua, son las que están hechas en la platina orizontal que tapa el estremo del tubo. Es

me-

menester que esta platina sea muy bruñida, delgada, de un grueso uniforme, y agugereada perpendicularmente. Esto confirma lo dicho (287). Fig.

358 De muchos esperimentos que hizo Mariote acerca de los surtidores de agua, y de la comparacion de los nuestros con los suyos resulta que *las diferencias entre las alturas de los surtidores verticales, y las alturas de sus depósitos son entre sí sensiblemente como los quadrados de las alturas de los surtidores.* Luego quando se conociere, por medio de algun esperimento, quanto falta para que un surtìdor suba á la altura de su depósito, se hallará por medio de una simple proporcion, quanto faltará para que otro surtìdor qualquiera de una altura dada suba á la altura de su depósito. Se sacará la altura del depósito, con añadir á la altura del surtidor la cantidad que se sacare de la espresada proporcion.

359 Si la altura del depósito del segundo surtidor de que vamos hablando fuese dada, y quisiésemos determinar la del surtidor, tendríamos que resolver una equacion de segundo grado. Con efecto, sea a la altura del depósito del surtidor del esperimento; b, la altura del mismo surtidor; c, la altura del depósito del surtidor propuesto; x, la altura del mismo surtidor; tendremos la proporcion $a - b : c - x :: bb : xx$; de donde se saca $xx = \frac{bb(c-x)}{a-b}$, y $x = \frac{-bb + b\sqrt{(4ac - 4bc + bb)}}{2(a-b)}$.

360 Los surtidores que se desvian algun tanto de la direccion vertical, suben un poco mas arriba que los surti-

Fig. tidores rigurosamente verticales, conforme lo manifiestan los cinco primeros esperimentos, y hemos dicho la razon (351). Hay, pues, algo que ganar por lo que mira á la elevacion del surtidor, dándole alguna inclinacion. Pero por otro lado no es tan vistoso como quando la garzota cae perpendicularmente sobre sí.

361 Algunas veces el agua que sale por una salida salta mas arriba de lo que debería consentir al parecer la altura del depósito. Este fenómeno que no es mas que momentaneo, es efecto del ayre que el agua lleva consigo en el encañado. Veamos como esto sucede. Supongamos
97. que estando tapado el orificio *O*, el ayre que el agua lleva consigo se haya arrinconado, por lo menos en gran parte, en el corto espacio *mnuh*, estremo del tronco. Quando se abre la salida *O*, este ayre se sale, el agua que le sigue cae en el espacio que él deja vacío, y adquiere en virtud de esta caida dentro del tubo una cierta velocidad que crece, al pasar por el orificio, en la razon de la area del mismo orificio á la area de la seccion perpendicular del tubo. Porque sea *Ee* el corto trecho que el fluido anda dentro del tubo en un instante; en el mismo instante ha de salir por la salida *O* un volumen igual al cilindrillo *eEHh*. De donde se sigue con evidencia, que la velocidad en *O* es á la velocidad en *eh*, como la seccion *eh* es al orificio *O*. Puede, pues, la velocidad en *O*, en los primeros instantes, ser muy grande, quando la salida *O* es muy pequeña respecto de la seccion *eh*. Pero muy presto mengua, porque

el

el movimiento originado de la caida del agua en el espacio *mnub* le aniquila la resistencia de los obstáculos, por ser el efecto de una causa casual y momentanea. La simple presion del fluido superior al orificio es entonces la única causa permanente de la evacuacion; y la velocidad no tiene mas causa que la altura *FO* del depósito. Fig.

Esto manifiesta que estos surtidores repentinos y extraordinarios no son efecto de la elasticidad del ayre que sigue al agua quando pasa por el orificio, conforme lo han creído algunos Autores. Porque es evidente que este ayre se mueve con el agua contigua, del mismo modo que se movería aquella cuyo lugar ocupa, y que no puede dar impulso al agua que le precede. Y por el contrario, el ayre anterior y contiguo á la salida es el que ocasionando la caida del agua, es causa de que crezca considerablemente al principio la altura del surtidor.

362 Hemos prevenido (356) que el encañado ha de ser de cierto grueso para mantener el gasto de la salida: sin cuya condicion el surtidor no sube tan alto como podria. Busquemos el diámetro mínimo que se le pueda dar al encañado, respecto del de una salida propuesta.

Es patente, como poco ha, que la velocidad al salir de la salida es á la velocidad á lo largo del tubo, como la seccion del tubo es á la salida, ó como el quadrado del diámetro del tubo es al quadrado del diámetro de la salida. Luego si llamamos D el diámetro del tubo; d, el de la salida; b, la altura FO del depósito; u, la velocidad á lo largo del

Fig. del tubo, y consideramos que la velocidad permanente del fluido al salir de la salida, la única que consideramos aquí, puede espresarse por $\sqrt{h}$; tendremos la proporcion $\sqrt{h} : u :: DD : dd$, y por consiguiente $u = \frac{dd}{DD}\sqrt{h}$.

Por la misma razon, si hubiere otro tubo y otra salida, y llamamos respectivamente D', d', u', h' las cantidades análogas á D, d, u, h, sacaremos la equacion $u' = \frac{d'd'}{D'D'}\sqrt{h'}$.

363 Sentado esto, si se quiere que los surtidores sean abastecidos de un mismo modo, y por consiguiente que si la velocidad en el primer tubo deja al primer surtidor toda la altura posible, la velocidad en el segundo tubo dege tambien al segundo surtidor toda la altura posible, no habrá mas que hacer $u = u'$, ó $\frac{dd}{DD}\sqrt{h} = \frac{d'd'}{D'D'}\sqrt{h'}$. Luego tendremos entonces $DD : D'D' :: dd\sqrt{h} : d'd'\sqrt{h'}$, esto es que *los quadrados de los diámetros de los encañados han de estar unos con otros en razon compuesta de los quadrados de los diámetros de las salidas, y de las raices quadradas de las alturas de los depósitos.*

Así, si se conoce por medio de un esperimento inmediato el diámetro que ha de tener un tubo para abastecer el gasto de una salida dada, con una altura dada de depósito, se determinará el diámetro de otro tubo qualquiera, para abastecer una salida dada, con una altura dada de depósito. En consecuencia de esto, hice el esperimento siguiente.

364 Esperimento IX. Representa la figura un tubo de

de hoja de lata de 1 pulgada de diámetro, armado de un Fig.
embudo grande *ACB* para recibir el agua que debia abaste- 101.
cer el gasto de la salida. El tronco *RO* era de plomo, y su diámetro de un poco mas de una pulgada. Se plantaron succesivamente en *O* salidas desde una linea de diámetro hasta 7 lineas. La altura *FO* del depósito fue constantemente de 3 pies 2 pulg. 11 lineas, y los surtidores subieron conforme espresa la tabla.

Diámetros de la salida.	Altura del surtidor.		
1 lineas.	3 pies	1 pulg.	6 lin.
2	3	1	8
3	3	2	0
4	3	1	7
5	3	1	5
6	3	0	4
7	2	10	6

365 Reflexiones. Resulta de este esperimento que una salida muy pequeña hace perder algo de su altura al surtidor por la razon que dimos (352). Pero la estension de la salida tiene su límite; y podemos sentar que para una altura de 3 pies 2 pulg. 11 lineas de depósito, y un encañado de 1 pulg. de diámetro, la salida podrá tener como unas $3\frac{3}{4}$ lineas de diámetro. Si se busca por esta regla qual deberá ser el diámetro del encañado respecto de 52 pies de altura de depósito, y una salida de 6 lineas de diámetro

Fig. tro, se sacará que este diámetro ha de ser de unas 38 líneas. Mariote halló por esperiencia 36 lineas. Con la mira de facilitar los cálculos, supondremos (conforme á la misma regla) que para una altura de 16 pies, y una salida de 6 lineas de diámetro, es preciso que el encañado tenga como unas $28\frac{1}{2}$ lineas de diámetro. No puede menos de ganarse algo por lo que mira á la altura del surtidor, haciendo los encañados mas grandes de lo que piden estos cálculos; pero no se han de hacer mas angostos, si se quiere que el surtidor suba tan alto como es de esperar.

En todos estos cálculos no hablo de la contraccion de la vena, porque este elemento influye del mismo modo en las razones que consideramos.

366 Hemos dicho (256) que las velocidades al salir de un depósito por diferentes orificios, eran sensiblemente las mismas (prescindiendo de todo obstáculo) por los orificios grandes que por los chicos, con tal sin embargo que la altura del depósito sea siempre mucho mayor que el orificio mayor. Aquí se puede considerar el encañado como el depósito, y la salida como el orificio. Considerando entonces que una altura mayor del surtidor es señal de una velocidad mayor al salir de un orificio, y suponiendo que en todos los casos el agua venga con bastante abundancia, se podrá formar juicio del límite de la razon que debe haber en cada caso entre la anchura del depósito y la area del orificio, á fin de que el orificio no cause con su estension merma ninguna en la velocidad.

El

367 El tubo *CRO* dió ocasion de hacer otro esperimento que aclarará mucho lo dicho (170). Fig. 102.

Hice quitar el tronco, y poner succesivamente en *O* muchas salidas de diferentes areas; despues hice llenar el tubo hasta *C*, y degé que se vaciase por dichas salidas, sin darle mas agua provisional. Los surtidores iban á dar en una tabla orizontal *TP*. Quando el diámetro de la salida pasaba de 4 lineas, el surtidor iba en el primer instante á *Z*, despues crecia hasta *S*, despues menguaba sin cesar; por manera que la mayor amplitud del surtidor no era entonces la que corresponde á la mayor altura *OX*, sí á otra altura *OY*. Por lo que mira á los surtidores por salidas muy pequeñas, la amplitud máxima es la que corresponde á la altura máxima del agua en el depósito. Se echa, pues, de ver que la proposicion (170) no puede ser verdadera teóricamente sino respecto de orificios pequeños, conforme hemos supuesto.

368 Volvamos al asunto. Despues de determinado el diámetro del tubo que ha de dar el agua para el gasto del surtidor, se ha de poner cuidado en no disminuir la capacidad del tubo con las llaves que se le ponen para atajar, quando se quiere, el curso del agua, ó dejar salir el ayre que esta lleva consigo. Sucede muchas veces, que quando el paso por la *boca* que deja pasar el agua del depósito al tubo, es mas angosto que el tubo, no viene el agua con bastante abundancia, y falta mucho para que suba el surtidor á la altura conveniente. Sucede tambien muchas veces que los

tu-

Fig. tubos se atascan con las materias estrañas que el agua lleva consigo. Ya reparamos en otro lugar (163 y 166) lo mucho que las *angostaduras* de toda especie en los encañados perjudican á la altura y al gasto de los surtidores. Es, pues, del caso hacer los diámetros de dichos encañados mayores en la práctica de lo que pide la teórica.

369 Se ha de procurar con sumo cuidado que no haya ningun ángulo recto en los encañados que se han de *acodar*; porque el impulso de la corriente contra esta especie de ángulos consume gran parte de su velocidad, y cansa mucho el encañado. Quando es preciso encorvar los encañados, se ha de distribuir la curvatura en toda su longitud, ó por lo menos en una longitud bastante larga.

370 Si un mismo encañado hubiese de dar agua para muchas salidas, se habrá de buscar una salida, cuya area sea igual á la suma de las areas de todas las salidas propuestas, y determinar la capacidad del encañado como si hubiese de dar abasto á la salida hallada.

371 Hay otras muchas prevenciones que hacer acerca de los encañados; pero las dejamos para mas adelante, donde trataremos determinadamente del movimiento de las aguas por los encañados. Allí determinaremos el grueso que han de llevar para resistir la fuerza de la corriente. Lo que acabamos de decir en el asunto pertenece particularmente á los encañados cuyo destino es dar abasto á los surtidores.

372 Añadiremos aquí una tabla que facilitará la aplicacion de los principios que acabamos de sentar.

En

En las dos primeras columnas están las alturas de los Fig.
surtidores, y las alturas correspondientes de los depósitos. Así, por egemplo, se vé que para hacer un surtidor de 5 pies de alto, es preciso que la superficie del agua en el depósito esté á la altura de 5 pies 1 pulg. respecto de la salida. Las alturas de los surtidores y depósitos que no están en la tabla, se hallan por medio de la misma tabla combinada con lo dicho (358 y 359).

La tercera columna contiene en *pintas* de Paris, tales que 36 componen el pie cúbico, los gastos en 1 minuto por una salida de 6 lineas de diámetro, respecto de las alturas de la segunda columna. Estos gastos se han determinado en virtud de los esperimentos referidos (132 y sig.). Quando ocurren fracciones de pintas, menores que $\frac{1}{2}$, las omito; pero si dichos quebrados valen $\frac{1}{2}$ ó mas, pongo 1 en su lugar. Conocidos los gastos por un orificio de 6 lineas de diámetro, se hallarán por medio de una proporcion los gastos por otro orificio qualquiera con una misma altura en el depósito, porque hemos demostrado (253) que los gastos son entonces entre sí como las areas de los orificios, ó como los quadrados de los diámetros ó de los radios de las mismas salidas.

En la quarta columna están los diámetros que se les debe dar á los encañados para una salida de 6 lineas de diámetro, respecto de las alturas de la segunda columna. Se ha practicado aquí respecto de las fracciones de lineas, lo mismo que respecto de las fracciones de pintas en la co-

lum-

Fig. lumna precedente. Quando se quieran sacar los diámetros de los encañados para otras salidas y alturas qualesquiera de depósito, se determinarán por la misma tabla combinada con lo dicho (363).

Esta quarta columna se ha calculado en el supuesto (365) de que respecto de una salida de 6 lineas de diámetro, con 16 pies de altura de depósito, es preciso que el encañado tenga $28\frac{1}{2}$ lineas de diámetro, y en virtud del principio (363) que los quadrados de los diámetros de los encañados son como los quadrados de los diámetros de las salidas, multiplicados por las raices de las alturas de los depósitos.

Falta otra columna para determinar el grueso de los encañados. Pero esta determinacion pende de principios que sentaremos despues.

Fig.

Alturas de los surtidores, espresadas en pies.	Alturas de los depósitos, espresadas en pies y pulgadas.		Gasto en 1 min. por una salida de 6 lin. de diám. espresad. en pint. de Paris.	Diám. de los tubos de conduc. relativos á las dos colum. preced. espres. en lin.
5	5	1	32	21
10	10	4	45	26
15	15	9	56	28
20	21	4	65	31
25	27	1	73	33
30	33	0	81	34
35	39	1	88	36
40	45	4	95	37
45	51	9	101	38
50	58	4	108	39
55	65	1	114	40
60	72	0	120	41
65	79	1	125	42
70	86	4	131	43
75	93	9	136	44
80	101	4	142	45
85	109	1	147	46
90	117	0	152	47
95	125	1	158	48
100	133	4	163	49

Fig. 373 Aunque la aplicacion de las reglas antecedentes á los casos prácticos parece facil, enseñaremos sin embargo como se ha de egecutar, satisfaciendo las dos preguntas siguientes.

Pregunta I. *Se intenta hacer un surtidor vertical de 44 pies de altura por una salida de 1 pulg. de diámetro; y se pregunta 1.° quál ha de ser la altura del depósito. 2.° el gasto del surtidor. 3.° el diámetro del encañado.*

1.° Ya que las diferencias entre las alturas de los surtidores verticales y las alturas de los depósitos, son entre sí como los quadrados de las alturas de los surtidores (358), y un surtidor de 45 pies pide una altura de depósito de 51 pies 9 pulg. (372), haremos esta proporcion $(45)^2 : (44)^2 :: 6$ pies 9 pulg.: un quarto término que es 6 pies 7 pulg.; añadiendo esta cantidad á 44 pies, la suma 50 pies 7 pulg. será la altura del depósito.

2.° Con hacer la proporcion $\sqrt{(51 \text{ pies } 9 \text{ pulg.})} : \sqrt{(50 \text{ pies } 7 \text{ pulg.})} :: 101$ pintas : un quarto término que es como unas 100 pintas, este quarto término será el gasto en 1 minuto por una salida de 6 lineas de diámetro, siendo de 50 pies 7 pulg. la altura del depósito. Multiplicando este gasto por 4, porque el orificio propuesto tiene 1 pulg. de diámetro, el producto 400 pintas será el gasto que se pide.

3.° Los quadrados de los diámetros de los encañados están en razon compuesta de los quadrados de los diámetros de las salidas, y de las raices quadradas de las alturas de los depósitos, y por consiguiente los diámetros de los enca-

ña-

ñados son como los productos de los diámetros de las salidas Fig.
por las raices quartas de las alturas de los depósitos. Tendremos, pues, la proporcion $6\sqrt[4]{(51 \text{ pies } 9 \text{ pulg.})} : 12\sqrt[4]{(50 \text{ pies } 7 \text{ pulg.})} :: 38$ lineas : es al diámetro que se pide, que sale de unas 6 pulg. 3 lineas.

374 Pregunta II. *Hay una pieza de agua que no se puede llenar sino á intervalos. Tiene dicha pieza 4 pies de profundidad, y su cabida es de 20 toesas cúbicas de agua. Está como unos 38 pies mas alta que un jardin, en el qual se quiere hacer un surtidor con el agua que puede dar, sin que le venga mas de otra parte: se ha de determinar todo lo que corresponde al establecimiento de este surtidor de agua.*

Lo primero á que se debe atender para satisfacer esta pregunta, es buscar el tiempo que gastará la pieza de agua en vaciarse toda por una salida tomada á arbitrio, porque en esto se funda la determinacion de la salida que se ha de usar, y de las demás cosas pertenecientes al surtidor. A este caso parece se aplica la cuestion de antes (184); pero creo que en la práctica se debe preferir el método siguiente que es bastante exacto respecto de la mira que se lleva.

Supongo que la altura media del agua mas arriba de la platina orizontal en la qual se ha de hacer la salida, sea de 36 pies. Se puede tomar en lugar de esta altura, sin recelo de error muy sustancial, la suma de la mitad de la altura del agua en el depósito, y de la altura del suelo del depósito mas arriba de la salida. Hecho esto, transformo la pregunta en otra que ya queda (318) respondida, y

Fig. consiste en *hallar en que tiempo 20 toesas cúbicas de agua saldrán, por egemplo, por una salida de 1 pulg. de diámetro, suponiendo que el vaso se mantenga constantemente lleno á la altura de 36 pies mas arriba del orificio.* Es evidente que el tiempo determinado por este método, no puede discrepar mucho del tiempo que se busca. Pero practicando lo mismo que antes (318), saco que dicho tiempo viene á ser unos 613 minutos, ó 10 horas 13 minutos. Luego el surtidor podrá durar 10 horas 13 minutos, suponiendo la salida de 1 pulg. de diámetro. Si se quiere que el surtidor dure quatro veces mas, se deberá usar una salida quatro veces menor, y cuyo diámetro sea por lo mismo de 6 lineas &c. De este modo se determinará el diámetro de la salida por el tiempo que se deseare que la pieza de agua mantenga el surtidor.

Dado el diámetro del orificio, y la altura del depósito, lo demás de la resolucion se saca como en la pregunta antecedente.

De los Surtidores oblicuos.

103. 375 Sea el encañado *GEO* que dá agua por la salida *O* en una direccion qualquiera *OK* inclinada al orizonte. Si cada gota inmediatamente despues de salir perdiera su pesantez, se moveria sin cesar uniformemente en la misma direccion *OK*; pero la pesantez la aparta de esta direccion, la desvia y la obliga á trazar una curva *OSH*. El empeño está en determinar primero la naturaleza de esta curva.

376 Como la velocidad de una gota qualquiera al sa-

salir por una salida *O* pende de la altura *FO* del depósito (136 y 137), con esta velocidad continuada uniformemente en su direccion *OK* la gota andaría un espacio *OK* duplo de *OF*, en el mismo tiempo que un cuerpo grave gastaría para caer de la altura *FO* (139). Desde los puntos *O* y *K* tírense las orizontales *OH*, *KI*, de las quales la segunda encuentra en *I* la vertical *OF* prolongada si fuere menester. Divido el espacio *OK* en una infinidad de elementos iguales *Oa*, *ab*, *bc* &c. y bajo las verticales *ad*, *bf*, *cg* &c. que determinan los elementos correspondientes *Od*, *df*, *fg* &c. de la curva *OSH*. Sobre *Od*, *df*, *fg* &c. como diagonales, construyo los paralelogramos *Oadb*, *dlfm*, *fngp* &c. cada uno de los quales tiene un lado paralelo á *OK*, y un lado vertical; despues prolongo las rectas *fm*, *gp* &c. hasta la vertical *ON*. Hecho esto, consideremos cada instante el movimiento que la gota propuesta tiene realmente en las direcciones de los lados *Od*, *df*, *fg* &c. de la curva, como compuesto de otros dos, el uno paralelo á *OK*, procedente del impulso inicial, el otro vertical, que es efecto de la gravedad. Estos movimientos son *Oa* y *Ob* respecto del primer lado, *dl* ó *ab* y *dm* ó *bi* respecto del segundo, *fn* ó *bc* y *fp* ó *ik* respecto del tercero &c. Discurriendo siempre del mismo modo hasta que la suma de los elementos *Oa*, *ab*, *bc* &c. forme la recta finita *OL*, y la suma de los elementos *Ob*, *bi*, *ik* &c. forme la vertical, correspondiente *ON* ó *LM*, se echará de ver que la gota traza la curva *OSH*, con la circunstancia invariable de que en el tiempo que an- Fig.

Fig. daría uniformemente el espacio qualquiera OL con la velocidad que tiene en O, andaría la vertical ON ó LM correspondiente á impulsos de sola la pesantez, y siendo cero su velocidad en el primer instante. Pero si llamamos t' el tiempo que gasta un cuerpo grave para caer de una altura dada a, la espresion del tiempo que gastaría para caer de la altura LM, será $\frac{t'}{\sqrt{a}} \times \sqrt{LM}$, y la espresion del tiempo que gastará para caer de la altura FO, será $\frac{t'}{\sqrt{a}} \times \sqrt{FO}$ (IV. 50). Luego el tiempo que se gastare en andar uniformemente OK con la velocidad que la gota tuviere en O, será tambien $\frac{t'}{\sqrt{a}} \times \sqrt{FO}$; y para sacar el que se gasta en andar uniformemente OL con la misma velocidad, se ha de hacer la proporcion OK ó $2FO : OL :: \frac{t'}{\sqrt{a}} \times \sqrt{FO}$: al tiempo que se busca $= \frac{t'}{\sqrt{a}} \times \frac{OL}{2\sqrt{FO}}$. Tendremos, pues, la equacion $\frac{t'}{\sqrt{a}} \times \sqrt{LM} = \frac{t'}{\sqrt{a}} \times \frac{OL}{2\sqrt{FO}}$, ó $4LM \times FO = (OL)^2$, que espresa la naturaleza de la curva OSH.

377 Pero para conocer aun mas particularmente esta curva, se ha de considerar que los dos triángulos semejantes OIK, OQL, dán $OL = \frac{OQ \times KO}{KI} = \frac{OQ \times 2FO}{KI}$, $LQ = \frac{OQ \times OI}{KI}$, $LM = LQ - MQ = \frac{OQ \times OI}{KI} - MQ$. Substituyendo en la equacion precedente en lugar de OL y LM sus valores, hallaremos $(OQ)^2 \times FO = OQ \times OI \times KI - MQ \times (KI)^2$. Pero MQ llega á ser cero, quando $OQ = 0$, y quando OQ es $= \frac{OI \times KI}{FO}$. Luego con hacer $OT = \frac{OI \times KI}{2FO} = \frac{OH}{2}$, levantando la vertical TS, sacaremos $ST = \frac{(OI)^2}{4FO}$. Luego si tiramos tambien MP perpendicular á ST, saldrá $OQ = OT - MP = \frac{OI \times KI}{2FO} - MP$, $MQ = ST - SP$

=

$= \frac{(OI)^2}{4FO} - SP$. Substituyendo los valores de OQ y MQ Fig.
en la equacion $(OQ)^2 \times FO = OQ \times OI \times KI - MQ \times (KI)^2$, saldrá, despues de egecutadas todas las reducciones, $(MP)^2 = \frac{(KI)^2}{FO} \times SP$. Por donde se echa de ver que la curva OSH es una parábola, cuyo vértice es S, el ege ST, y el parámetro $= \frac{(KI)^2}{FO}$. Llamemos b la altura FO del depósito; R, el seno total; m, el seno del ángulo KOI que la direccion del surtidor forma con la vertical; n, el coseno del mismo ángulo: tendremos $KI = OK \times \frac{m}{R} = \frac{2bm}{R}$, $OI = OK \times \frac{n}{R} = \frac{2bn}{R}$. Luego la abscisa $ST = \frac{(OI)^2}{4FO} = b \times \frac{n^2}{R^2}$, la ordenada $OT = \frac{OI \times KI}{2FO} = 2b \times \frac{mn}{R^2}$, el parámetro de la parábola $= \frac{(KI)^2}{FO} = 4b \times \frac{m^2}{R^2}$.

378 De aquí se saca la construccion siguiente. Sobre la altura OF del depósito como diámetro, trácese el semicírculo OLF que encuentre en L la direccion inicial del surtidor. Despues de tirada la ordenada LN, prolónguesela del lado de S, y tómese $LS = LN$. Desde el punto S bágese la vertical ST que encuentra en T la orizontal OH. Sobre las coordenadas rectángulas ST, OT, trácese la parábola OSH cuyo vértice esté en S; esta será la curva que forma el surtidor de agua. 104.

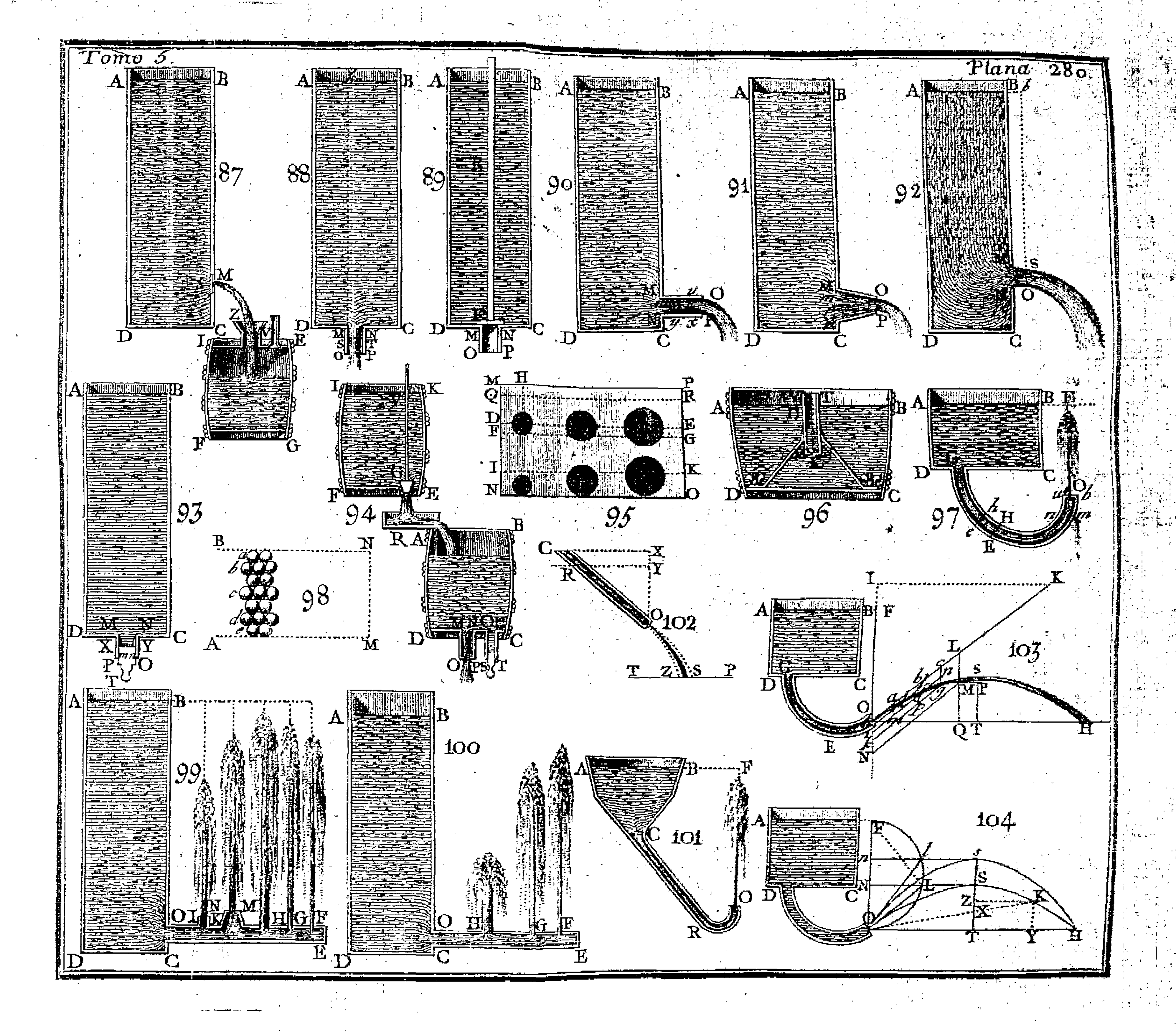
Porque haciendo, como poco ha, $FO = b$, el seno total $= R$, el seno del ángulo $LON = m$, su coseno $= n$, y tirando la cuerda FL, sacaremos, por la construccion que acabamos de indicar, $OT = 2LN = \frac{2LF \times OL}{FO} = \frac{2}{FO} \times \frac{FO \times m}{R} \times \frac{FO \times n}{R} = 2b \times \frac{mn}{R^2}$, $ST = NO = NL \times \frac{n}{m} = b \times \frac{n^2}{R^2}$, el parámetro $= \frac{(OT)^2}{ST} = 4b \times \frac{m^2}{R^2}$.

Fig. 379 Luego si tomamos *Fn* = *ON*, y por consiguiente *ln* = *LN*, y trazamos la parábola *OsH* con la misma ley que la parábola *OSH*; ambas parábolas tendrán sus vértices en la misma vertical *TSs*, y se encontrarán en *H*. Lo mismo sucederá respecto de todos los demás pares de parábolas que se trazaren del mismo modo.

380 Si el terreno no fuese orizontal, y formase con la orizontal *OH* el ángulo *KOH*; una vez conocido este ángulo, se determinaría con facilidad el punto *K* donde la parábola *OSH* encuentra el terreno. Porque bajando la vertical *KY*, y tirando la ordenada *KZ* al ege *ST*, supongamos las cantidades conocidas $OT = a$, $ST = b$, $TX = c$, el parámetro de la parábola $OSH = p$, la incógnita *KY* ó $ZT = x$, los triángulos semejantes *XTO*, *XZK* darán $ZK = \frac{OT \times ZX}{XT} = \frac{a(x-c)}{c}$. Luego porser $SZ = b - x$, y por la propiedad de la parábola, tendremos $\frac{a^2(x-c)^2}{c^2} = p(b-x)$. De donde se saca $x = c - \frac{pc^2}{2a^2} \pm \sqrt{\left[\frac{pbc^2}{a^2} - c^2 + \left(c - \frac{pc^2}{2a^2}\right)^2\right]}$, cuya equacion es facil de construir por medio del círculo.

381 Quando el orificio es vertical, la parábola *OM*
105. que el surtidor traza, tiene por parámetro el quádruplo de la altura *BO* del depósito, y la ordenada $PM = 2\sqrt{(OP \times OB)}$.

382 Manifiestan estas fórmulas que quando no se conociere respecto de un sitio determinado la altura del agua que tuviere un encañado, se hallará esta altura por medio de la amplitud de la parábola que trazáre el surtidor formado en
105. dicho lugar. Por egemplo, si no supiéramos qual es la altura *OB* del depósito, se sacaría por medio de la equacion *PM* =



87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104

$2\sqrt{(OP \times OB)}$ que dá $OB = \frac{(PM)^2}{4OP}$. No tiene mas dificultad la cuestion en la hypótesi general de antes (378). Fig.

383 Sea *ADCB* un vaso prismático vertical; y supongamos que salga un surtidor por la salida lateral *O*. Si hacemos $OH = OB$, y tiramos la ordenada *HQ* de la parábola *OQM*, la recta *BQ* tocará esta curva en *Q*. Pero ya que la propiedad de esta misma curva *OQM* dá $(HQ)^2 = OH \times 4OB$, tendremos con evidencia $HQ = HB$, y por consiguiente el ángulo *HBQ* será de 45°. Por donde se echa de ver que si en todos los puntos de la altura *BC* hubiere salidas *O*, todos los surtidores que por ellos salieren, serán tocados por la recta *BQ* que forma con *BC* un ángulo de 45°.

384 Los surtidores oblicuos no se abalanzan tan lejos en la práctica como saca la teórica. Los retardan las mismas causas, con corta diferencia, que retardan los surtidores verticales. Voy á referir dos esperimentos que he hecho acerca de su amplitud.

385 Esperimentos I y II. Salia el surtidor en ambos casos por una salida vertical *O* de 6 lineas de diámetro.

I. Quando la altura *OB* del depósito era de 9 pies, á una abscisa vertical *OP* de 4 pies 3 pulg. 7 lineas correspondia una ordenada orizontal *PM* de 11 pies 3 pulg. 3 lin.

II. Quando la altura *OB* del depósito era de 4 pies, á una abscisa vertical *OP* de 4 pies 3 pulg. 7 lineas correspondia una ordenada orizontal *PM* de 8 pies 2 pulg. 8 lin.

386 Reflexiones. De esto se debe inferir que las amplitudes efectivas de los surtidores son algo menores que las

Fig. las amplitudes teóricas. Pero así las primeras como las últimas, son entre sí, á lo menos sensiblemente, como las raices de las alturas de los depósitos. Luego conociendo por esperiencia una amplitud efectiva, se sacarán las otras por simples proporciones. Pero estas determinaciones no pueden ser exactas, á no ser que sean medianas las alturas de los depósitos. Porque respecto de alturas considerables, no se puede suponer, ni que los surtidores tracen sensiblemente párabolas, ni que sus amplitudes sean proporcionales á las raices de las alturas de los depósitos. Las verdaderas curvas que trazan entonces, parece que no son determinables por teórica; y se necesitan muchísimos esperimentos para determinarlas por aproximacion.

387 Es escusado prevenir que las dimensiones de los encañados, cuyo destino es abastecer surtidores oblicuos, se determinan del mismo modo que las de los surtidores verticales. Esto es evidente, pues siendo una misma la altura del depósito, y uno mismo el orificio, el gasto es uno mismo en ambos casos (348).

Del movimiento de las aguas por los encañados.

388 Quando hay que conducir aguas desde un depósito á un sitio distante, el rozamiento con las paredes del encañado, que es de poca consideracion quando el trecho es corto, causa efectos notables quando se repite en un trecho dilatado. No se debe, pues, determinar la velocidad del agua, ó el gasto del encañado por los métodos declarados

dos (232 y sig.), sin incluir en los resultados las modificaciones correspondientes á la espresada resistencia. La esperiencia nos guiará en esta investigacion. Fig.

Del gasto de los encañados.

389 Bien que los encañados son por lo regular curvilineos é inclinados al orizonte, los supondremos primero rectilineos. Las consideraciones que haremos acerca de este caso, que es el mas sencillo de todos, darán mucha luz acerca de este asunto considerado generalmente, conforme manifestaremos muy en breve.

390 *FEDG*, *HKLM* son dos depósitos; en el primero que ha de abastecer el gasto, cabrán unas 25 ó 30 toesas cúbicas de agua; en el segundo, que es mucho menor, y en el qual se mantiene el agua á una altura constante mas arriba del ege del encañado, no cabrán mucho mas allá de unas 6 toesas cúbicas de agua, quando está lleno hasta su mayor altura que será de unos $4\frac{1}{2}$ pies. Un tubo orizontal *O* de hoja de lata, de unas 8 á 9 pulgadas de diámetro, se comunica por el uno de sus estremos con el depósito *HKLM*, y lleva en su otro estremo una caja quadrada *X* de hoja de lata, de un pie de alto en cada cara, y cerrada por todas partes. En una de las caras verticales de esta caja están acomodados en *A* y *B*, dos tubos rectilineos de hoja de lata, el uno de 16 lineas de diámetro interior, el otro de 2 pulg. de diámetro, tambien interior. Cogen de largo hasta 180 pies. La primera figura lo representa todo en perfil, 106.

106.

Fig. 107. fil, la segunda representa el plan. El rectángulo *efgd* es la seccion orizontal del depósito provisional; *hmk* es el depósito que abastece los tubos; *o*, el tubo de comunicacion de dicho depósito con la caja quadrada *x*; *bt* y *bu*, los dos tubos que se acomodan en la caja *x*.

Es evidente que por estar la caja *X* cerrada por todas partes, la altura del agua mas arriba del ege de cada encañado, en cada esperimento, es una linea vertical comprendida entre dicho ege, y el plano orizontal que está ras con ras con la superficie del agua en el depósito *HKLM*. Los dos tubos se prolongaron succesivamente desde 30 pies hasta 180; y se midió el gasto de cada uno de ellos, estando tapado el otro. A la entrada del encañado *O* en el depósito *HKLM*, habia un tambor de 1 pie de diámetro y altura, acribillado con muchos agugeros para dar paso al agua, y detener al mismo tiempo las porquerías que podrian atascar los encañados, y turbar el movimiento del agua.

De trecho en trecho se hicieron agugeritos en las paredes de cada tubo para facilitar la salida del ayre. Estos agugeros se tapaban despues con cera.

391 Esperimentos I, II, III.. VI. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del ege del tubo = 1 pie; y el diámetro del tubo = 16 lineas.

I. A 30 pies de la caja *X*, en 45 segundos se cogieron 2084 pulg. cúbicas de agua.

II. A 60 pies de la caja, en 45 segundos se cogieron 1468 pulg. cúbicas de agua.

A

III. A 90 pies de la caja, en 45 segundos se cogieron 1190 pulg. cúbicas de agua. Fig.

IV. A 120 pies de la caja, en 50 segundos se cogieron 1126 pulg. cúbicas de agua.

V. A 150 pies de la caja, en 50 segundos se cogieron 982 pulg. cúbicas de agua.

VI. A 180 pies de la caja, en 50 segundos se cogieron 877 pulg. cúbicas de agua.

392 Esperimentos VII, VIII ... XII. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del ege del tubo = 2 pies, y el diámetro del tubo siempre fue de 16 lineas.

I. A 30 pies de la caja, en 50 segundos se cogieron 3388 pulg. cúbicas de agua.

II. A 60 pies de la caja, en 50 segundos se cogieron 2407 pulg. cúbicas de agua.

III. A 90 pies de la caja, en 50 segundos se cogieron 1960 pulg. cúbicas de agua.

IV. A 120 pies de la caja, en 1 minuto se cogieron 2011 pulg. cúbicas de agua.

V. A 150 pies de la caja, en 1 minuto se cogieron 1762 pulg. cúbicas de agua.

VI. A 180 pies de la caja, en 1 minuto se cogieron 1583 pulg. cúbicas de agua.

393 Esperimentos XIII, XIV ... XVIII. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del ege del tubo = 1 pie; y el diámetro del tubo = 2 pulg.

A

Fig. I. A 30 pies de la caja, en 70 segundos se cogieron 8960 pulg. cúbicas de agua.

II. A 60 pies de la caja, en 70 segundos se cogieron 6492 pulg. cúbicas de agua.

III. A 90 pies de la caja, en 70 segundos se cogieron 5290 pulg. cúbicas de agua.

IV. A 120 pies de la caja, en 75 segundos se cogieron 4930 pulg. cúbicas de agua.

V. A 150 pies de la caja, en 75 segundos se cogieron 4358 pulg. cúbicas de agua.

VI. A 180 pies de la caja, en 75 segundos se cogieron 3899 pulg. cúbicas de agua.

394 Esperimentos XIX, XX. . . XXIV. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del ege del tubo = 2 pies; y el diámetro del tubo era siempre de 2 pulg.

I. A 30 pies de la caja, en 1 minuto se cogieron 11219 pulg. cúbicas de agua.

II. A 60 pies de la caja, en 1 minuto se cogieron 8190 pulg. cúbicas de agua.

III. A 90 pies de la caja, en 1 minuto se cogieron 6812 pulg. cúbicas de agua.

IV. A 120 pies de la caja, en 65 segundos se cogieron 6375 pulg. cúbicas de agua.

V. A 150 pies de la caja, en 65 segundos se cogieron 5668 pulg. cúbicas de agua.

VI. A 180 pies de la caja, en 65 segundos se cogieron 5103 pulg. cúbicas de agua.

De

395 De estos esperimentos resulta la tabla siguiente. Fig.

Altura constante del agua en el dep. mas arriba del ege del tubo, espresada en pies.	Distancias de los sitios donde se cogió el agua, á la caja quadr. espresadas en pies.	Númer. de las pulgad. cubicas de agua que dió en 1 min. el encañado de 16 lineas de diám.	Númer. de las pulgad. cúbicas de agua que dió en 1 min. el tubo de 2 pulgad. de diámetro.
1	30	2778	7680
1	60	1957	5564
1	90	1587	4534
1	120	1351	3944
1	150	1178	3486
1	180	1052	3119
2	30	4066	11219
2	60	2888	8190
2	90	2352	6812
2	120	2011	5885
2	150	1762	5232
2	180	1583	4710

396 Reflexiones. Si por lo dicho (314) se buscan los gastos de dos tubos aditicios de 16 lineas, y de

Fig. 2 pulg. de diámetro, cuyas paredes siga el agua, se hallará que en 1 minuto que tomamos por la unidad de tiempo,

1.° Siendo la altura del depósito de 1 pie, el encañado de 16 lineas de diámetro daría 6330 pulg. cúbicas.

2.° Siendo la altura del depósito de 2 pies, el mismo tubo daría 8939 pulg. cúbicas de agua.

3.° Siendo la altura del depósito de 1 pie, el tubo de 2 pulg. de diámetro daría 14243 pulg. cúbicas de agua.

4.° Siendo la altura del depósito de 2 pies, el mismo tubo daría 20112 pulg. cúbicas de agua.

Se echa de ver que estos gastos son mucho mayores que sus correspondientes en la tabla precedente; y que el gasto de cada tubo mengua tanto mas quanto mas largo es el tubo.

397 Para averiguar, al poco mas ó menos, en qué razon mengua el gasto de un mismo tubo á medida que crece su longitud, tomaremos el número 100 para representar en todos los casos el gasto en el origen, y entonces los gastos á 30 pies, á 60 pies, á 90 pies &c. serán los quatro términos de las proporciones siguientes.

1.° El tubo de 16 lineas de diámetro, siendo de 1 pie la altura del agua en el depósito, dá

6330 : 2778 :: 100 : 43,89
6330 : 1957 :: 100 : 30,91
6330 : 1587 :: 100 : 25,07
6330 : 1351 :: 100 : 21,34
6330 : 1178 :: 100 : 18,61
6330 : 1052 :: 100 : 16,62.

2.°

2.° El mismo tubo, siendo de 2 pies la altura del depósito, dá Fig.

8939 : 4066 :: 100 : 45,48
8939 : 2888 :: 100 : 32,31
8939 : 2352 :: 100 : 26,31
8939 : 2011 :: 100 : 22,50
8939 : 1762 :: 100 : 19,71
8939 : 1583 :: 100 : 17,70.

3.° El tubo de 2 pulgadas de diámetro, siendo de 1 pie la altura del depósito, dá

14243 : 7680 :: 100 : 53,92
14243 : 5564 :: 100 : 39,06
14243 : 4534 :: 100 : 31,83
14243 : 3944 :: 100 : 27,69
14243 : 3486 :: 100 : 24,48
14243 : 3119 :: 100 : 21,90.

4.° Finalmente el mismo tubo, siendo de 2 pies la altura del depósito, dá

20112 : 11219 :: 100 : 55,78
20112 : 8190 :: 100 : 40,72
20112 : 6812 :: 100 : 33,87
20112 : 5885 :: 100 : 29,26
20112 : 5232 :: 100 : 26,01
20112 : 4710 :: 100 : 23,41.

398 Manifiestan estos cálculos que el gasto de un tubo de alguna longitud es mucho menor de lo que seria, si el agua no tropezára con ningun obstáculo en su curso,

Fig. y conservára toda su velocidad inicial. Con efecto, las eminencias ó puntas que siempre se hallan en las paredes de los tubos, por mas lisas que las supongamos, han de minorar por precision la velocidad de la corriente. Esta resistencia varía conforme varía la longitud del tubo, su grueso y la altura del depósito. Veamos cómo estos tres elementos contribuyen para formarla.

399 Es evidente que respecto de un mismo tubo y una misma altura de depósito, el gasto ha de ir menguando tanto mas, quanto mas se prolonga el tubo. Algunos Autores han afirmado que la velocidad del agua vá menguando en la serie de los números de una progresion arismética, cuyo primer término espresára la velocidad á la entrada del tubo, y el último espresára la velocidad efectiva al salir del mismo tubo. Esto sería verdadero, si todos los filetes de que podemos suponer que la columna fluida se compone, rozasen inmediatamente con las paredes del tubo, porque entonces encontrarian en tiempos iguales obstáculos iguales que les quitarian grados iguales de velocidad. Pero hemos de considerar que solamente los filetes laterales son los que rozan inmediatamente con las paredes del tubo, y que este rozamiento, comunicándose gradualmente á los filetes contiguos, mengua indispensablemente desde la circunferencia al centro. Por consiguiente, los filetes laterales, y los filetes *centrales* no padecen un mismo decremento de velocidad. A medida que crece la longitud del tubo, la velocidad de los primeros mengua; y en virtud de esta diminucion de ve-

lo-

locidad, ván atrasando siempre menos á los demás. Luego siendo constantemente la misma la fuerza que impele el agua á la entrada del tubo, los gastos han de ir mermando siempre menos al paso que se ván apartando del origen del tubo. Nuestros esperimentos confirman este razonamiento, pues el exceso de un gasto respecto de otro gasto consecutivo vá siendo siempre menor.

400 Por los mismos esperimentos se puede hallar, por lo menos con corta diferencia, en qué razon los gastos menguan. Con efecto, supongamos que la recta AG representa el uno de nuestros tubos, y dividámosla en seis partes iguales AB, BC, CD, DE, EF, FG que espresan las divisiones del mismo tubo; imaginemos que las perpendiculares AH, BI, CK representan los gastos en el origen A, y en los puntos siguientes B, C, D, &c. y por los puntos H, I, K, &c. tracemos la curva $HIKLMNO$. Por estar enlazados unos con otros los gastos en virtud de la ley de continuidad que se observa en toda la naturaleza, la ordenada qualquiera PQ, tomándola mas acá ó mas allá del punto G, espresará el gasto correspondiente al punto P del tubo. No conocemos *á priori* la naturaleza de la curva propuesta, y por consiguiente no podemos trazarla exactamente. Pero en su lugar se puede substituir otra curva conocida que pase por los puntos H, I, K, L, M, N, O, y que no discrepará sensiblemente de ella.

Fig. 108.

401 Supongamos la abscisa indeterminada $AP = x$, la ordenada correspondiente $PQ = y$; y tomemos $y = a$

$+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6$ por la equacion de la nueva curva de que se trata. En esta equacion los coeficientes a, b, c, d, e, f, g son indeterminados; pero se determinarán con reparar que $x=0$, dá $y=AH$; $x=AB$, dá $y=BI$; $x=AC$, dá $y=CK$; $x=AD$, dá $y=DL$; $x=AE$, dá $y=EM$; $x=AF$, dá $y=FN$; $x=AG$, dá $y=GO$.

Por egemplo, sean AH, BI, CK &c. los gastos que hace el tubo de 16 lineas de diámetro, siendo de 1 pie la altura del depósito, cuyos gastos se han de sacar de lo dicho (395 y 396). Omitiremos en estos gastos la denominacion *pulgadas cúbicas* para abreviar. A mas de esto llamaremos 1 cada una de las partes iguales AB, BC, CD, &c. del ege; de donde sale $AC=2$, $AD=3$, $AE=4$, &c. Quando se quisieren hacer aplicaciones de estos cálculos, se deberá tener presente que se han tomado 30 pies por la unidad de medida de la longitud del tubo. Sentado esto, saldrán las siete equaciones siguientes del primer grado.

$$6330=a,$$
$$2778=a+b+c+d+e+f+g,$$
$$1957=a+2b+4c+8d+16e+32f+64g,$$
$$1587=a+3b+9c+27d+81e+243f+729g,$$
$$1351=a+4b+16c+64d+256e+1024f+4096g,$$
$$1178=a+5b+25c+125d+625e+3125f+15625g,$$
$$1052=a+6b+36c+216d+1296e+7776f+46656g.$$

que darán á conocer las siete incógnitas a, b, c, d, e, f, g.

Despues de determinadas estas incógnitas, y substitui-

dos

dos sus valores en la equacion general $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, podrá servir esta equacion para averiguar un gasto qualquiera y. Fig.

402 Sería igualmente facil sacar el valor de x en y, sea por el método inverso de las series (II. 296 y sig.), sea construyendo una curva cuyas abscisas fuesen las y, y las ordenadas fuesen las x. Pero aunque todos estos cálculos son muy fáciles, y dán una resolucion muy aproximada de la cuestion, hemos de confesar que no son muy aplicables á la práctica que pide operaciones prontas, fundadas en reglas fáciles de quedarse en la memoria para tenerlas á la mano siempre que se ofrezca aplicarlas, y esta es una ventaja que sin escrúpulo ninguno se debe preferir á una exactitud rigurosa. Con esto, las proporciones de antes (397) bastan para formar juicio de la ley que siguen los gastos en sus diminuciones.

403 Siendo una misma la altura del depósito, y una misma la longitud, el tubo chico gasta sensiblemente menos á proporcion que el grande. Porque respecto de la superficie del orificio por el qual sale el agua, es mayor el rozamiento en el primero que en el segundo. Conviene sin embargo saber que nuestro tubo grande tenia algo mas de 2 pulg. de diámetro. Hemos valuado el exceso en $\frac{1}{8}$ de linea; pero es muy corto este exceso para que inutilice la prevencion que acabamos de hacer. Lo mismo hemos reparado (264) respecto del rozamiento de los orificios hechos en paredes delgadas.

404 Quanto mayor es la altura en el depósito respec-

Fig. pecto de un mismo tubo, tanto menor es á proporcion la diminucion del gasto. Hemos dado (268) de antemano la razon de esto. Vimos allí mismo como por ser el rozamiento proporcional á la velocidad ó á la raíz quadrada de la altura del depósito, causa un efecto tanto menor quanto mayor es dicha altura.

405 Se echa de ver que puede ser tan largo un tubo que el agua que por él corre, no tenga bastante fuerza para vencer el rozamiento; ó que por lo menos, la evacuacion se haga en un tiempo muy largo, y por decirlo así, gota á gota. Lo he esperimentado con los dos tubos. A los 180 pies de la caja, la evacuacion por cada uno de ellos se reducia á un hilo, y se hacia gota á gota no mas, quando la altura del agua en el depósito mas arriba de sus paredes inferiores, no era mas que de 16 lineas. Es, pues, menester para causar una evacuacion sensible y continua, una altura de depósito, ó una inclinacion de unas 20 lineas en 180 pies, ó de $\frac{2}{3}$ de linea en 1 toesa.

406 Quando un tubo es vertical ó inclinado, la pesantez coadyuva para aumentar la velocidad del agua en el mismo tubo. De la combinacion de esta fuerza con la presion del agua en el depósito, y el rozamiento, resultan efectos que importa considerar.

109. Sea, pues, *MQRN* un tubo largo cilíndrico vertical, acomodado en el suelo del depósito *ACDB*, que se mantiene constantemente lleno á la altura *KM*. Primero prescindiremos de la resistencia que causa el rozamiento á lo lar-

go

go de las paredes del mismo tubo. Es evidente que como la velocidad del fluido en el instante que está para pasar á *MN*, pende de la altura *KM*; si cada partícula llegára á ser despues un cuerpo aislado y libre, que no esperimentase mas impulso que el de la pesantez, dicho cuerpo en llegando á un punto qualquiera *Q* de la vertical *MQ*, tendria una velocidad correspondiente á la altura *KQ*. Pero todas las partículas están unidas unas con otras, y no se separan sino quando las precisa á ello una potencia superior á su *viscosidad* ó adherencia natural. Mientras que forman, en virtud de esta última fuerza, una misma columna que llena enteramente el tubo *MQRN* sin dejar en él hueco ninguno, todas ellas se mueven indispensablemente con la misma velocidad á lo largo del espacio *MQ*. Pero como la velocidad que causa en el orificio *MN* la presion del agua contenida en el depósito *ADCB*, es siempre la misma, y por otra parte cada partícula recibe tanto mas impulso de la pesantez, quanto mas se aparta de *MN*, es patente que las partículas inferiores han de acelerar una á una las superiores, á fin de que todas juntas se muevan con la misma velocidad. Los mas de los Escritores de Hydráulica aseguran que esta aceleracion se hace de manera que la velocidad ó el gasto en un punto qualquiera *Q* ú *O*, es siempre como la raiz de la altura correspondiente *KQ* ó *KO*. Esto es sensiblemente verdadero respecto de tubos poco largos; porque hemos visto (280) que el gasto hecho por un tubo corto *MOPN*, siendo la altura *KO*, es al gasto que hace despues que se le ha cortado en el punto *S*, Fig. 88.

Fig. como la raiz de la altura *KO* es á la raiz de la altura *KS*. La razon de esto es que entonces el engargante de las partes de la columna *MOPN* ó *MSTN* es bastante grande para que la pesantez pueda obrar sensiblemente todo su efecto en el agua que compone cada una de las columnas; y á mas de esto, dicho efecto es causado con poca diferencia de un mismo modo en ambos casos. Pero no puede suceder lo propio respecto de los tubos largos como los que pinta la figu-
109. ra. La adherencia mutua de las partículas, que dá lugar á la aceleracion de que hemos hablado, tiene sus límites conforme llevamos dicho; y el tubo puede llegar á ser tan largo, que las partículas inferiores se separen de las superiores, ó que la columna remate en adelgazarse ácia su estremo inferior, y no forme mas que un hilo respecto del qual es indiferente que el tubo sea mas prolongado ó no. Por consiguiente no es verdad, en general, que la velocidad ó el gasto por un tubo vertical acomodado en el suelo de un depósito, sea como la raiz de la altura correspondiente. Probaremos dentro de poco que, atendiendo al rozamiento, la proposicion es absolutamente falsa.

110. 407 Lo mismo se ha de decir acerca del movimiento del agua por un tubo inclinado *MNQR*, que del movimiento por un tubo vertical. Siendo una misma la altura del depósito *ADCB*, la velocidad inicial en el orificio *MN* es la misma en ambos casos. A mas de esto, quando el tubo es inclinado, la pesantez relativa que obra en la direccion de su longitud, es á la pesantez absoluta, como la altura

del

del plano inclinado es á su longitud (IV. 205); cuya Fig.
razon es constante en toda la longitud del tubo. La velocidad que causa la pesantez relativa, á lo largo del plano inclinado *MI*, es, pues, la misma que la velocidad que causa la pesantez absoluta por la vertical *EI*. Así, respecto de un tubo chico inclinado *MIFN* (despues de quitado lo restante *IFQR* del tubo *MNQR*), el gasto en *I* ha de ser sensiblemente proporcional á la raiz de la altura correspondiente *KI* de depósito. Pero las mismas causas que impiden que se verifique esta ley en tubos largos verticales, impiden igualmente que se verifique en tubos largos inclinados.

408 Como sería muy penoso hacer esperimentos con tubos largos verticales, no consideraremos aquí mas que los tubos inclinados. El que nos sirvió, y tiene 16 lineas de diámetro, fue inclinado en una direccion muy rectilinea *MR*. En este estado formaba la hypotenusa de un triángulo rectángulo *MOR*, que tenia con la altura *OR* la misma razon que 2124 con 241. Estaba dividido en tres partes iguales *MI*, *IG*, *GR*, cada una de 59 pies; y se midieron los gastos á los 177 pies, 118 pies, y 59 pies del depósito, como sigue.

409 Esperimentos XXV, XXVI, XXVII. Altura constante del agua en el depósito mas arriba del centro del orificio superior del tubo = 10 pulg.

I. A los 177 pies de la caja, en 45 segundos el tubo dió 4346 pulg. cúbicas de agua. Este gasto viene á ser de 5795 pulg. cúbicas en 1 minuto.

A

Fig. II. A los 118 pies de la caja, en 45 segundos el tubo dió 4351 pulg. cúbicas de agua. Este gasto viene á ser de 5801 pulgadas cúbicas en 1 minuto.

III. A los 59 pies de la caja, en 45 segundos el tubo dió 4356 pulg. cúbicas de agua. Este gasto viene á ser de 5808 pulgadas cúbicas en 1 minuto.

410 Reflexiones. Si el tubo no tuviera mas que unas 2 pulgadas de largo, ó hiciera las veces de aquellos caños aditicios de que se habló tanto en otro lugar (274 y sig.), daría, en virtud de la presion del agua contenida en el depósito, como unas 5779 pulg. cúbicas en 1 minuto. Pero, segun nuestros esperimentos, en cada division dá un poco mas. Los gastos parece que menguan algun tanto á medida que el tubo llega á ser mas largo. Esto manifiesta que falta mucho para que dichos gastos sigan la razon de las raices de las alturas *LR*, *HG*, *KI*.

411 Con disminuir un poco el ángulo de inclinacion *RMO* del tubo, los gastos en *R*, *G*, *I* se acercan mas al gasto en el origen. De aquí sacaremos una prevencion de alguna utilidad para la práctica. Sea la que fuere la longitud de un tubo como el nuestro, dará con corta diferencia la misma cantidad de agua que daría en su origen, quando su declivio *OR* fuere la octava ó novena parte de la longitud *MR*, ó quando el ángulo *RMO* fuere como de unos 6 grados 31 minutos. Se echa, pues, de ver que entonces el rozamiento destruye con poca diferencia la velocidad que proviene de la pesantez relativa del agua contenida cada instan-

te

te en el tubo. Quizá no se verifica esta ley en todas las es- Fig.
pecies de tubos, y respecto de todas las alturas de depósito. Pero esto servirá por lo menos para formar algun juicio de la inclinacion que se le podrá dar á un tubo quando se quisiere compensar por este medio el menoscabo que el rozamiento ocasiona en el gasto.

412 Acerca del mismo tubo *MNQR* añadiremos una observacion que confirma lo que hemos dicho poco ha (411). Estando perfectamente tapada la abertura *QR*, se forman en los agugeritos *n*, *p*, *q*, cuyo destino es dejar salir el ayre interior, unos surtidores que suben á los puntos *y*, *x*, *s*, arreglados á las leyes declaradas antes (346 y sig.) Pero si se destapa la abertura *QR*, sin tapar los agugeros *n*, *p*, *q*, los surtidores desaparecen; y al cabo de algunos segundos, la evacuacion llega á ser regular y permanente. Por donde se echa de ver que el agua deja entonces de comprimir, por lo menos sensiblemente, la pared superior del tubo, y que la velocidad instantanea que causa la pesantez relativa de la columna *MNQR* es igual, por lo menos, con la velocidad que la resistencia del rozamiento destruye cada instante.

413 Consideremos ahora el movimiento del agua por tubos curvilineos; y comparando los gastos de esta especie de tubos con los gastos de los tubos rectilineos, indagaremos si la curvatura causa alguna diminucion en la velocidad.

Mandé hacer de chapa de plomo un tubo *ON* de 50 111.
pies de largo, y de una pulgada de diámetro interior bien ca-

Fig. calibrado. Tenia 1 linea de grueso. En el estremo *O* se habia soldado otro tubo *M* de unas 2 pulg. de diámetro interior que se comunicaba con el menor de los dos depósitos mencionados (390). Llevaba este tubo aditicio una llave *R* que tenia interiormente un agugero de mas de 18 lineas de diámetro reducido, que servia para permitir, ó atajar la evacuacion. El tubo *ON* llevaba muchos agugeritos *E*, *F*, *G* cuyo destino era dejar salir el ayre que el agua lleva consigo.

414 Esperimento XXVIII. Estando colocado orizontalmente el tubo *ON*, y manteniéndose el agua en el depósito á la altura de 4 pulg. mas arriba de su ege *TV*, en 2 minutos salieron por la boca *N* 1152 pulg. cúbicas de agua. Este gasto viene á ser de 576 pulg. cúbicas en 1 minuto.

415 Esperimento XXIX. Siendo siempre el tubo el mismo, y una misma su situacion, y manteniéndose el agua en el depósito á la altura constante de 1 pie mas arriba del ege *TV*, en 1 minuto salieron por la boca *N* 1050 pulg. cúbicas de agua.

416 Esperimento XXX. Estando encorvado el mis-
112. mo tubo, conforme pintan las figuras, y habiéndosele afian-
113. zado primeramente en un piso mobil, hice poner primero el piso en situacion orizontal, de modo que la curva *OQSZXYN*
112. se ha de mirar como trazada en un plano orizontal. El punto *N* está en la prolongacion de la linea orizontal *TV* que representa el ege del tubo en el origen *O*.

Es-

Estando todo así dispuesto, manteniendo el agua en el depósito á la altura constante de 4 pulg. mas arriba de la linea *TV*, en 2 minutos se cogieron en *N* 1080 pulg. cúbicas de agua. Este gasto viene á ser de 540 pulg. cúbicas en 1 minuto. Fig.

417 Esperimento XXXI. Estando todo del mismo modo que en el esperimento antecedente, sin mas diferencia que la de mantenerse ahora el agua en el depósito á la altura de 1 pie mas arriba de la linea *TV*, en 1 minuto se cogieron en *N*, 1030 pulg. cúbicas de agua.

418 Esperimento XXXII. El plano del tubo curvílineo *OQSZXYN* se puso en una situacion vertical. La boca *N* estaba en la linea orizontal *TV*, y ninguno de los codos del tubo subia mas arriba de dicha linea. 113.

Sentado esto, estando el agua á la altura de 4 pulg. en el depósito, y tapados los respiraderos *E*, *F*, *G* &c. el ayre encerrado en el encañado estorvaba el movimiento del agua, y no empezó á dejarse ver en *N* hasta que se hicieron unas aberturitas en los codos superiores del tubo. Así que la evacuacion estuvo corriente, en 2 minutos se cogieron en *N* 1040 pulg. cúbicas de agua. Este gasto viene á ser de 520 pulg. cúbicas en 1 minuto.

419 Esperimento XXXIII. Estando todo del mismo modo que en el esperimento antecedente, sin mas diferencia que la de estar ahora el agua constantemente á la altura de 1 pie mas arriba del ege *TV*, en 1 minuto se cogieron en *N* 1028 pulg. cúbicas de agua.

Re-

Fig. 420 Reflexiones. Los esperimentos XXVIII y XXIX comparados uno con otro manifiestan que á medida que la altura del agua crece en el depósito, la merma del gasto vá siendo menor; esto confirma lo dicho (404).

421 De la comparacion del esperimento XXX con el esperimento XXVIII, y del esperimento XXXI con el esperimento XXIX resulta que las sinuosidades orizontales de un tubo disminuyen el gasto que hace el mismo tubo quando es rectilineo. El rozamiento ha de ser sensiblemente el mismo en ambos casos. El choque del agua con los ángulos del tubo destruye parte de la velocidad, y disminuye por consiguiente el gasto. Si no hubiese salto ninguno en la curvatura; quiero decir que si cada ángulo formado por dos lados consecutivos de la curva se acercára infinitamente á los 180°, conforme sucede en una curva verdadera,
114. la curvatura no disminuiría el gasto. Porque sea $OQSZN$ un tubo qualquiera curvilineo y orizontal, por el qual un cuerpo se mueve en virtud de un impulso que se le dió en O. Supongamos que este cuerpo llegado á un punto qualquiera Q ande en un instante el elemento Qq de la curva, y prolónguese Qq hasta que $qr = Qq$. Es evidente que si llegado el cuerpo á q, pudiera moverse libremente en la direccion Qq, andaría qr en el mismo tiempo que ha andado Qq. Sobre qr como diagonal trácese el paralelogramo $qbrf$ cuyo lado qb está en la curva, y el lado qf es perpendicular á la misma curva. La velocidad qr se resolverá en las dos velocidades qf, qb; la primera es destruida por la resisten-

cia

cia de la curva; la segunda es la única que le queda al mobil. Desde el punto *q* como centro, y con el radio *qb* trácese el arco pequeño *bt* para determinar la diferencia *tr* de las dos velocidades *qr*, *qb*. Sentado esto, quando el ángulo *Qqb* es infinitamente obtuso, y es por lo mismo infinitamente pequeño el ángulo *bqr*, 1.° se puede considerar el triángulo *qtb* como un triángulo rectilineo rectángulo en *t*, y se verifica la proporcion *qt* : *tb* :: *tb* : *tr*. 2.° la linea *tb* es infinitamente pequeña respecto de *qt*, por ser *tb* á *qt* como el seno de un ángulo infinitamente pequeño es al seno de un ángulo que discrepa infinitamente poco de un ángulo recto. De aquí se sigue que *tr* es infinitamente pequeña respecto de *bt*, por ser *tr* tercera proporcional á las lineas *qt*, *tb*. Luego con mas razon *tr* es infinitamente pequeña respecto de *qr*; y como *qr* es una cantidad infinitamente pequeña de primera orden, *tr* será por precision una cantidad infinitamente pequeña de tercera orden. Luego el mobil no pierde en *q* mas que una parte infinitamente pequeña de segunda orden de su velocidad. Lo propio digo de todos los demás puntos de la curva. Luego al andar el espacio finito *OQSZN*, no puede perder el mobil mas que una infinidad de partes infinitamente pequeñas de segunda orden de su velocidad, ó lo que viene á ser lo mismo, una parte infinitamente pequeña de primera orden. Luego su velocidad que es finita, no puede padecer alteracion ninguna por razon de esta merma, y el gasto en *N* ha de ser el mismo que si el tubo fuera rectilineo. Inferamos, pues, que si Fig.

los

Fig. los gastos no son con efecto los mismos en ámbos casos, la velocidad que pierde el mobil en q no es infinitamente pequeña de segunda orden, y que por consiguiente el ángulo bqr no es infinitamente pequeño. A pesar de toda la proligidad con que se puede procurar en la práctica suavizar los codos de un encañado, no es posible lograr una curvatura rigurosa, y es preciso que aniquile parte de la velocidad el choque con los lados del polýgono.

Aunque al encorvar el tubo se achica su diámetro, no es bastante esta diminucion para causar toda la que se esperimenta en el gasto.

422 De la comparacion del esperimento XXXII con el esperimento XXVIII, y del esperimento XXXIII con el esperimento XXIX se infiere que las sinuosidades verticales de un tubo disminuyen los gastos. Esto proviene tambien del menoscabo que padece la velocidad del agua al dar esta
113. en los codos del tubo. Con efecto las columnas OQ y SQ, SZ y XZ, XY y NY se equilibran de dos en dos por su gravedad (20). De donde resulta que prescindiendo de toda resistencia, el agua se movería en el tubo curvilineo $OQSZXYN$ del mismo modo que si fuera rectilineo. Pero en el primer caso el choque del agua con los codos del encañado se agrega al rozamiento, y el gasto ha de ser menor que en el segundo.

423 Nos falta todavia comparar el esperimento XXXII con el esperimento XXX, y el esperimento XXXIII con el esperimento XXXI para averiguar si el movimiento del agua padece igual decremento por razon de la sinuosidades orizon-

zontales que por razon de las verticales. Pero de esta comparacion resulta que las primeras sinuosidades perjudican algo menos al movimiento del agua que las segundas. Esta diferencia se esplica considerando que en el caso de las sinuosidades verticales el movimiento del agua se compone de otros dos movimientos, el uno orizontal que proviene del impulso inicial que recibió el agua en *O*; el otro vertical, procedente de la pesantez, el qual es acelerado en las partes *OQ*, *SZ*, *XY*, y retardado en las partes *SQ*, *XZ*, *NY*. Pero bien se puede discurrir que de la combinacion de estos movimientos con el rozamiento, y el choque contra los codos del encañado, puede resultar un movimiento algo diferente del que se verifica quando las sinuosidades del tubo son orizontales, y donde no hay por consiguiente mas que un impulso orizontal combinado con el rozamiento, y con el choque contra los codos del encañado. La figura del encañado ha de tener algun influjo en el mismo efecto. Fig.

424 De aquí se saca la respuesta á una pregunta de práctica. Se ha de hacer un conducto de agua desde un punto á otro en cuyo intermedio hay montes y valles; se pregunta ¿qué medio es mejor, ó conducirla directamente por las montañas y los valles, ó dar la vuelta suponiendo que en ambos casos ande el agua un mismo trecho? Respecto de un tubo parecido, con poca diferencia, al nuestro, el segundo medio es mas ventajoso que el primero, quando es poca el agua, conforme lo manifiestan los esperimentos XXX y XXXII. Pero quando la carga de agua no baja mu-

Fig. cho de 1 pie, esta ventaja desaparece del todo, conforme se infiere de la comparacion de los esperimentos XXXI y XXXIII.

425 En un encañado largo que tiene subidas y bajadas, el ayre mezclado con el agua puede, acumulándose en las partes eminentes, estorbar, y aun atajar del todo el curso del agua. Sea, por egemplo, el tubo *OMNQK*, cuyo
115. plano es vertical, y por el qual el agua corre desde *O* á *K*. Puede suceder que al cabo de algun tiempo el espacio *DEN* se llene de ayre, y que este ayre cierre en parte ó del todo el paso al agua. Para precaver este inconveniente, se han de colocar en las partes eminentes *N*, *K* &c. respiraderos para dár salida al ayre. Estos respiraderos son unos tubos chicos de plomo de 8 á 9 pulgadas de alto que se sueldan al encañado, y cuyo estremo superior se cierra por medio de una válvula al reves que deja salir el ayre hasta que el agua la levante y la mantenga cerrada despues de salido el ayre. Algunas veces en lugar de una válvula se ponen en los estremos de los respiraderos unas llaves que no se cierran hasta despues de salido todo el ayre, y quando está sentado el curso del agua.

426 Mr. Couplet publicó en las Memorias de la Academia Real de las Ciencias para el año de 1732 unas *Investigaciones acerca del movimiento de las aguas por los encañados.* Hay en su disertacion muchos esperimentos muy *en grande*, y apropósito para dar mucha luz acerca del asunto de que estamos tratando, por cuyo motivo me parece del caso darlos á conocer.

El

I. El Autor determina desde luego la cabida del padron con el qual hizo sus esperimentos. Repara que Mariote hizo sobrado grande la pulgada de agua, quando dijo que era de unas 14 pintas de Paris, y que esta cantidad de agua sale en 1 minuto por un orificio circular y vertical de 1 pulgada de diámetro, siendo la carga de 7 lineas. De varios esperimentos hechos por su Padre, Picard, Roemer, y Viliard concluye que la abertura propuesta no dá en 1 minuto mas que $13\frac{1}{3}$ pintas, entrando 36 de estas en 1 pie cúbico; y este es el valor que dá á la medida de la pulgada de agua. Fig.

El vaso que le sirvió en sus esperimentos para coger las aguas era de $18\frac{2}{3}$ pintas de París. Cabian, pues, en el mismo vaso ó padron 896 pulgadas cúbicas. El Autor media con un péndulo de medios segundos el tiempo que su padron tardaba en llenarse. Parece que tuvo presente quanto era menester para que saliesen exactos, en todo lo posible, sus esperimentos. Todos se hicieron en *Versailles* con muchos encañados diferentes, y diferentes alturas de depósito.

II. El primer encañado cuyo diámetro era de 4 pulgadas, conducia en otros tiempos el agua del depósito de la *Plaza Delfina*, llamado el *Depósito de las buenas aguas*, al depósito de las Caballerizas de Versailles. El depósito de la plaza Delfina es un paralelipípedo de 2 pies 8 pulg. de altura, siendo su base un quadrado de unos 2 pies de lado. Saca sus aguas del depósito quadrado que está cerca de S. Antonio. En su suelo hay una válvula de 6 pulg. de diá-

 me-

Fig. metro, en la qual se emboca un tubo vertical de plomo, y del mismo diámetro de 6 pulgadas en un trecho de 6 pies no mas; despues este tubo se emboca en otro tubo vertical, tambien de plomo, de 4 pulg. de diámetro, y de 17 pies 4 pulg. de largo. En el estremo de este segundo tubo está soldado casi á escuadra un tubo de hierro de 4 pulg. de diámetro, que sube culebreando, y forma lo restante del encañado, pero junto á su estremo hay un tubo de plomo ascendiente de 4 pulg. de diámetro, y de unos 6 pies 3 pulg. de largo, por el qual el agua entra á boca libre en el depósito de las Caballerizas.

Coge en todo este encañado (reducido á linea recta) desde la Plaza Delfina hasta las Caballerizas 296 toesas 5 pies 4 pulg. Tiene muchas sinuosidades orizontales y verticales. Las diferencias que hay entre las lineas de nivel y las lineas de conduccion son tan cortas, que se pueden despreciar respecto del rozamiento.

Aquí y en adelante por carga de agua entendemos la diferencia de nivel entre la superficie del agua en el depósito de partida, y el estremo del encañado, por el qual el agua entra sin tropiezo á caño libre en el depósito de *descarga* ó paradero.

Sentado esto, 1.° Con 9 pulgadas de carga de agua, el gasto que hacia el encañado vino á ser de 2 pulg. 63 lineas de agua, en 1 minuto.*

2.°

* Así valuaba Couplet los gastos, y le seguiremos en el extracto que da-

2.° Con 21 pulgadas de carga de agua, el gasto del encañado fue de 4 pulg. de agua, en 1 minuto. Fig.

3.° Con 31 pulg. de carga de agua, el gasto del encañado fue de 5 pulg. 60 lineas de agua, en 1 minuto.

III. En lugar del encañado precedente se substituyó otro de 6 pulg. de diámetro, y que conducia en el año de 1732 el agua del depósito de la Plaza Delfina á las Caballerizas de Versailles. Componíase primero de un tubo vertical de plomo, de 6 pulg. de diámetro, y de 23 pies, 4 pulg. de largo, acomodado en el suelo del depósito de la Plaza Delfina. Este tubo era curvo ácia su estremo inferior, y se embocaba en un tubo de hierro que en toda su longitud tenia 6 pulg. de diámetro, y remataba embocándose en un tubo de plomo de 6 pulg. de diámetro, y de 9 pies 2 pulg. 6 lineas de largo, romo en el mismo parage, y acomodado verticalmente por su estremo superior al suelo del depósito de las Caballerizas. Habia en este encañado algunas sinuosidades, pero en menor número, y menos ásperas que

damos de su Memoria. Pero el que quisiere reducir las pulgadas de agua, lineas de agua &c. á pulgadas cúbicas, y partes de pulgada cúbica, deberá tener presente que, segun el referido Autor, la pulgada de agua contiene $13\frac{1}{3}$ pintas de Paris, de las quales entran 36 en el pie cúbico, y que por lo mismo la pulgada de agua vale 640 pulgadas cúbicas, la linea de agua vale $\frac{640}{144}$ pulgadas cúbicas $= 4\frac{4}{9}$ pulgadas cúbicas $=4$ pulgadas cúbicas $+768$ lineas cúbicas &c. Por los esperimentos referidos (252), la pulgada de agua no vale mas que 628 pulgadas cúbicas, en el supuesto de que esta espresion signifique el gasto que hace en 1 minuto una abertura circular de 1 pulgada de diámetro, siendo de 7 lineas la carga de agua.

Fig. en el primero. Cogia (reducido á linea recta) 285 toesas 2 pies 9 pulg. 6 lineas de largo desde el suelo del depósito de la Plaza Delfina hasta el suelo del de las Caballerizas.

Sentado esto, 1.° siendo la carga de 3 pulg. el gasto de este encañado fue de 7 pulg. de agua 44 lineas, en 1 minuto.

2.° Siendo la carga de $5\frac{1}{4}$ pulg. el gasto del encañado fue de $10\frac{1}{2}$ pulg. de agua, en 1 minuto.

IV. El tercer encañado que en parte era de barro, y en parte de plomo, tenia 5 pulg. de diámetro, y conducia las aguas desde el depósito quadrado junto á S. Antonio al depósito de repartimiento de la Plaza Delfina. Este encañado era de barro, en su principio, en el trecho de unas 50 toesas; todo lo demás era de plomo; su longitud (reduciéndole á linea recta) cogia en todo 1170 toesas 1 pie 7 pulg. La longitud recta de las lineas de nivel que correspondian á cada una de sus partes, cogia 1164 toesas al poco mas ó menos. Tenia muchas sinuosidades.

Sentado esto, 1.° siendo la carga de agua de 25 pulg. el gasto de este encañado era de 9 pulg. 115 lin. en 1 min.

2.° Siendo la carga de agua de 5 pulg. 7 lineas, el gasto era de 3 pulg. 101 lineas, en 1 minuto.

3.° Siendo la carga de agua de $11\frac{1}{3}$ pulg. el gasto era de 5 pulg. 116 lineas, en 1 minuto.

4.° Siendo la carga de agua de 16 pulg. 9 lineas, el gasto era de 7 pulg. 86 lineas, en 1 minuto.

5.° Siendo la carga de agua de 21 pulg. 1 linea, el gas-

gasto era de 8 pulg. 122 lineas, en 1 minuto. Fig.

6.° Siendo la carga de agua de 24 pulg. el gasto era de 9 pulg. 86 lineas, en 1 minuto.

V. Las aguas del quadrado de los dos depósitos de la *butte de Montboron*, que está mas arriba de Versailles, y á la izquierda del camino que vá de Versailles á París, son conducidas al arca de agua que está en la calle *des Bons enfans*, junto al cuerpo de guardia de los Suizos, en cinco encañados de hierro, dos de los quales tienen 18 pulg. de diámetro, y los otros tres, 1 pie de diámetro. Estos encañados tienen un mismo perfil, é igual estension (reduciéndolos á linea recta) que será de unas 600 toesas. No son enteramente de hierro, su estremo ácia el arca de agua de la calle *des Bons enfans* es de plomo en un trecho de 53 pies 10 pulg. 9 lineas. Tienen muchas sinuosidades, pero los codos están bastante suavizados. Mr. Couplet halló

1.° Que siendo la carga de 12 pies 1 pulg. 1 linea, cada encañado de 18 pulg. de diámetro gastaba 934 pulg. 30 lineas, en 1 minuto.

2.° Que con la misma carga de agua de 12 pies 1 pulg. 1 linea, cada encañado de 1 pie de diámetro gastaba 249 pulg. 17 lineas, en 1 minuto.

VI. Finalmente el mismo Autor determina el gasto de un encañado que teniendo primero 16 pulg. de diámetro, conduce el agua desde el quadrado de los depósitos del *Parc aux Cerfs* al del estremo del ala, y que teniendo despues

Fig. no mas que 1 pie de diámetro conduce el agua al depósito de *Roquencour*.

En el suelo del quadrado que recibe el agua de los depósitos del *Parc aux Cerfs* hay una válvula de 2 pies de diámetro, en la qual se emboca un encañado de hierro de 18 pulg. de diámetro. En el estremo de este encañado se levanta perpendicularmente un tubo de plomo de 18 pulg. de diámetro, y de 31 pies 6 pulg. de alto, el qual conduce y arroja á boca libre el agua en el depósito del estremo del ala. Mas allá de dicho tubo se prolonga el encañado, pero no tiene mas que 1 pie de diámetro; conduce el agua al depósito de *Roquencour*. Se dá curso ó se ataja esta nueva evacuacion por medio de una llave que tiene 1 pie de abertura del mismo modo que su encañado, en cuyo origen está colocada.

La estension del encañado (reduciéndole á linea recta) desde el quadrado de los depósitos del *Parc aux Cerfs* hasta la boca que está en el depósito del cabo del ala, es de unas 790 toesas, y desde el mismo quadrado hasta la boca que arroja el agua en el depósito de *Roquencour*, de 2340 toesas.

Sentado esto, 1.° Siendo la carga del agua de 4 pies $7\frac{1}{2}$ pulg. y estando cerrada la llave de que hemos hablado, el gasto del encañado de 18 pulg. de diámetro, por su boca libre en el depósito del cabo del ala, era de 345 pulg. 108 lineas en 1 minuto.

2.° Siendo la carga de agua de 20 pies 3 pulg. estando

do abierta la llave mencionada, el gasto del encañado de Fig. 1 pie de diámetro, por su boca libre en el depósito de *Roquencour*, era de 168 pulg. en 1 minuto.

En este segundo caso el agua rebosa por la boca libre del tubo que sube por el depósito del cabo del ala, bien que esta boca libre esté 14 pies $\frac{1}{4}$ mas alta que la que echa el agua en el depósito de *Roquencour*.

VII. Estos son los esperimentos de Couplet. Los hemos propuesto de seguida, y sin ninguna reflexion para mayor claridad.

El Autor á continuacion de los esperimentos pertenecientes á cada encañado, buscó el gasto que debiera haberse verificado en virtud del principio de que los gastos en un mismo tiempo, son en razon compuesta de los orificios y de las raices quadradas de las alturas de las cargas, y en virtud del esperimento de Mariote, de que una abertura de 3 lineas de diámetro, siendo la altura de la carga de 13 pies, dá 1 pulg. de agua. Halló 1.° que los gastos medidos no tienen entre sí la razon que corresponderia al principio citado. 2.° que los mismos gastos medidos son mucho menores que los gastos calculados en virtud del esperimento de Mariote. Atribuye estas diferencias y mermas á los menoscabos que padece la velocidad del agua por razon del rozamiento en las paredes de cada encañado. Tambien repara que el ayre arrinconado en los codos de un encañado opone un obstáculo poderoso al movimiento del agua. El uso de los respiraderos es indispensable. El Autor refiere con este motivo un esperimen-

Fig. mento que hizo en un encañado de plomo de 8 pulg. de diámetro, y de 1900 toesas de largo, que conduce las aguas de *Roquencour* al Palacio de Versailles, á los depósitos que están debajo de la rampa de la capilla, siendo la carga de 2 pies 6 pulg. Dicho encañado nunca dió por su boca libre mas de 22 ó 23 pulg. de agua, de las 30 que se presentan en su embocadura. Quando en otros tiempos se soltaba el agua en la embocadura de dicho encañado, se pasaban unos 10 dias antes que saliese una gota por su estremo de salida; esto provenia de los muchos codos que habia á lo largo del mismo encañado, en los quales el ayre se quedaba arrinconado, y no podia salir sino con mucha dificultad. Por este motivo se suavizaron algunos codos, y pusieron respiraderos en los parages mas elevados, donde permanecen todavia; y entonces al cabo de 12 horas se vieron salir algunos hilitos de agua, siendo así que antes se necesitaban diez ú doce dias, y 5 ó 6 horas despues salieron 22 ó 23 pulgadas de agua, que es toda la que puede dar dicho encañado. En el discurso de las 5 ó 6 horas que pasaron antes que adquiriese la evacuacion su complemento, salieron golpes de ayre, copos de ayre y agua, y filetes de agua que á ratos corrian, y á ratos no. Esto manifiesta patentemente la resistencia que el ayre opone al movimiento de las aguas en los encañados, y la necesidad de darles respiraderos.

VIII. Las reflexiones de Mr. Couplet son acertadas en general. Sin embargo tengo por indispensable prevenir

1.°

1.° Que el modo con que determina los gastos que Fig.
los encañados propuestos deberian hacer en virtud del principio de Hydráulica declarado mas arriba, y del esperimento de Mariote, es errado, porque no conoció, ni Mariote tampoco, la merma que la contraccion de la vena fluida causa en el gasto. Hubiera debido multiplicar los gastos calculados de aquel modo por el quebrado $\frac{13}{10}$, porque el agua salia á caño lleno por los orificios; siendo así que en el esperimento de Mariote el agua salia por un orificio hecho en una pared delgada, de lo que resulta una contraccion de la primera especie que disminuye el gasto, conforme lo hemos esplicado. Entonces las diferencias entre los gastos calculados y los gastos efectivos hubieran sido todavia mayores de lo que las halló Couplet.

2.° La hypótesi de que los gastos por un mismo orificio deberian ser proporcionales á las raices quadradas de las cargas, prescindiendo de las resistencias de los obstáculos, solo se verifica en los tubos de poca longitud (280). No parece que tenga lugar respecto de los tubos largos (407).

3.° Me parece que entre los obstáculos que se oponen al movimiento del agua, Couplet no atiende lo que debiera al menoscabo que padece la velocidad por razon del choque en los ángulos rectilíneos de los tubos de que se valió. En el encañado de su primera figura hay ácia el origen donde el tubo de plomo se emboca en el de hierro, un ángulo que no puede menos de destruir mucha parte de la velo-

Fig. locidad de la corriente. Tiene otros muchos codos que no están bastante suavizados. La mayor parte de estos defectos se ha enmendado en el segundo encañado. El tercero y el quinto tienen muchos saltos bastante duros en su curvatura. El quarto es menos defectuoso á este respecto. Es constante que los codos perjudican mucho al movimiento de las aguas, y conviene minorar su número, ó suavizarlos lo mas que se pueda.

4.° Couplet no dice si en la estension de los encañados que consideró habia alguna estrechura que alterase el curso del agua. Se forman con frecuencia unas estrechuras con el légamo y las porquerías que el agua lleva, como pajas, hierbas &c. Estas materias se juntan y componen una especie de capa que se pega á las paredes del encañado, y cierra parte del paso al agua. El silencio del Autor acerca de este punto tan importante es indicio de que no habia tales obstrucciones en sus encañados.

427 Combinando nuestros esperimentos con los de Couplet qualquiera podrá formar juicio por mayor, y quánto basta en la práctica, de los menoscabos que padece la velocidad del agua en los encañados, sean rectilineos, sean curvilineos. En virtud de esto se podrá determinar, con corta diferencia, el diámetro que se le debe dar á un encañado respecto de su longitud, de la cantidad de agua que debe conducir, y de la carga de agua. Para facilitar todavia mas esta operacion, añadiremos una tabla en que están los resultados de todos los espresados esperimentos.

La

La primera columna señala los diámetros de los encañados, sus longitudes, sus declivios, sus sinuosidades. La longitud de cada encañado siempre se valua en el supuesto de reducirle á la linea recta, y comprende por lo mismo las sinuosidades quando las hay. Fig.

La segunda espresa las cargas de agua, esto es, las alturas de los depósitos mas arriba de la boca libre por donde se descargan.

En la tercera, cada fraccion espresa la razon entre el gasto efectivo, y el gasto que se verificaría en realidad si el agua no esperimentára ninguna resistencia en su curso, y se moviera del mismo modo que en los tubos aditicios de que hablamos antes (274 y sig.). Así, este segundo gasto es el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son la unidad, el denominador de la fraccion propuesta, y el gasto efectivo que se sabe qual es por los esperimentos precedentes.

Diámetros y longitudes de los encañados.	Cargas de agua, ó alturas de los depósitos, espresadas en pies, pulg. y lineas.			Razon del gasto efect. al gasto sin contar el efecto de las resistencias.
Encañado de plomo rectilin. y orizontal, de 1 pulg. de diám. y 50 pies de largo.	0	4	0	$\frac{1}{3{,}55}$
	1	0	0	$\frac{1}{3{,}18}$

Diá-

Fig.	Diámetros y longitudes de los encañados.	Cargas de agua, ó alturas de los depósitos, espresadas en pies, pulg. y lineas.			Razon del gasto efect. al gasto sin contar el efecto de las resistencias.
	El mismo encañado con muchas sinuosidades orizontales.	0	4	0	$\frac{1}{3,76}$
		1	0	0	$\frac{1}{3,43}$
	El mismo encañado con las mismas sinuosidades, pero colocadas verticales.	0	4	0	$\frac{1}{3,93}$
		1	0	0	$\frac{1}{3,44}$
	Encañado de hoja de lata rectilineo y orizontal, de 16 lineas de diámetro, y 180 pies de longitud.	1	0	0	$\frac{1}{6,01}$
		2	0	0	$\frac{1}{5,64}$
	Encañado de hoja de lata rectilineo y orizontal, de 2 pulg. de diámetro, y 180 pies de largo.	1	0	0	$\frac{1}{4,57}$
		2	0	0	$\frac{1}{4,27}$

Diá-

Diámetros y longitudes de los encañados.	Cargas de agua, ó alturas de los depósitos, espresadas en pies, pulg. y lineas.			Razon del gasto efect. al gasto sin contar el efecto de las resistencias.	Fig.
Encañado de hoja de lata rectilineo, de 16 lineas de diám. 177 pies de longitud, y con un declivio que era la $\frac{241}{2124}$ parte de su longitud.	20	11	0	$\frac{1}{5}$	
El mismo encañado con 118 pies de longitud no mas.	13	4	8	$\frac{1}{4}$	
El mismo encañado con 59 pies de longitud no mas.	6	8	4	$\frac{1}{2,82}$	
Encañado casi todo de hierro, de 4 pulg. de diám. y de cerca de 297 toesas de largo, con muchas sinuosidades orizontales, y verticales.	0	9	0	$\frac{1}{28,5}$	
	1	9	0	$\frac{1}{26,53}$	
	2	7	0	$\frac{1}{25,79}$	

Diá-

Fig.

Diámetros y longitudes de los encañados.	Cargas de agua, ó alturas de los depósitos, espresadas en pies, pulg. y lineas.	Razon del gasto efect. al gasto sin contar el efecto de las resistencias.
Encañado casi todo de hierro, de 6 pulg. de diám. y de cerca de 285 toesas de estension en linea recta, con muchas sinuosidades orizontales y verticales.	0 3 0	$\frac{1}{12,35}$
	0 5 3	$\frac{1}{11,37}$
Encañado parte de barro, parte de plomo, de 5 pulg. de diámetro, y de cerca de 1170 toesas de largo, con muchas sinuosidades orizontales y verticales.	0 5 7	$\frac{1}{23,10}$
	0 11 4	$\frac{1}{20,98}$
	1 4 9	$\frac{1}{19,49}$
	1 9 1	$\frac{1}{18,78}$
	2 1 0	$\frac{1}{18,46}$

Diá-

Diámetros y longitudes de los encañados.	Cargas de agua, ó alturas de los depósitos, espresadas en pies, pulg. y líneas.	Razon del gasto efect. al gasto sin contar el efecto de las resistencias.
Encañado de hierro de 1 pie de diám. y de cerca de 600 toesas de largo, con sinuosidades orizontales y verticales.	12 1 3	$\frac{1}{10,08}$
Encañado de hierro de 18 pulg. de diám. y de cerca de 600 toesas de largo, con muchas sinuosidades orizontales y verticales.	12 1 3	$\frac{1}{6,05}$
Encañado de hierro de 18 pulg. de diámetro, y de cerca de 790 toesas de largo, con muchas sinuosidades orizontales y verticales.	4 7 6	$\frac{1}{10,11}$

Fig.

Diámetros y longitudes de los encañados.	Cargas de agua, ó alturas de los depósitos, espresadas en pies, pulg. y lineas.	Razon del gasto efect. al gasto sin contar el efecto de las resistencias.
Encañado de hierro de 1 pie de diám. y de cerca de 2340 toesas de longitud, con muchas sinuosidades orizontales y verticales.	20 3 10	$\frac{1}{19,34}$

428 Esta tabla dá muchos términos de comparacion entre los gastos efectivos y los gastos libres de los efectos de las resistencias, segun las diferentes razones que hay entre los diámetros de los encañados, sus longitudes, y las cargas de agua. Quando se quisiere conducir agua desde un depósito á un parage distante y mas bajo, se buscará en la tabla el caso mas análogo al que se ha de tratar; y por este camino se vendrá en conocimiento, por lo menos con corta diferencia, de las dimensiones que se le deberán dar á dicho encañado. Aclaremos este punto con un egemplo.

116. 429 Sea *ADCB* un repuesto de agua formado de la union de muchos manantiales en un mismo depósito. Por lo dicho (321), ú otro medio equivalente se sabe con certeza que dicha cantidad de agua es 40000 pulg. cúbi-

bicas en 1 minuto, y se trata de conducirla al punto *O* por Fig. el encañado *GEDO*. Supongo que por la nivelacion se sepa que la mayor altura *AH* ó *FO* que se le pueda dar al depósito *ADCB* mas arriba de la boca libre *O*, es de 4 pies. Supongo tambien que atendidas todas las circunstancias del terreno, el encañado haya de tener 400 toesas de estension; y que se pondrá cuidado en suavizar sus sinuosidades.

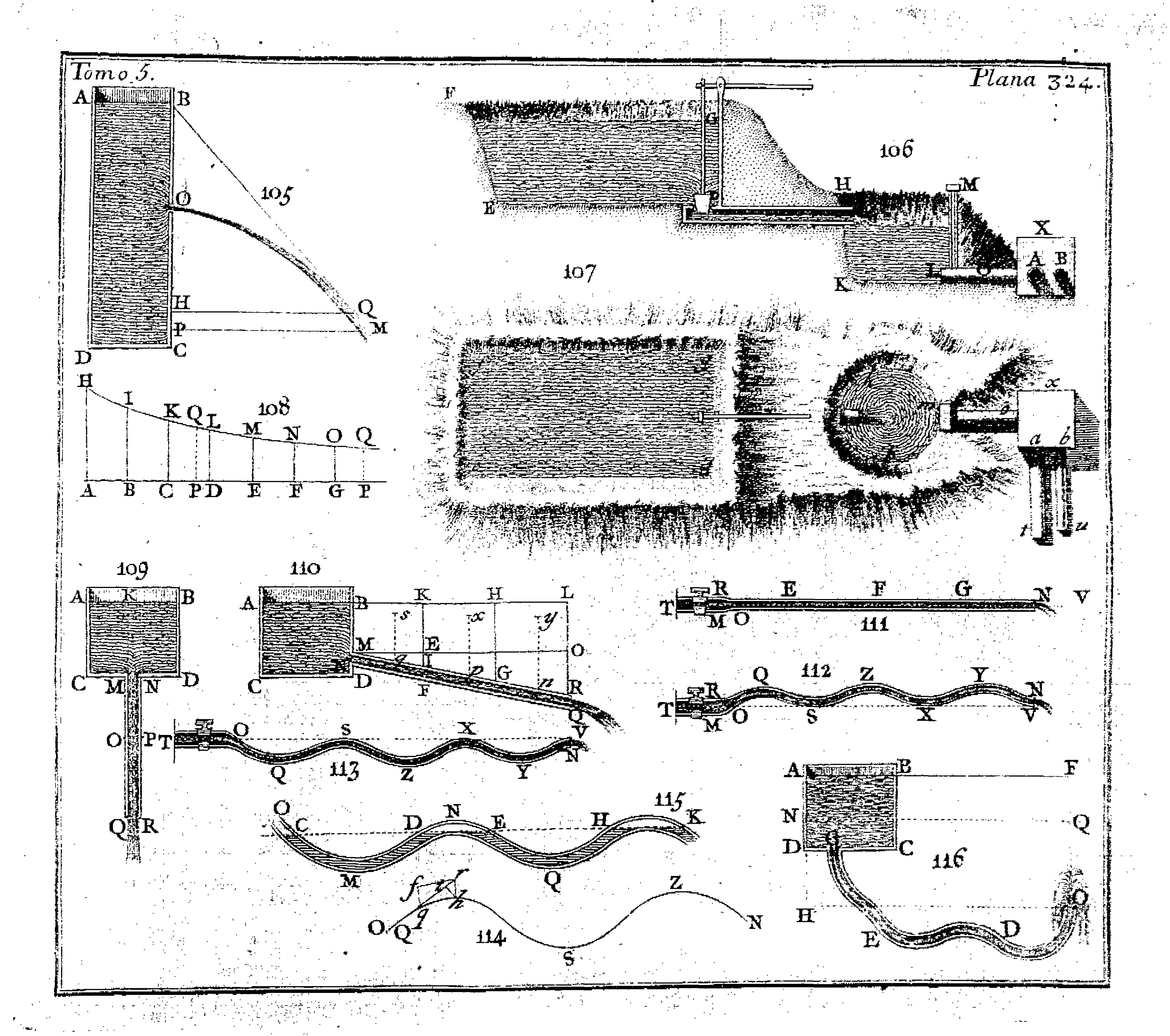
Hechas todas estas operaciones preliminares, se pregunta ¿qué diámetro se le podrá dar á dicho encañado para que coja y conduzca toda el agua que le puede suministrar el depósito *ADCB*.

Ya que los gastos hechos por dos tubos aditicios, de algunas pulgadas de largo, con una misma carga de agua, son como los quadrados de los diámetros de los tubos (308); y el gasto hecho por un tubo aditicio de 1 pulg. de diámetro, con una altura de depósito de 4 pies, es 7070 pulg. cúbicas en 1 minuto (314); si hacemos la proporcion $\sqrt{7070} : \sqrt{40000} :: 1$ pulg. ó 12 lineas: un quarto término que se halla ser 28,54 lineas, y es el diámetro que se le deberia dar á un tubo aditicio para que gastára en 1 minuto las 40000 pulg. cúbicas de agua que puede dar el depósito propuesto. Pero como el encañado *GEDO* ha de tener 400 toesas de largo, se echa de ver por nuestra tabla, que si no se le diera un diámetro mayor, no cogería mas que la octava ó novena parte del agua, y desecharía lo demás. Supongamos, por egemplo, que no

Fig. cogiera entonces mas que 5000 pulg. cúbicas de agua. Imaginaremos que la carga total *AH* ó *FO* se compone de dos partes *AN*, *NH*, tales que la primera haría correr 5000 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto por un encañado de 28,54 lineas de diámetro, y sin rozamiento, y la segunda *NH* ó *QO* sirve para vencer el rozamiento. Buscaremos despues el diámetro *D* que se le debería dar á otro encañado tambien libre de rozamiento para que la primera carga *AN* ó *FQ* hiciese correr por él 40000 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto; y este diámetro se sacará por la proporcion (308) $\sqrt{5000} : \sqrt{40000} :: 26,54$ lin. : $D = 80,73$ lineas $= 6$ pulg. $8\frac{7}{10}$ lineas al poco mas ó menos. Por donde se echa de ver que si la carga *HN* espresára la resistencia del rozamiento respecto de dos tubos de igual longitud, y tales que el uno tuviese 28,54 lin. de diámetro, el otro 80,73 lin. de diámetro, el encañado propuesto *GEDO* debería ser de 80,73 lin. de diámetro. Pero aunque hemos visto (403) que el rozamiento es algo menor en un tubo grande que en un tubo pequeño, la diferencia no debe ser aquí muy reparable, y discurro que no se equivocaría mucho el que diera cerca de 6 pulg. 8 lineas de diámetro á nuestro encañado para conducir al punto *O*, á pesar de la resistencia del rozamiento, las 40000 pulg. de agua que el depósito *ADCB* puede suministrar en 1 minuto.

Para proporcionarse algun ensanche en esta especie de cálculos, es conducente tomar por altura del depósito una altura algo menor que la que se puede conseguir con efecto.

La



105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116

La razon de esto es que si por los cálculos que acabamos de Fig. indicar, el diámetro del encañado se halla ser algo menor, el agua subirá en el depósito un poco mas arriba de lo que se ha supuesto, y en esto no hay ningun inconveniente; y por el contrario, si el diámetro del encañado se halla ser algo mayor, el agua bajará un poco en el depósito.

Todos estos cálculos, lo vuelvo á decir, no se han de mirar como sumamente exactos, porque se fundan en elementos que no se conocen con bastante precision. Pero se pueden admitir en la práctica, y servirán por lo menos para asegurarnos en gran parte del riesgo de hacer un encañado muy angosto respecto del volumen de agua que ha de llevar, ó de hacerle muy grande, y empeñarnos con esto en un gasto inutil.

430 Los tubos que dán el agua á boca libre dán mayor cantidad que si sus estremos llevasen algun tubo aditicio. Porque la parte de la boca que está tapada en el segundo caso, es un obstáculo análogo con el rozamiento, y debe disminuir el gasto. Pero no estorva esta diminucion que saliendo el agua por un tubo aditicio, suba mas alto que quando sale por la boca libre. Ya determinamos (363) el diámetro que ha de tener el encañado respecto del diámetro del tubo aditicio para que el surtidor tenga toda la altura posible. En esta determinacion hemos comparado los diámetros de dos tubos aditicios con los de sus encañados, y no hemos llevado en cuenta los efectos del rozamiento, ó por lo menos hemos supuesto tácitamente que influían del

 mis-

Fig. mismo modo en la espresada determinacion. Este supuesto es lícito, quando los encañados cuyo destino es dar agua para surtidores, no cogen mucho de largo, como sucede comunmente. Pero si el agua que ha de abastecer un surtidor viniera desde muy lejos, se debería aumentar el diámetro del encañado una cantidad correspondiente al rozamiento. En esto no hay otra cosa que temer sino los gastos muy crecidos que se han de originar de aumentar el diámetro del encañado. Despues de fijado este diámetro, solo faltará escoger entre muchos tubos aditicios conocidos con poca diferencia de antemano, el que dé mayor elevacion al surtidor, y acomodarle en el tronco.

431 Por los mismos principios se hallan las dimensiones de los encañados que han de servir para distribuir las aguas de un mismo depósito ó arca de agua entre muchas fuentes públicas ó particulares. Se determinará el diámetro de cada uno de ellos respecto de su longitud, y las sinuosidades á que le sujetare la naturaleza del terreno en comparacion de la carga de agua. Pero como esta determinacion no admite una exactitud rigurosa, se les pondrán á los encañados unas llaves que contribuirán para rectificarla, cuyas llaves, abriéndolas mas ó menos, dejarán pasar por cada encañado la cantidad de agua cabalmente, ni mas ni menos, que le tocare. La cuestion se resuelve del mismo modo, quando un tubo principal se divide y ramifica en otros menores. Los diámetros de estos se enmiendan por medio de llaves.

De la presion con que el agua obra en las paredes de un tubo cilíndrico por el qual corre. Fig.

432 Sea EN un tubo cilíndrico orizontal acomodado al depósito $ADCB$; y supongamos que manteniéndose el depósito constantemente lleno á la altura EB, el agua se mueva libremente por el tubo, sin esperimentar resistencia alguna; es constante que si exceptuamos la presion que procede del peso mismo de la columna de agua EN, el tubo no esperimenta esfuerzo ninguno; porque como la velocidad del agua tiene una direccion libre y orizontal, no puede resultar ninguna fuerza que obre en las paredes del tubo. 117.

433 Esto mismo lo manifiesta la esperiencia. En el depósito grande, cuya descripcion dimos antes (218), hice plantar un tubo orizontal EN de 3 pies de largo, y de 9 á 10 lineas de diámetro. Acia su medio M se habia hecho un agugerito lateral con el fin de formar un surtidor de agua. Estaba en mi mano dirigir este surtidor de abajo arriba, ó de arriba abajo, ó inclinarle á mi arbitrio, con dar una vuelta al tubo al rededor de su ege. Se mantenia el agua en el depósito á la altura de 4 pies mas arriba del tubo. Quando el estremo N estaba tapado, el surtidor tenia la altura ó amplitud que hemos determinado (346 y sig.). Pero quando se destapaba el estremo N, el surtidor cesaba casi enteramente en todas las direcciones. Solo quando la abertura M estaba ácia abajo el agua baveaba, y caía gota á gota por sus bordes. Es evidente que la cesacion del sur-

Fig. tidor prueba una cesacion de presion en las paredes del tubo.

434 Imaginemos siempre un tubo orizontal *EN* aco-
118. modado en el depósito grande *ADCB*, y por el qual el agua corra sin que padezca resistencia alguna por parte del rozamiento; pero supongamos que parte del orificio *PN* esté tapada, de modo que el agua salga ahora por el orificio pequeño *pn*. Siendo constantemente la misma la fuerza á cuyo impulso pasa el agua á *EC*, desde el depósito al tubo, es patente que el agua se mueve con menos velocidad por el tubo quando parte del orificio esterior *PN* está tapada, que quando el agua sale por la boca libre *PN*. Pero en virtud de esta diminucion de velocidad que se verifica en el primer caso, ha de resultar indispensablemente en las paredes del tubo una presion que nos toca determinar.

435 Para lograrlo, resolvamos la columna de agua *EN* en una infinidad de rebanadas *GFfg* verticales é iguales entre sí. Una vez que no llevamos en cuenta el rozamiento, es evidente que todos los puntos de una misma rebanada tienen una misma velocidad, y que á mas de esto, esta velocidad es la misma respecto de todas las rebanadas, pues gradualmente suceden unas en lugar de otras á lo largo del tubo. Es tambien patente que si *qr* representa la seccion de la vena contraída al salir del orificio *pn*, la velocidad de que acabamos de hablar es á la que se verifica en *qr*, como la area del orificio *qr* es á la area de la seccion *GF*; porque cada instante pasa por *qr* un prisma pequeño de agua igual

con

con el prisma *GFfg*, y estos prismas tienen por consiguiente velocidades recíprocamente proporcionales á sus bases. Luego si llamamos h la altura *BH* del depósito; *D*, el diámetro del tubo; *d*, el del orificio *qr*, y consideramos que la velocidad en *qr* pende de la altura h, y se puede espresar por $\sqrt{h}$; la velocidad del agua á lo largo del tubo será $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$. Fig.

Sentado esto, así como la velocidad $\sqrt{h}$ es efecto de la presion h, podemos considerar la velocidad $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$ como que es efecto de la presion $\frac{d^4h}{D^4}$. Pero ya que cada punto de la rebanada que cubre cada instante el fondo *PN*, intenta moverse con la velocidad $\sqrt{h}$, y no se mueve en realidad sino con la velocidad $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$, ha de comprimir evidentemente cada punto de *Pp* ó *Nn* sobre el qual descansa, con una fuerza igual á la diferencia de las presiones que producen las velocidades $\sqrt{h}$ y $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$. Esta presion se distribuye igualmente á la masa de agua *EN* en todas las direcciones, y contra las paredes del tubo. La presion que padece cada punto de las paredes será, pues, $h - \frac{d^4h}{D^4}$.

436 Síguese de aquí que si se le hace al tubo una abertura muy chica respecto de cada uno de los dos orificios *PN*, *pn*, el agua saltará por dicha abertura con una velocidad que será efecto de la altura $h - \frac{d^4h}{D^4}$. Esta altura desaparece quando $d = D$, esto es, quando el agua sale á boca libre por el orificio *PN*, conforme lo hemos prevenido (433).

Esto manifiesta quan errados ván algunos prácticos que

creen

Fig. creen que con hacer una aberturita lateral á un tubo por el qual corre agua, ha de salir por dicha abertura un surtidor, el qual, prescindiendo del rozamiento y de la resistencia del ayre, suba á la altura correspondiente á la velocidad del agua en el encañado. Puede muy bien suceder que no salga agua ninguna por dicha abertura.

437 Suponiendo siempre que se haya hecho á las paredes del tubo una aberturita, se hallará facilmente la cantidad de agua que ha de dar en un tiempo determinado. Porque los gastos por un mismo orificio, y en un mismo tiempo, son proporcionales (144 y 254) á las raices quadradas de las alturas de los depósitos, ó lo que viene á ser lo propio, á las raices quadradas de las presiones. Luego si llamamos Q el gasto que haria en un tiempo dado la abertura propuesta, siendo b la presion; q, el gasto que hace en el mismo tiempo, siendo la presion $b - \frac{d^4 h}{D^4}$, tendremos la proporcion $Q : q :: \sqrt{b} : \sqrt{\left[b - \frac{d^4 h}{D^4}\right]}$; de donde se saca $q = Q \times \frac{\sqrt{(D^4 - d^4)}}{D^2}$. Y como Q es conocida por lo dicho (232 y sig.), será tambien conocida q.

438 Esta teórica se verifica igualmente en los tubos inclinados, con tal sin embargo que en este último caso la abertura pn por donde el agua sale del tubo, sea muy pequeña respecto de PN. En faltando esta condicion, la velocidad al salir por pn no será efecto de toda la altura del depósito, y será preciso determinar primero b por principios distintos de los que llevamos sentados.

439 La misma teórica puede servir para determinar, por

por lo menos con corta diferencia, los gruesos que se les han de dar á los encañados que llevan tubos aditicios en sus estremos, para que puedan aguantar la presion de las aguas que conducen. Con efecto, como la espresion de la presion que padece cada punto de la circunferencia de una seccion de nuestro tubo EN, es $h - \frac{d+h}{D+}$; es evidente que para aguantar esta presion, el tubo ha de tener el mismo grueso que si el agua estuviera quieta siendo su altura $h - \frac{d+h}{D+}$. Esta cuestion se resuelve por el método de antes (40). Fig.

Se echa de ver que ha de tener menos grueso un encañado quando el agua se mueve por él, que si el agua fuese mansa siendo h su altura.

440 En la práctica se les dá á los encañados mas grueso de lo que pide la teórica precedente. Estos encañados aguantan con efecto muchos esfuerzos que no se llevan en cuenta en el cálculo, ni se pueden valuar exactamente. El choque del agua con los ángulos del encañado, los vientos que allí se alojan, y se han introducido con violencia en las subidas y bajadas, los defectos del plomo ó del hierro &c. exigen que sea el encañado de mucha resistencia para que no se rompa. Añádase á esto que en los parages húmedos la tierra adyacente al encañado le mina y pudre por algunas partes. Por consiguiente la altura del depósito no es el elemento principal, por el qual se debe arreglar el grueso del encañado. Pondremos aquí los gruesos que se dán comunmente á los encañados de plomo ó hierro, respecto de

sus

Fig. sus diámetros, tengan ó no en sus estremos tubos aditicios.

Encañados de plomo.		Encañados de hierro.	
Diámetros espresados en pulg.	Gruesos espresados en lineas.	Diámetros espresados en pulg.	Gruesos espresados en lineas.
1	$2\frac{1}{2}$	1	1
$1\frac{1}{2}$	3	2	3
2	4	4	4
3	5	6	5
$4\frac{1}{2}$	6	8	6
6	7	10	7
7	8	12	8

Por lo que mira al peso de estos encañados, siempre será facil hallarle, teniendo presente que el pie cúbico de plomo pesa como unas 828 libras, y el pie cúbico de barro forjado pesa como unas 580 libras.

En orden al grueso de los encañados de madera ó barro, no hay ninguna regla fija.

441 Supongamos ahora que el agua se mueva por el
117. encañado orizontal *EN*, y salga á boca libre por el estremo *N*, pero que al moverse esperimente la resistencia del rozamiento á lo largo de las paredes del tubo. Hemos visto (389 y sig.) que esta resistencia disminuye mucho el gasto. Se puede imaginar que el rozamiento angosta el paso del agua en el estremo *N* del encañado. Parece, pues, que enton-

ces

ces se podrá determinar la presion lateral del tubo, por la fórmula dada (435), substituyendo el tubo de la figura 118 en que no hay rozamiento, en lugar del de la figura 117 en que hay rozamiento; y suponiendo que *D* representa el diámetro verdadero del tubo; *d*, el diámetro reducido y disminuido por el rozamiento. Veamos qué dice la esperiencia acerca de esto. Fig.

442 En el punto *p* del tubo orizontal *bu* de 1.6 líneas de diámetro, hice una abertura lateral de unas $3\frac{1}{4}$ líneas de diámetro. Digo *de unas*, porque como aquí solo se trata de gastos comparativos, por un mismo orificio, no es menester conocer exactamente la abertura. Se midieron los gastos por el orificio *p*, estando primero tapado el estremo *u* del tubo, despues abierto succesivamente á diferentes distancias de la caja *x*; y resultó lo siguiente. 107.

443 Esperimentos I, II . . . . VII. Altura constante del agua en el depósito mas arriba del ege del tubo = 1 pie.

I. Estando tapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto, la abertura lateral *p* dió 196 pulg. cúbicas de agua.

II. A los 30 pies de la caja, estando destapado el estremo de dicho tubo, la abertura *p* dió en 1 minuto 171 pulg. cúbicas de agua.

III. A los 60 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 186 pulg. cúbicas de agua.

IV. A los 90 pies de la caja, estando destapado el

es-

Fig. estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 190 pulg. cúbicas de agua.

V. A los 120 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 191 pulg. cúbicas de agua.

VI. A los 150 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 193 pulg. cúbicas de agua.

VII. A los 180 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 194 pulg. cúbicas de agua.

444 Esperimentos VIII, IX.... XIV. Altura constante del agua en el depósito mas arriba del ege del tubo = 2 pies.

I. Estando tapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura lateral *p* dió 274 pulg. cúbicas de agua.

II. A los 30 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 240 pulg. cúbicas de agua.

III. A los 60 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 256 pulg. cúbicas de agua.

IV. A los 90 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 261 pulg. cúbicas de agua.

V. A los 120 pies de la caja, estando destapado el estremo *u* del tubo, en 1 minuto la abertura *p* dió 264 pulg. cúbicas de agua.

A

VI. A los 150 pies de la caja, estando destapado el Fig. estremo u del tubo, en 1 minuto la abertura p dió 265 pulg. cúbicas de agua.

VII. A los 180 pies de la caja, estando destapado el estremo u del tubo, en 1 minuto la abertura p dió 266 pulg. cúbicas de agua.

445 Reflexiones. Es evidente que si, conforme á lo dicho (441), d representa el diámetro del tubo por el qual se reputa que el agua sale en u, llevando en cuenta el rozamiento, siendo D el diámetro de dicho tubo, en el supuesto de no haber mas embarazo que el de la contraccion; es evidente, digo, que el gasto en u, alterado por el rozamiento, es al gasto que se verificaría á no haber rozamiento, como d^2 es á D^2. Pero,

1.° Quando la altura del depósito $=$ 1 pie, el gasto que se verificaría si no fuera por el rozamiento, $=$ 6330 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto (396). Luego entonces tendremos (395),

En el origen del tubo, $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ó $d = D$;

A los 30 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2778}{6330}$;

A los 60 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1957}{6330}$;

A los 90 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1587}{6330}$;

A los 120 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1351}{6330}$;

A los 150 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1178}{6330}$;

A los 180 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1052}{6330}$.

2.°

Fig. 2.° Quando la altura del depósito = 2 pies, el gasto que se verificaría si no fuera por el rozamiento, = 8939 pulg. cúbicas en 1 minuto (396). Luego tendremos entonces (395)

En el origen del tubo, $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ó $d = D$.

A los 30 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{4066}{8939}$;

A los 60 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2838}{8939}$;

A los 90 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2352}{8939}$;

A los 120 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2011}{8939}$;

A los 150 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1762}{8939}$;

A los 180 pies de la caja, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1583}{8939}$.

446 Sentado esto, volvamos á la fórmula $q = Q \times \frac{\sqrt{(D^4 - d^4)}}{D^2}$ (437). El gasto Q que hace la abertura lateral p, estando tapado el estremo u del tubo, es de 196 pulg. cúbicas en 1 minuto, quando la altura del depósito = 1 pie, por el esperimento I; es de 274 pulg. en 1 minuto, quando la altura del depósito = 2 pies, por el esperimento VIII. Para sacar los gastos q que hace el mismo orificio en 1 minuto, quando el estremo u del tubo está destapado, se substituirán en lugar de $\frac{d^2}{D^2}$ succesivamente los valores que acabamos de hallar. Por este medio se formarán las tres primeras columnas de la tabla siguiente. La quarta columna espresa los gastos efectivos de la abertura p, conforme los han dado los esperimentos.

Al-

Fig.

Alturas del depósito, espresadas en pies.	Longitudes de los tubos, espresadas en pies.	Gastos en 1 min. calculados por la fórmula, y espresados en pulg. cub.	Gastos correspondientes hallados por los esperimentos, espresad. tambien en pulg. cúbicas.
1	30	176	171
1	60	186	186
1	90	190	190
1	120	191	191
1	150	192	193
1	180	193	194
2	30	244	240
2	60	259	256
2	90	264	261
2	120	267	264
2	150	268	265
2	180	269	266

447. Se echa de ver que los gastos calculados se arriman mucho á los gastos efectivos, y que no es posible esperar una conformidad mas perfecta en esta especie de investigaciones. De aquí sacamos una regla muy sencilla para determinar el gasto de un tubo orizontal largo, que padezca rozamiento, por medio del gasto por una abertura

Fig. lateral hecha en sus paredes. Llamemos x la razon entre el gasto del tubo propuesto llevando en cuenta el rozamiento, y el gasto que haría si no fuera por esta resistencia; ó lo que es lo mismo, sea $x = \frac{d^2}{D^2}$. La fórmula $q = Q \times \frac{\sqrt{(D^4 - d^4)}}{D^2}$ se transformará en $q = Q \sqrt{(1 - xx)}$; de donde sale $x = \frac{\sqrt{(Q^2 - q^2)}}{Q}$. Sentado esto, el gasto que se pide se hallará practicando lo siguiente. Se hará en un parage qualquiera de las paredes del tubo una abertura lateral de estension conocida, y muy perpendicular á la direccion del movimiento del agua; por los métodos declarados (232 y sig.) se calculará el gasto Q del espresado orificio en 1 minuto, con la altura constante del depósito mas arriba de su centro, y estando tapado el estremo de descarga del tubo; por medio de un esperimento inmediato se medirá el gasto q que el orificio lateral hace en 1 minuto, estando abierto el estremo de descarga del tubo. Con esto se conocerá x; solo faltará conocer, por medio de lo dicho allí mismo, el gasto que haría el tubo sin atender al rozamiento, para sacar el gasto en el caso del rozamiento.

Por egemplo, supongamos que el tubo tenga 2 pulg. de diámetro; que la altura del agua en el depósito mas arriba de su ege sea de 3 pies; que la abertura lateral tenga 6 líneas de diámetro; que esta abertura dé 1000 pulg. cúbicas de agua en 1 minuto, corriendo el agua por el tubo. La misma abertura, en el supuesto de que padezca contraccion de la primera especie, daría (273) en 1 minuto 1178 pulg. cúbicas, estando tapado el estremo del tubo; quiero decir que te-

tenemos $Q = 1178$ pulg. cúbicas; siendo así que $q =$ 1000 pulg. cúbicas. Substituyendo estos valores en la equacion $x = \frac{\sqrt{(Q^2 - q^2)}}{Q}$, sacaremos $x = 0,5289$. Ahora el tubo propuesto debería dar (314) en 1 minuto 24504 pulg. cúbicas, no llevando en cuenta el rozamiento; dará, pues, llevando el rozamiento en cuenta, $0,5289 \times 24504$ pulg. cúbicas $= 12952$ pulg. cúbicas. Fig.

448 Todo esto es sensiblemente verdadero respecto de los tubos inclinados, rectilineos ó curvilineos, quando se puede considerar el rozamiento como que disminuye mucho el orificio por donde sale el fluido.

449 Hemos prevenido lo bastante que la presion de que aquí se trata procede del menoscabo que padece la velocidad del agua en el encañado. Así, quando se determina esta presion por el gasto que hace un orificio lateral, es menester que este orificio se haga muy perpendicularmente á la direccion del agua, porque sin esto, parte de la evacuacion provendria del movimiento mismo del fluido. En el encañado *AMB* se vé un egemplo de una evacuacion de 119.
esta especie, por la abertura lateral *M*.

Del movimiento del agua por canales.

450 Los canales de que aquí se trata están abiertos por la parte de arriba, y tiene libertad la superficie del agua para subir ó bajar. Pero en virtud de esta libertad, el fluido puede sacar de su mismo peso una velocidad que se combine con la que le queda del impulso inicial. Por con-

Fig. siguiente, no debe el rozamiento seguir aquí las mismas leyes que en los encañados, donde el agua está comprimida por todos lados, y se mueve en una sola y misma direccion determinada. Se ha escrito mucho sobre este asunto. Primero propondré lo que he averiguado por mí mismo, y despues los principales medios propuestos por varios Autores para medir la velocidad de las aguas corrientes.

Medida de la velocidad del agua en un canal rectangular.

451 Quando un fluido pasa desde un depósito á un canal por un agugero que no es muy grande, cada molécula procura moverse, en el primer instante, con una velocidad ocasionada de la altura del depósito que la corresponde. Luego si fuera un cuerpo aislado, y con libertad para moverse en el canal, tomaría y guardaría dicha velocidad, y adquiriría tambien otra en virtud del declivio del canal, dado caso que le tuviese. Pero pasa á cada instante por el agugero un monton de moléculas que obran unas en otras, y turban sus movimientos recíprocos. La vena padece contraccion, rozamiento, y resistencia de parte del ayre. Todas estas cosas influyen en la velocidad, y es dificultoso determinarla exactamente, quando el canal es de una figura irregular, conforme veremos despues.

452 Para sacar resultados sencillos y fáciles de com-
120. parar con la teórica, consideramos aquí el movimiento del agua por un canal rectangular. En la cara vertical *BC* del de-

depósito *ADCB* de que hablamos antes (218), y ras con ras del suelo *DC*, se hizo una abertura *EC*, en la qual se puso una compuerta rectangular de cobre, que se levantaba y bajaba á arbitrio. El orificio por donde salió el agua era un rectángulo que tubo constantemente 5 pulg. de base orizontal, cuya altura variaba conforme se levantaba ó bajaba la compuerta. Las caras laterales del espresado orificio eran de cobre, y formaban dos planos verticales, paralelos entre sí, y perpendiculares á la pared cuyo perfil es *BC*. Se movia la *pala* ó compuerta por la parte de afuera, por medio de un garfio que tenia clavado, y de una palanca que se movia succesivamente al rededor de dos apoyos á propósito para subirla ó bajarla. Para que dicha pala no subiese mas arriba de lo que era menester, habia unos clavos clavados en la plancha de cobre por la qual corria, los quales servian para detenerla, y solo la permitian llegar á la altura precisa no mas. Verdad es que quando se queria mudar la altura del orificio, se gastaba algun tiempo en quitar y volver á poner dichos clavos; pero esta maniobra pareció preferible á otra qualquiera, por razon de la facilidad que daba para levantar en un instante la pala en cada operacion. Fig.

453 Del orificio *EC* salia un canal rectangular *EF* de 105 pies de largo, y abierto por la parte de arriba. Su suelo tenia de ancho 5 pulg. cabales, y su altura era de unas 8 ó 9 pulg. Se ajustaba exactamente con el orificio. Quando estaba en la posicion orizontal, su suelo estaba en

Fig. el mismo plano orizontal que el suelo del depósito. En todas las situaciones, sus paredes interiores eran las prolongaciones de las caras laterales del orificio. El suelo se componia de fuertes tablones, muy lisos é iguales, puestos los estremos de unos inmediatamente á continuacion de los estremos de los otros; las paredes eran de tablas de pino. Se pusieron sobre el canal de dos en dos pies travesaños que sostenian las paredes, é impedian que se venciesen.

Este canal sirvió para medir la velocidad del agua que por él corría. Primero se colocó orizontalmente, despues se le fue inclinando poco á poco al orizonte. En todos los casos se mantenia el agua en el depósito á una misma altura en un mismo esperimento, pero á alturas distintas en esperimentos diferentes. Entraba en el depósito del mismo modo que digimos (218).

454 Quando el agua estaba en su mayor altura en el depósito, y convenia mantenerla algun tiempo en este estado, se habia puesto en el estremo del canal de comunicacion de la cuba con el depósito, una tabla con tal disposicion, que quebrantaba el impulso del agua, y la superficie superior del agua del depósito se estaba quiera. Pero quando se habia de mantener el agua en el depósito á otra altura constante; pongo por caso, á la altura de 7 pies 8 pulg. se ataba en las paredes del depósito una especie de caja mobil, abierta por la parte de arriba, que recibia el impulso del agua, y la rechazaba por medio de una inclinacion suave á la altura conveniente al depósito, sin ocasionar commo-

mocion sensible en la superficie, y mucho menos en la masa Fig.
del agua inferior. En los lados del depósito se habian hecho unos desaguaderos que servian para mantener el agua á la altura que se deseaba. A mas de esto, se procuraba con cuidado que el agua llegase sin interrupcion, y nunca pasase de un clavo que señalaba el límite de la altura; y la misma persona que tenia este encargo, daba agua segun se quería, por medio de una palanca que manejaba, y con la qual levantaba ó bajaba la compuerta de la cuba.

455 Hechos estos preparativos, quando se quiso medir la velocidad del agua en el canal, lo primero que ocurrió fue echarla un pedazo de corcho ú otra materia ligera; pero luego se conoció que era insuficiente este método, por lo menos quando el canal era orizontal. Porque entonces el agua se hinchaba á medida que corria, echaba á uno y otro lado el cuerpo fluctuante, y no le permitia seguir directamente su *filete*. Se probó á arrojar al agua materias coloreadas, como sangre, carbon molido &c. Pero este recurso tampoco sirvió, porque el agua deshacia muy facilmente estas materias, y dejaba en duda su llegada. El medio que preferí fue determinar el tiempo que corria desde el instante que se quitaba la compuerta puesta en el orificio *CE*, hasta el instante que el agua llegaba á los diferentes puntos del canal. Verdad es que de este modo solo se averigua la velocidad de la primera agua que corre por el canal, y se echa de ver que quando su curso está enteramente sentado, es mas rápido que al principio. Pero las dos

Fig. velocidades tienen entre sí una razon que es constante, ó poco la falta, conforme manifestarán muchos casos en que se puede determinar una y otra. De donde resulta que dada en ciertos casos la una de ellas, se podrá tambien inferir la otra sensiblemente.

456 Yá llevamos dicho (453) que la longitud total del canal era de 105 pies. Se dividió esta longitud en cinco partes iguales, y en tres partes iguales, de modo que cada una de las cinco partes iguales era de 21 pies, y cada una de las tres partes iguales era de 35 pies. Para verificar con certeza la llegada de la primera agua á cada punto de division, se pusieron unos molinillos (parecidos á los que sirven de juguete á los muchachos) cuyas alas verticales eran impelidas del agua. La señal que daban dichas alas quando se apartaban de la situacion vertical, era muy pronta y segura. La percibia el sugeto que contaba las oscilaciones del péndulo.

El signo $\pm$ puesto á continuacion de algun número de segundos ó medios segundos indica que dicho número es un si es no es mayor ó menor de lo que debiera. Estas palabras *pala levantada* $\frac{1}{2}$ ó 1 *pulgada*, significan que el orificio por donde pasaba el agua para ir desde el depósito al canal era un rectángulo de 5 pulg. de base, y $\frac{1}{2}$ ó 1 pulg. de altura &c. Lo demás es patente por sí.

Es-

457 Esperimento I. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del suelo, era de 11 pies 8 pulg. el canal era orizontal, y la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg. Fig.

Segundos.	Número de pies andados.
2	21
5—	42
10—	63
16—	84
23+	105

Se echa de ver que los tiempos succesivos gastados en andar cada espacio de 21 pies son espresados por los números siguientes, 2, 3—, 5, 6, 7+, que forman, con cortísima diferencia, una progresion arismética creciente, cuya razon es 1. Se podrá, pues, proseguir esta serie, y determinar, siquiera al poco mas ó menos, el tiempo que el agua gastaría en andar un número qualquiera de pies, si el canal fuese prolongado indefinitamente.

458 Esperimento II. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del suelo, era de 7 pies 8 pulg. el canal era orizontal, y la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3—	21
7	42
13—	63
20—	84
28+	105

Las

Fig. Las dos series de tiempos y espacios andados son fáciles de proseguir, y por consiguiente se puede determinar, con muy corta diferencia, el tiempo que el agua gastaría en andar un número qualquiera de pies, si el canal fuese prolongado indefinitamente, el lector hará por sí estas observaciones en los esperimentos siguientes.

459 ESPERIMENTO III. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del suelo, era de 3 pies 8 pulg. el canal era orizontal, y la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3 +	21
9	42
17 +	63
27 +	84
38 +	105

460 ESPERIMENTO IV. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del suelo, era de 11 pies 8 pulg. el canal era orizontal, y la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
2	21
4	42
7	63
11	84
$16\frac{1}{4}$	105

Es-

461 ESPERIMENTO V. La altura constante del agua en el depósito mas arriba del suelo, era de 7 pies 8 pulgadas; el canal era orizontal, y la pala estaba levantada 1 pulgada. Fig.

Segundos.	Numero de pies andados.
2+	21
5	42
9	63
14	84
20	105

462 ESPERIMENTO VI. La altura constante del agua en el depósito desde el suelo, era de 3 pies 8 pulg. el canal era orizontal, y la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3—	21
6+	42
11+	63
18+	84
26	105

463 REFLEXIONES. Para averiguar la diminucion que la velocidad de la corriente padece, busquemos primero qual ha de ser esta velocidad, prescindiendo de toda resistencia.

El fluido esperimenta al salir por el orificio una contrac-

Fig. traccion de la primera especie que disminuye el gasto natural en la razon de 8 á 5, ó lo que viene á ser lo propio, la seccion de la vena contraída es un rectángulo cuya area es á la del orificio verdadero, como 5 es á 8. Estos dos rectángulos son semejantes, sensiblemente por lo menos. Como mas allá del punto de contraccion el agua toca y sigue el suelo y las paredes del canal, y la vena se ha de dilatar, con poca diferencia, del mismo modo que se contrajo al principio, es evidente que entonces cada seccion del agua es un rectángulo que se puede considerar como semejante á los dos precedentes. Luego ya que en un mismo tiempo pasa la misma cantidad de agua por la seccion de la vena contraída, y por una seccion qualquiera del agua en el canal, las dos velocidades correspondientes á estos dos parages tienen entre sí la misma razon que 8 con 5. Así, si llamamos H la altura BE del depósito, cuya altura es efecto de la velocidad del agua en el punto de contraccion; h, la altura que es efecto de la velocidad de la corriente en lo restante del canal; y consideramos que las velocidades son como las raices quadradas de las alturas correspondientes, tendremos $\sqrt{H} : \sqrt{h} :: 8 : 5$. Luego $h = H \times \frac{25}{64}$.

464 Está probado (IV. 50) que un cuerpo grave al caer de la altura de 15 pies en 1 segundo, adquiere en esta caida una velocidad con la qual andaría uniformemente 30 pies en 1 seg. Está tambien probado (IV. 21) que los tiempos de los movimientos uniformes son como los espacios andados divididos por las velocidades. Luego, si llamamos

en

en general E el espacio andado uniformemente por un mobil en el tiempo t, con una velocidad correspondiente á la altura h; y espresamos E y h en pies: tendremos $t : 1'' :: \frac{E}{\sqrt{h}} : \frac{30}{\sqrt{15}}$. Luego $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15h}}$. Fig.

En el supuesto de que sea E el espacio andado por el agua en el canal, y substituyendo en lugar de $\sqrt{h}$ su valor $\frac{5\sqrt{H}}{8}$, tendremos $t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}$.

465 La fórmula general $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15h}}$ dá $h = \frac{E^2}{60t^2}$. Por donde consta que si un espacio E es andado uniformemente en el tiempo conocido t espresado en segundos, la altura correspondiente á la velocidad del mobil será espresada por $\frac{E^2}{60t^2}$.

466 Todo esto sentado, busquemos por medio de la fórmula $t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}$ el tiempo que debería gastar el agua en andar el canal, si nada estorvára su movimiento. Sacaremos

De los esperimentos I y IV, $t = 6'', 350$.
De los esperimentos II y V, $t = 7'', 834$.
De los esperimentos III y VI, $t = 11'', 330$.

467 Si comparamos estos tiempos con los que la esperiencia dá realmente, inferiremos

1.° Que la resistencia de los obstáculos repartidos á lo largo del canal disminuye considerablemente la velocidad con que el agua debería moverse naturalmente. Esta resistencia proviene por la mayor parte del rozamiento; pero tambien le toca alguna parte al ayre.

2.° Que la resistencia de los obstáculos es tanto menos

Fig. nos sensible, quanto mas levantada está la pala, ó quanto mayor golpe de agua sale. La razon de esto es que respecto de la superficie contra la qual obra la accion del rozamiento, ó el choque del ayre, una masa mayor tiene mas fuerza que otra menor para superar estos obstáculos, suponiendo iguales las velocidades de ambas masas.

468 Es mucho lo que falta para que en cada esperimento sea uniforme la velocidad de la corriente, ó cada una de las divisiones iguales del canal sea andada en un mismo tiempo. Mengua la velocidad á medida que el agua se aparta del depósito. Tiene este movimiento algunas particularidades que merecen ser atendidas. Quando se levanta la pala, el agua es arrojada en la direccion *CF* del canal, y no
121. tiene al principio mas direccion que esta. Pero como caminando esperimenta resistencia, se hincha, y su superficie adquiere la forma *EMG*; entonces vuelve á caer por su propio peso desde el punto mas alto *M*, y parte del agua se vuelve ácia el depósito en la direccion *MN*. Hay tambien en la parte *CM* del canal dos corrientes que siguen direcciones encontradas, la una formada del agua inferior que sigue la direccion *CF*, la otra del agua superior que vuelve atrás en la direccion *MN*. Esta es muy reparable quando empieza. Remata en el punto *N* distante como unos 12 pies del orificio *EC*. Vá menguando poco á poco, bien que siempre subsiste; y toma al fin la superficie del agua la forma *ERG*, siendo el punto *R* el mas alto respecto del suelo. El agua que á cada instante llega del depósito, choca continua-

nuamente en *NO* con la masa *NOFG*, se mezcla con ella, Fig. y esta masa que se renueva sin cesar guarda la misma figura. Las corrientes de que acabamos de hablar, son un egemplo visible de las que se deben formar en un rio, en el mar, siempre que hay obstáculos que atrasan el movimiento del agua. Se echa de ver que en estos casos, el agua se ha de hinchar primero, y que obligándola despues su peso á esparramarse, han de resultar de aquí corrientes que pueden seguir toda especie de direcciones.

469 Aunque la velocidad del agua esperimente, conforme lo acabamos de manifestar, un atraso considerable, y tanto mayor quanto mas largo es el canal, no por esto mengua el gasto. La evacuacion que se hace continuamente por el orificio, no es atajada por el agua del canal, porque como esta agua tiene libertad para escurrirse ó levantarse, no le puede oponer á la que la sigue mas que una resistencia como infinitamente pequeña. Esto es patente de suyo. Sin embargo, me ha parecido conveniente averiguarlo por medio de algun esperimento. He hallado que en un tiempo dado se recibe en el estremo *F* del canal, la misma cantidad de agua que en el orificio *EC* quando se ha quitado enteramente el canal. Hay, pues, una diferencia muy notable entre el movimiento del agua por dentro de un tubo cerrado por todas partes, y el movimiento por un canal abierto por la parte de arriba. En el primer caso el gasto mengua, y mengua tanto mas quanto mas largo es el tubo; siendo así que en el segundo es siempre el mismo, sea la que fuere la longitud del canal.

Sien-

Fig. 470 Siendo una misma la velocidad inicial del fluido, los canales que tienen pendiente son andados en menos tiempo que los canales orizontales; porque el declivio dá lugar á una alteracion ocasionada por la pesantez relativa. Los esperimentos que vamos á referir manifiestan la ley que las velocidades siguen entonces. Por declivio del canal entendemos la distancia vertical del uno de sus estremos á la linea orizontal que pasa por el otro estremo.

471 Esperimento VII. La altura constante del agua en el depósito, mas arriba del suelo, era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal de 3 pulg. la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4	35
11+	70
22	105

472 Esperimento VIII. La altura constante del agua en el depósito, mas arriba del suelo, era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal de 3 pulg. la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4+	35
14+	70
26	105

Es-

473 Esperimento IX. La altura constante del agua en el depósito, mas arriba del suelo, era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 3 pulg. la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
6+	35
18+	70
34+	105

474 Esperimento X. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pulg. la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
$3\frac{1}{2}$	35
$11\frac{1}{2}$	70
21	105

475 Esperimento XI. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pulg. la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4+	35
14	70
25+	105

476 Esperimento XII. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pulg. la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Segundos.	Números de pies andados.
6	35
18—	70
31+	105

477 Esperimento XIII. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pulg. la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3	35
8	70
15	105

478 Esperimento XIV. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pulg. la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4—	35
9+	70
19—	105

479 Esperimento XV. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pulg. la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
5—	35
13—	70
23—	105

480 Esperimento XVI. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 1 pie; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3—	35
$7\frac{1}{2}$	70
14	105

481 Esperimento XVII. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 1 pie; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4—	35
9	70
16	105

482 Esperimento XVIII. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 1 pie; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
5—	35
12	70
21	105

483 Esperimento XIX. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 2 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
2+	35
7	70
13	105

484 Esperimento XX. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal era de 2 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4—	35
9—	70
15—	105

Es-

485 Esperimento XXI. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 2 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
$4\frac{1}{2}$	35
$10\frac{1}{2}$	70
$17\frac{1}{2}$	105

486 Esperimento XXII. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 4 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
2+	35
$6\frac{1}{2}$	70
12	105

487 Esperimento XXIII. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 4 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3+	35
8	70
13	105

488 Esperimento XXIV. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 4 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4+	35
9+	70
15+	105

489 Esperimento XXV. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
2+	35
6	70
10	105

490 Esperimento XXVI. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3+	35
7+	70
12	105

491 ESPERIMENTO XXVII. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 6 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4	35
9—	70
14—	105

492 ESPERIMENTO XXVIII. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 9 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
2+	35
6—	70
9	105

493 ESPERIMENTO XXIX. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 9 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
3+	35
$6\frac{1}{2}$	70
10	105

494 Esperimento XXX. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 9 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Segundos.	Número de pies andados.
4—	35
8—	70
12—	105

495 Esperimento XXXI. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 9 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
7+	35
15	70
23	105

496 Esperimento XXXII. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 9 pies; la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
9	35
19	70
30	105

Es-

497 Esperimento XXXIII. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
2	21
7	42
12	63
17	84
21+	105

498 Esperimento XXXIV. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
3+	21
8+	42
13+	63
18+	84
23+	105

499 Esperimento XXXV. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada $\frac{1}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
4+	21
10	42
16	63
22	84
28	105

500 Esperimento XXXVI. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
2	21
5	42
9	63
13	84
17	105

501 Esperimento XXXVII. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada 1 pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
3+	21
7	42
11	63
15	84
19	105

502 Esperimento XXXVIII. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies, la pala estaba levantada 1 pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
3	21
8	42
13	63
18—	84
22	105

Es-

503 Esperimento XXXIX. La altura constante del agua en el depósito era de 11 pies 8 pulgadas; el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada $\frac{3}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
2	21
5	42
8+	63
12	84
15+	105

504 Esperimento XL. La altura constante del agua en el depósito era de 7 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada $\frac{3}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
3—	21
6	42
10—	63
13+	84
17	105

Es-

505 Esperimento XLI. La altura constante del agua en el depósito era de 3 pies 8 pulg. el declivio del canal, de 11 pies; la pala estaba levantada $\frac{3}{2}$ pulg.

Medios seg.	Número de pies andados.
3+	21
7	42
11+	63
15	84
20	105

506 Reflexiones. En todos estos esperimentos solo hablamos de la primera agua que anda el canal. Esta agua padece una resistencia considerable por parte del rozamiento, porque tropieza sin cesar con asperidades, ó llena cavidades. Pero se percibe que ha de formar en toda la longitud del canal una como capa que allana el suelo y las paredes, y con esto facilita el paso al agua que sigue. Por consiguiente la velocidad de la corriente debe ser sensiblemente mayor quando está bien formada y permanente que á los principios. Los esperimentos siguientes lo están manifestando. Con la mira de medir la velocidad permanente, se pusieron en la superficie del agua quatro pedacitos de corcho que seguian exactamente su curso, y tomaban sensiblemente toda su velocidad. La primera division del canal siempre es andada en un poco menos tiempo que las demás.

Es-

507 Esperimento XLII. Altura constante del agua en el depósito = 11 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = $\frac{1}{2}$ pulg.

La primera agua andaba todo el canal en 22 medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en 19 medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como 19 es á 22, con corta diferencia.

508 Esperimento XLIII. Altura constante del agua en el depósito = 7 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = $\frac{1}{2}$ pulg.

La primera agua andaba el canal entero en 24 medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en 21 medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como 21 á 24, con corta diferencia.

509 Esperimento XLIV. Altura constante del agua en el depósito = 3 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = $\frac{1}{2}$ pulg.

La primera agua andaba el canal entero en $28\frac{1}{2}$ medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en 25 medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como 25 es á $28\frac{1}{2}$, con corta diferencia.

510 Esperimento XLV. Altura constante del agua en el depósito = 11 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = 1 pulg.

La

La primera agua andaba el canal entero en $17\frac{1}{2}$ medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en $14\frac{1}{2}$ segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente como $14\frac{1}{2}$ es á $17\frac{1}{2}$, con corta diferencia.

511 Esperimento XLVI. Altura constante del agua en el depósito = 7 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = 1 pulg.

La primera agua andaba todo el canal en $19\frac{1}{2}$ medios segundos, y los quatro pedazos de corcho le andaban en 16 medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como 16 es á $19\frac{1}{2}$ al poco mas ó menos.

512 Esperimento XLVII. Altura constante del agua en el depósito = 3 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = 1 pulg.

La primera agua andaba todo el canal en $22\frac{3}{4}$ medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en 19 medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como 19 es á $22\frac{3}{4}$, al poco mas ó menos.

513 Esperimento XLVIII. Altura constante del agua en el depósito = 11 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = 18 lineas.

La primera agua andaba todo el canal en 16 medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en 13 medios segundos.

Así,

Fig. Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permamente, como 13 es á 16, ó allá se vá.

514 Esperimento XLIX. Altura constante del agua en el depósito = 7 pies 8 pulg. declivió del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = 18 lineas.

La primera agua andaba todo el canal en $17\frac{1}{2}$ medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en $14\frac{1}{2}$ medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como $14\frac{1}{2}$ es á $17\frac{1}{2}$, con corta diferencia.

515 Esperimento L. Altura constante del agua en el depósito = 3 pies 8 pulg. declivio del canal = 10 pies 6 pulg. elevacion de la pala = 18 lineas.

La primera agua andaba todo el canal en $20\frac{1}{2}$ medios segundos; y los quatro pedazos de corcho le andaban en 17 medios segundos.

Así, la velocidad primitiva es á la velocidad permanente, como 17 es á $20\frac{1}{2}$, ó poco falta.

516 Todos los esperimentos que acabo de referir se hicieron por los meses de Setiembre y Octubre del año de 1764. El año de 66 hice otros esperimentos sobre el mismo asunto, con un canal de igual ancho y alto que el precedente, pero de 600 pies de largo. Este canal recibia el agua del depósito *HKLM*, del qual se ha hecho men-
106. cion (390); y el agua se mantenia á una altura constante en este depósito *HKLM* por medio del repuesto provisional que habia en el estanque *FEDG*. Los demas pre-

pa-

paratívos fueron, con corta diferencia, los mísmos que los Fig. especificados (452 ... 456). Solo añadiré, que en este caso las señas las hicieron hombres apostados en las divisiones iguales del canal. Estas señas no son tan seguras como las que usé antes; pero como todos estos esperimentos se repitieron muchas veces, y despues los examiné con mucho cuidado, desechando los que me parecieron dudosos, y llevando en cuenta las mas leves equívocaciones que pudieron cometerse en los mejores; los resultados que vamos á proponer son acreedores á la confianza del lector.

En las tablas que siguen, con estas palabras *primera agua*, quiero dar á entender que se trata de la velocidad del agua, medida desde el instante que se levanta la pala, hasta el instante que el agua llega á cada punto de division del canal: por *curso sentado*, quiero dar á entender que se trata de la velocidad del agua despues que ha tomado un curso regular y permanente. Esta velocidad se midió con unos cuerpecillos ligeros que nadaban en el agua del canal.

Fig. 517 Esperimento LI. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 4 pies; el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 1 pulg.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
10	100	8	100
20+	200	17	200
31 —	300	26	300
42 —	400	35	400
$52\frac{1}{2}$	500	43+	500
62+	600	52	600

518 Esperimento LII. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 4 pies; el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 2 pulg.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
8	100	7	100
17	200	$14\frac{1}{2}$	200
26	300	22	300
35 —	400	29+	400
43+	500	37 —	500
52 —	600	44+	600

Es-

519 ESPERIMENTO LIII. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 2 pies; el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 1 pulg. Fig.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
11	100	10	100
23	200	20	200
35	300	30	300
46+	400	40	400
58	500	49	500
69	600	58	600

520 ESPERIMENTO LIV. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 2 pies; el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 2 pulg.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
9	100	8—	100
19	200	16	200
29	300	24	300
39	400	32	400
49	500	40	500
58	600	48	600

Fig.

521 Esperimento LV. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 1 pie; el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 1 pulg.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
12+	100	12	100
25 $\frac{1}{2}$	200	23+	200
39	300	33	300

522 Esperimento LVI. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 1 pie; el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 2 pulg.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
11—	100	9	100
22	200	18—	200
32 $\frac{1}{2}$	300	27	300

Es-

523 Esperimento LVII. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 4 pulg. el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 1 pulg. Fig.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
15	100	13	100
31	200	$26\frac{1}{2}$	200
47	300	$39\frac{1}{2}$	300

524 Esperimento LVIII. La altura constante del agua en el depósito sobre el suelo del canal era de 4 pulg. el declivio del canal, $\frac{1}{10}$ de la linea de nivel; la pala estaba levantada 2 pulg.

Primera agua.		Curso sentado.	
Segundos.	Núm. de pies andados.	Segundos.	Núm. de pies andados.
$13\frac{1}{2}$	100	$11\frac{1}{2}$	100
$26\frac{3}{4}$	200	23	200
$39\frac{1}{2}$	300	$33\frac{1}{2}$	300

525 Reflexiones. Todos estos esperimentos mani-

Fig. fiestan en general que, siendo igual todo lo demás, la velocidad crece al paso que crece el declivio. Es preciso distinguir dos especies de velocidades; es á saber, la de la primera agua que anda el canal, y la que queda permanente despues que el agua ha corrido algun tiempo. La una es menor que la otra. Pero si se comparan unos con otros los esperimentos que nos han servido para determinarlas ambas, se echará de ver que están entre sí en una razon que es constante, con corta diferencia, respecto de un mismo canal. Se percibe que esto se ha de verificar en general, á lo menos sensiblemente. Porque siendo las mismas las asperidades del canal, el agua que sale por una misma abertura esperimenta los mismos obstáculos, y ha de sentar su curso regular y permanente, segun una misma ley, con poca diferencia, aunque la altura del depósito y el declivio lleguen á variar. Puede suceder que las velocidades primitivas en canales distintos, no sean entre sí como las velocidades permanentes en los mismos canales, porque el rozamiento puede ser muy distinto en ambos casos.

526 Quando es poco el declivio de un canal, ni la velocidad primitiva, ni la velocidad permanente son uniformes. En este caso, á medida que nos apartamos del depósito, las partes iguales del canal son andadas en mas tiempo. Parece que en nuestro canal ninguna de las dos velocidades llega á ser sensiblemente uniforme, sino quando el declivio viene á ser la décima parte de la longitud del canal. Exceptuo sin embargo la primera division que aun entonces es

-an-

andada en algo menos tiempo que las demás. Fig.

527 Se podria indagar en qué razon las velocidades varían, quando siendo una misma la luz, llega á variar el declivio. Nuestros esperimentos dán la resolucion de muchísimos casos particulares de esta cuestion. Sea *ADCB* el 222.
depósito; *ECFG*, el canal inclinado; *EN*, la altura correspondiente á la velocidad que el agua debería tener en el canal, en virtud del impulso inicial, y mas allá del punto de contraccion. Tírense las orizontales *EO*, *NK* que encuentren en *O* y *K* la vertical *GK*. La parte *OG* es lo que llamamos declivio del canal; pero como la velocidad inicial del agua en el canal no es cero, y esta velocidad corresponde á la altura *NE*; el movimiento del agua es el mismo que si el canal se prolongara hasta *V* donde la velocidad inicial sería cero, y si en la parte *VE* el agua no esperimentase rozamiento ninguno, ni otra resistencia qualquiera. Por consiguiente la cuestion propuesta se reduce á averiguar en qué ley varía la velocidad, quando varía la altura *KG*.

Sería mucha proligidad recorrer por menor todos nuestros esperimentos en orden á esta cuestion; ciñámonos á algunos, los primeros que nos ocurran: será facil aplicar á los demás lo que digéremos acerca de estos.

528 Considero primero los esperimentos XLV, XLVI, XLVII; y tomo las velocidades permanentes que podemos mirar como uniformes sensiblemente en toda la longitud *EG* del canal. La abertura es en los tres casos un rectángulo

Fig. que tiene 5 pulg. de base, y 1 pulg. de altura.

En el primer esperimento tenemos $EG = 105$ pies, $OG = 10\frac{1}{2}$ pies, y hallamos (463) $EN = 4,54$ pies $= 4$ pies $6\frac{1}{2}$ pulgadas, ó allá se vá. Luego $KG = 15,04$ pies $= 15$ pies 6 lineas, ó poco falta. Pero la fórmula (465) dá 3,496 pies, ó 3 pies 5 pulg. 11 lineas, ó allá se vá, para la altura correspondiente á la velocidad permanente con la qual el espacio EG es realmente andado. Esta altura es menor que KG, conforme se vé, en la razon de 3496 á 15040, ó de 1 á 4,30, con corta diferencia.

En el segundo esperimento tenemos $EG = 105$ pies, $OG = 10\frac{1}{2}$ pies, $EN = 2,978$ pies $= 2$ pies 11 pulg. 9 lineas, ó allá se vá, $KG = 13,478$ pies $= 13$ pies 5 pulg. 9 lineas, con corta diferencia; y hallamos 2,871 pies, ó 2 pies 10 pulg. 5 lineas, poco mas ó menos, para la altura correspondiente á la velocidad permanente con la qual el espacio EG es realmente andado. Esta altura es menor que KG en la razon de 2871 á 13478, ó de 1 á 4,69 con corta diferencia.

En el tercer esperimento tenemos $EG = 105$ pies, $OG = 10\frac{1}{2}$ pies, $EN = 1,416$ pies $= 1$ pie 5 pulg. con corta diferencia, $KG = 11,916$ pies $= 11$ pies 11 pulg. al poco mas ó menos; y hallamos 2,036 pies ó 2 pies 5 lineas, con corta diferencia, para la altura correspondiente á la velocidad con la qual el espacio EG es realmente andado. Esta altura es á KG, como 2036 es á 11916, ó como 1 es á 5,84.

Con-

529 Consideremos tambien los esperimentos LII, LIV, LVI, y tomemos siempre las velocidades permanentes. En los tres casos, la abertura es un rectángulo de 5 pulg. de base, y 2 pulg. de altura. Fig.

En el primero tenemos $GE = 600$ pies, $OG = 59,702$ pies $= 59$ pies 8 pulg. 5 lineas al poco mas ó menos, $EN = 1,53$ pies $= 1$ pie 6 pulg. 4 lineas al poco mas ó menos, $KG = 61,232$ pies $= 61$ pies 2 pulg. 9 lineas con corta diferencia; y sacamos 3,071 pies, ó 3 pies 10 lineas al poco mas ó menos, para la altura correspondiente á la velocidad con la qual el espacio EG es realmente andado. Esta altura es á KG, como 3071 es á 61232, ó como 1 es á 19,93, con corta diferencia.

En el segundo tenemos $GE = 600$ pies, $OG = 59,702$ pies $= 59$ pies 8 pulg. 5 lineas con corta diferencia, $EN = 0,749$ pies $= 9$ pulg. al poco mas ó menos, $KG = 60,451$ pies $= 60$ pies 5 pulg. 4 lin. ó allá se vá; y sacamos 2,604 pies, ó 2 pies 7 pulg. 3 lineas con poca diferencia, para la altura correspondiente á la velocidad con la qual el espacio EG es realmente andado. Esta altura es á KG, como 2604 es á 60451, ó como 1 es á 23,21, con corta diferencia.

En el tercero, el espacio que el agua ha andado no es mas que de 300 pies, pero si para comparar este esperimento con los dos antecedentes, doblamos el espacio andado, y doblamos tambien el tiempo que se ha gastado en andarle, tendremos $EG = 600$ pies, $OG = 59,702$ pies $=$

Fig. $= 59$ pies 8 pulg. 5 lineas con corta diferencia, $EN =$ 0,358 pies $= 4$ pulg. 2 lineas con corta diferencia, $KG =$ $60,06 = 60$ pies 9 lineas poco mas ó menos; y hallaremos 2,058 pies, ó 2 pies 8 lineas con corta diferencia, para la altura correspondiente á la velocidad con la qual el espacio EG es realmente andado. Esta altura es á KG como 2058 es á 60060, ó como 1 es á 29,45 con corta diferencia.

530 Resulta de todos estos cálculos que las alturas correspondientes á las velocidades dentro del canal no son entre sí como las alturas correspondientes KG. Se echa de ver que quanto mayor es la velocidad inicial EN, tanto menos la altura correspondiente á la velocidad del agua discrepa de KG; y esto es otra prueba de que, guardando la debida proporcion, el rozamiento es menos sensible quando es grande la velocidad, que quando es pequeña: esto confirma la hypótesi que hemos propuesto (268) acerca de la naturaleza de esta resistencia. Por consiguiente no sería exacto calcular en la práctica la velocidad de una corriente en virtud de su declivio. Esta velocidad se debe determinar por medio de un esperimento inmediato en cada caso particular.

531 Quando una corriente ha de mover una máquina hydráulica, y las circunstancias del terreno obligan á colocarla á alguna distancia del depósito, conviene inclinar el canal como la décima parte de su longitud, si se quiere que su inclinacion la restituya al agua la velocidad que el rozamiento destruye, y que la máquina reciba la mis-

ma

ma fuerza que si estuviera cerca del depósito. Fig.

532 Tambien se podria preguntar si la velocidad varía, quando manteniéndose la misma la altura *KG*, la capacidad del agugero crece ó mengua.

Consideremos, por egemplo, los esperimentos LIII y LIV, en los quales la altura *KG* es una misma, y las areas de los agugeros son entre sí como 1 á 2. Como en los movimientos uniformes las velocidades que se gastan en andar espacios iguales están (IV. 22) en razon inversa de los tiempos, se echa de ver que las velocidades permanentes en nuestros dos esperimentos, son entre sí como 48 á 58. Luego la velocidad crece sensiblemente quando el agugero crece. El mismo resultado se saca en todos los demás esperimentos.

533 Algunos Autores han afirmado que con aumentar el agugero, ó la cantidad de agua que entra en el canal, la velocidad ha de crecer á proporcion; de modo que, á su parecer, las velocidades han de seguir la razon de los gastos. Esta proposicion voluntaria es muy distante de la verdad, porque en el egemplo que acabamos de proponer, los gastos tienen uno con otro la razon de 1 á 2, siendo así que las velocidades tienen una con otra la razon no mas de 48 á 58, ó de 24 á 29.

534 En vista de los esperimentos precedentes, y de las reflexiones á que han dado motivo, qualquiera puede formar juicio del movimiento de las aguas por los aqueductos, conforme la longitud y declivio que tuvieren. Es muy conducente darles la mayor inclinacion que se pueda. Por lo común

Fig. mun se hacen de diferentes partes orizontales que ván bajando por escalones de una division á otra, porque se les hace mas facil á los oficiales trabajar en una linea de nivel que en una linea inclinada. Pero esta práctica es defectuosa. Para facilitarla al agua el que corra, y resguardarla mas del riesgo que corre de helarse en los tiempos frios, conviene dirigir el canal en cuesta en toda su longitud, practicando á trechos descansos ó depósitos de descarga donde se depositan las porquerías que el agua acarrea consigo, cuyos depósitos tambien sirven para secar el aqueducto quando es preciso repararle. Es tambien conducente hacer el aqueducto antes profundo que ancho, para que el agua se halle auxiliada de su propio peso para superar el rozamiento.

535 Concluiremos este asunto con decir algo de la presion que el agua hace en las paredes de un canal por el qual corre. Desde luego es evidente que como las paredes del canal le impiden al agua el estenderse orizontalmente en todas las direcciones, están comprimidas del peso del agua, y que en orden á esto cada punto es comprimido perpendicularmente con una fuerza proporcional á la altura del fluido que le corresponde. Fuera de esto, si la velocidad inicial comunicada al agua, sea por la presion del agua de un depósito, sea por una caida, llega á menguar por razon del rozamiento ú de otro obstáculo qualquiera, resultará de esta pérdida de velocidad una nueva presion en las paredes del canal. Es siempre facil valuar esta presion, porque es igual al exceso de la presion que causaría la velocidad que el agua de-

debería tener naturalmente, respecto de la presion que es Fig.
efecto de la velocidad efectiva del agua. De aquí se infiere el modo de proporcionar como conviene las aberturas laterales hechas á un canal ó aqueducto, quando se le quiere quitar parte de su agua.

Del curso de los Rios.

536 La investigacion de las leyes que sigue el movimiento de los rios, es un punto muy importante de la Hydráulica. Suelen ventilar, con motivo de averiguarlas algunos Autores el origen de los rios y manantiales, sobre cuyo asunto se han publicado varias opiniones. Nosotros dejaremos á un lado todas estas disputas para llegar quanto antes á lo que mas nos importa declarar.

Consideraciones generales acerca del movimiento de los Rios.

537 Nadie ignora que por *Madre* ó *Alveo* de un río se entiende aquel canal por donde corren sus aguas, cuyo canal puede ser regular ó irregular.

538 El *Alveo regular* de un rio es un canal cuyo fondo ó suelo es igual, sin eminencias notables, paralelo ó inclinado al orizonte; y las orillas son tambien planos, perpendiculares al suelo, é igualmente distantes una de otra.

539 El alveo es *irregular* quando carece de las circunstancias que caracterizan el alveo regular, y esto es lo mas comun, porque el suelo es desigual con varias eminencias y hoyos acá y acullá, y las orillas están inclinadas con des-

Fig. desigualdad, culebreando y formando recodos y senos, y no siendo siempre una misma la distancia que hay entre ellas.

540 Llamo *Seccion* natural de un rio la seccion comun de su corriente, y de un plano perpendicular al suelo de la madre, y á cada orilla del rio; y por ser variable esta seccion, se considera otra llamada *artificial*.

541 Por *Seccion artificial* de un rio entendemos aquella que concebimos hecha en un rio, cuyo suelo sea orizontal en la direccion de una orilla á otra, y las orillas sean paralelas entre sí, y perpendiculares al fondo; por manera que esta seccion es siempre un paralelogramo rectángulo.

542 La *Altura viva* de una agua corriente ó de la seccion es una linea perpendicular tirada desde la superficie del agua á la base de la seccion dispuesta de tal modo que, si cesára la corriente, no quedára en ella ninguna porcion de agua rebalsada ó *estagnante*.

543 La *Velocidad natural* del agua corriente es una fuerza que no proviene de ninguna causa esterior, en virtud de la qual puede una porcion determinada de agua andar un espacio determinado en un tiempo dado; y porque esta velocidad varía como la distancia á que están de la superficie las partes del agua, distinguiremos dos velocidades en las aguas corrientes.

544 Llamaremos la una *Velocidad máxima*, y será aquella con la qual algunas partes del agua pueden andar en un tiempo dado mas largo trecho que las demás, ó la que

ex-

excede á las demás velocidades que se verifican en la misma Fig.
perpendicular.

545 La otra la llamaremos *Velocidad media*, y es la que corresponde á alguna porcion de agua de una misma perpendicular, de tal calidad que si con ella corrieran las partes superiores é inferiores, pasaría por dicha perpendicular el mismo *cuerpo*, *golpe* ó cantidad de agua que pasa siendo desiguales las velocidades; ó es aquella respecto de la qual es tanto mayor la velocidad máxima quanto ella es mayor que la velocidad mínima.

546 *Estando un rio en un estado permanente, pasa en un mismo tiempo igual copia de agua por cada una de sus secciones, tomándolas en parages donde el rio, ni reciba aguas de otro, ni se le quite con sangrias la que llevaba.*

Porque si por una seccion inferior, por egemplo, saliese en un tiempo dado mas agua de la que pasa por la superior, no se mantendría el rio en el mismo estado de plenitud, y bajaría su superficie en el intervalo de una seccion á otra. Por el contrario, si saliese por la seccion inferior menos agua de la que viniere de la seccion superior, la superficie del agua se levantaría en el intervalo de una á otra. y no sería permanente el estado del rio, contra lo supuesto.

547 Luego *las velocidades medias absolutas en diferentes secciones de un mismo rio, en el supuesto de que sea permanente su estado, son recíprocamente como las mismas secciones.*

Porque si son iguales las velocidades y los tiempos,

ma-

Fig. mayor mole de agua correrá por una seccion mayor que por otra menor. Luego para que en tiempos iguales pase por las dos igual cantidad de agua, deberá llevar la velocidad del agua que corre por la seccion menor á la velocidad del agua que corre por la mayor, el mismo exceso que la area de esta lleva á la area de la primera. Luego serán entonces las velocidades medias recíprocamente como las secciones.

548 *Para que corra el agua de un rio no es necesario que su madre tenga algun pendiente, basta que su superficie sea mas alta que el nivel de la mar.*

Porque una masa qualquiera de agua que tiene libertad para esparramarse, se baja hasta que esté á nivel en toda su estension. Este nivel es parte de una superficie esférica ó esferoide, á la qual la direccion de la pesantez es perpendicular en todas partes. Verdad es que en el estado físico y actual de las cosas, los alveos de los rios están inclinados, por lo menos en la mayor parte de su estension. Pero sus diferentes inclinaciones y sinuosidades penden de la resistencia del fondo, y de los obstáculos que el agua encuentra en su curso.

123. 549 Sea *ADCX* un vasto depósito que suministra agua al rio *XCEF*. Se viene á los ojos que prescindiendo de los obstáculos, por hallarse las partículas inferiores del depósito comprimidas de las superiores, la velocidad de la partícula *C* será la misma que si dicha partícula hubiese caido de la altura *XC*, siendo así que la velocidad de la partícu-

cula X es infinitamente pequeña. Asimismo, las velocidades de las demás partículas que están á profundidades desiguales, son desiguales; cada una de estas velocidades es efecto de la altura vertical que la corresponde. A medida que el agua camina por el plano inclinado GE, la gravedad acelera la velocidad; por manera que tirando la orizontal HG, la velocidad en P es efecto de la altura HP, la velocidad en M es efecto de la altura HM; &c. Fig.

550 Síguese de aquí que el agua al apartarse del depósito ha de perder parte de su profundidad. Porque una vez que el rio se mantiene en un estado de permanencia, y por lo mismo pasa cada instante la misma cantidad de agua por dos secciones qualesquiera MP, VR, es evidente que siendo la velocidad en cada punto de VR, mayor que la velocidad en cada punto correspondiente de MP, la profundidad VR debe ser indispensablemente menor que la profundidad MP. Suponemos constante la latitud del rio.

551 Pero las profundidades MP, VR, bien que siempre desiguales entre sí, se acercarán tanto mas á la igualdad, quanto mas lejos del depósito se consideraren, porque en este supuesto las velocidades de las partículas discreparán siempre menos unas de otras. Con efecto, si llamamos respectivamente M, V, P, R las velocidades de los puntos M, V, P, R, tendremos $M : P :: \sqrt{HM} : \sqrt{HP} :: \sqrt{HM} : \sqrt{(HM + MP)}$, y $V : R :: \sqrt{GV} : \sqrt{GR} :: \sqrt{GV} : \sqrt{(GV + VR)}$; luego $\frac{M}{P} = \frac{\sqrt{HM}}{\sqrt{(HM+MP)}}$, y $\frac{V}{R} = \frac{\sqrt{GV}}{\sqrt{(GV+VR)}}$. Pero $\frac{\sqrt{GV}}{\sqrt{(GV+VR)}}$ es mayor que $\frac{\sqrt{HM}}{\sqrt{(HM+MP)}}$, ó $\frac{GV}{GV+VR}$ es mayor

 que

Fig. que $\frac{HM}{HM+MP}$, ó $GV \times HM + GV \times MP$ es mayor que $GV \times HM + VR \times HM$, ó $GV \times MP$ mayor que $VR \times HM$. por ser $MP > RV$, y $GV > HM$. Luego tambien $\frac{V}{R} > \frac{M}{P}$. Luego la velocidad V discrepa menos de la velocidad R que la velocidad M de la velocidad P. Pero si la velocidad fuese constante en cada profundidad, cada una de estas mismas profundidades se mantendria constante. Luego una vez que las velocidades ván siempre variando menos al apartarsé del manantial, deben tambien las profundidades ir variando siempre menos; ó lo que es lo mismo, deben ir acercándose siempre á la igualdad.

552 Esto basta para formar en general juicio del movimiento de los rios. Pero muchas causas se oponen á que todo suceda conforme hemos declarado. Estas causas son las desigualdades del suelo, las sinuosidades del alveo, las variaciones que padece en su latitud, el rozamiento con las orillas; en suma, los obstáculos de toda especie con que el agua tropieza, y que interrumpen su curso natural. De todo esto es preciso que resulten muchas variaciones en la velocidad de la corriente. Muchas veces á una distancia considerable del manantial, y en sitios mucho mas bajos, la velocidad es menor que en el origen, siendo así que, prescindiendo de los obstáculos, debería ir creciendo mas y mas. Se combina continuamente de distinto modo el movimiento primitivo con el que proviene á cada instante de la altura viva y actual del agua. En los parages angostos y profundos, la velocidad primitivamente adquirida llega á ser nula ó co-

mo

mo nula en comparacion de la que es efecto de la altura vi- Fig.
va del agua. Pero en los parages anchos donde el agua tiene poco fondo, casi todo el movimiento del fluido es efecto de la velocidad antecedentemente adquirida. Sea la que fuere la causa del movimiento del fluido, la resistencia de los obstáculos desnaturaliza incesantemente su movimiento. El punto de la mayor velocidad está muy pocas veces en el fondo; algunas veces está en la superficie. Pero por lo comun está á la mitad de la profundidad: no se le puede señalar lugar determinado. Su situacion pende de la resistencia del fondo combinada con las fuerzas activas que causan el movimiento del fluido.

553 En virtud de todo esto se echa de ver que no es posible sugetar á un cálculo exacto y riguroso el movimiento de los rios atendidas todas sus circunstancias. Sin embargo, no perjudicará manifestar como se podria determinar, si fuese conocida la ley en virtud de la qual la resistencia de los obstáculos detiene cada partícula.

Sea *XCEF* el corte vertical y longitudinal de un rio 124.
cuya agua sale del depósito *AXCD*. Suponemos que cada partícula esperimenta una resistencia proporcional á una potencia dada de su misma velocidad; hemos de determinar esta velocidad.

Despues de prolongada la orizontal *AX*, tírese perpendicularmente á la direccion de la corriente, la linea *KQ*; y consideremos en la porcion *TQ* de esta linea la parte infinitamente pequeña *Mm*. En los puntos *T*, *M*, *Q* levántense

 las

Fig. las verticales *TS*, *ML*, *QH*. Supongamos que representando *ML* la presion que esperimentaría el punto *M* en virtud de la gravedad del agua, en la misma profundidad *ML*, la linea *OR* represente la resistencia que esperimenta el punto *T*, puesto en la superficie del agua, en virtud del rozamiento con el fondo y las orillas. Esto supuesto,

Sean
- *KT* .... $= a$
- *TS* .... $= b$
- *KM* .... $= x$
- y por consiguiente *ML* .... $= \frac{bx}{a}$
- *OR* .... $= c$
- La altura correspondiente á la velocidad del punto *T* .... $= h$
- La altura correspondiente á la velocidad del punto indeterminado *M* .... $= y$
- El esponente de la velocidad, á la qual la resistencia es proporcional ...... $= n$.

Si en lugar de las velocidades tomamos las raices quadradas de las alturas que las corresponden, y hacemos la proporcion $h^{\frac{n}{2}} : y^{\frac{n}{2}} :: c$: un quarto término, este quarto término $\frac{cy^{\frac{n}{2}}}{h^{\frac{n}{2}}}$ será, por las condiciones de la cuestion, la resistencia que padece el punto *M* por parte del rozamiento. Pero si no fuera por el rozamiento, el punto *M* se movería como si hubiese caido de la altura *ML*, ó como si esperimen-

mentase la presion $\frac{bx}{a}$. Restando de esta fuerza la resistencia, Fig. la resta $\frac{bx}{a} - \frac{cy^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}$ será la fuerza que impele actualmente el punto M. Por consiguiente la espresion de la fuerza absoluta que impele el agua al paso por el orificio Mm es $Mm \times \left(\frac{x}{a} - \frac{cy^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}\right)$; cuya fuerza es proporcional á la cantidad de movimiento que causa. Pero la corta cantidad de agua que pasa cada instante por Mm está en razon compuesta del orificio Mm, y de la velocidad; luego la espresion de la cantidad de movimiento engendrado será $Mm \times \sqrt{y} \times \sqrt{y}$ ó $Mm \times y$. Tendremos, pues, la equacion $Mm \left(\frac{bx}{a} - \frac{cy^{\frac{n}{2}}}{b^{\frac{n}{2}}}\right) = Mm \times y$; de donde se saca $bn(bx - ay)^2 = a^2c^2y^n$.

Para hacer uso de esta equacion, se medirá, por alguno de los medios que propondremos mas adelante, la velocidad en la superficie del agua, y se sacará el valor de b; se medirán tambien las lineas KT, KQ, TS, QH. La linea OR ó c se determinará, considerando que si hacemos $x = a$, será $y = b$; con esto la equacion precedente se transformará en $(b - b)^2 = c^2$ ó $c = b - b$. Estará por lo mismo determinado quanto se necesita para saber qual es la altura y correspondiente á un punto dado M en la recta TQ.

Quando $n = 1$, la equacion que dá y es del segundo

Fig. grado; si $n = 2$, la equacion es del primero; si $n = 3$, la equacion es del tercero &c.

554 No nos detendremos en especificar por menor las consecuencias particulares que pueden deducirse de estas equaciones; porque no podemos menos de confesar que no sacaríamos otro fruto que ofrecer al entendimiento verdades puramente especulativas. Aunque estas verdades son importantes de suyo; sin embargo, como nuestra mira principal es sentar proposiciones que se puedan aplicar á los casos que ocurren, nos ceñiremos á las cuestiones que pueden ser provechosas para la práctica. Quando no admitieren resoluciones rigurosas, las resolveremos físicamente, esto es, de un modo algo vago, pero bastante para lo que pueda ocurrir.

555 La superficie de un rio no siempre está á nivel desde una orilla á otra, y la corriente suele estar mas ó menos alta ácia el medio que ácia las orillas, segun las circunstancias. El primer caso se verifica quando el rio no tiene un curso libre, y llega á crecer mucho, sea con motivo de disolverse las nieves; sea por el *aflujo* ó union de otro rio ó de algun torrente. Como las aguas que están ácia las orillas del rio padecen mas atraso por causa del rozamiento que las aguas del medio, guardan estas por consiguiente mayor parte de la velocidad inicial que las demás. Pero en virtud de los menoscabos recíprocos de velocidad, que tienen estas diferentes aguas, se comprimen lateralmente unas á otras (441 y 535); y como suponemos que la superficie

del

del rio se mantiene en un estado permanente, las presiones Fig.
de que estamos hablando se equilibran mutuamente. Luego allí donde es menor el menoscabo de velocidad, debe corresponder la mayor altura de nivel, á fin de que el exceso de una altura respecto de otra, cause una velocidad que tambien es destruida en parte, y que con esto dá motivo á una nueva presion, la qual se añade á la presion procedente de la altura comun de nivel, por manera que la suma de estas dos presiones es igual á la presion del agua de las orillas. Por consiguiente el rio debe formar ácia el medio de su madre una curva convexa; la abscisa de esta curva suele ser en algunas ocasiones de 2 ó 3 pies.

556 Puede suceder al reves, que un rio suba mas arriba en las orillas que en el medio, quando encuentra algun obstáculo en su curso. Por egemplo, si un rio desagua en un mar que tenga flujo y reflujo, es evidente que al tiempo del flujo, por tener el agua de los bordes del rio menos velocidad que la del medio, el agua del mar la rechazará mas facilmente que á esta última; por consiguiente subirá mayor cantidad de agua del mar á lo largo de las orillas del rio que en el medio. En virtud de este aumento de agua en las orillas, el rio podrá llegar allí á mayor altura que ácia el medio. Muchas veces se forman en el rio dos corrientes muy distintas que siguen direcciones encontradas; la una en el medio, que se encamina al mar, la otra ácia las orillas que se encamina rio arriba.

557 En todos los rios se reparan frecuentemente mo-

Fig. vimientos ácia direcciones encontradas. Esta contrariedad de movimientos pende de los obstáculos con que el agua tropieza. Ya hemos reparado (468) que el agua puede moverse cerca del fondo con un movimiento contrario al movimiento con que se mueve cerca de la superficie. Estos movimientos encontrados no siempre son muy reparables; pero causan por lo menos lo que algunos llaman *aguas muertas*, esto es, aguas que no corren como lo demás del rio, y en ellas suelen verse aquellos remolinos de los quales salen con bastante dificultad los barcos que en ellos se meten.

558 Se repara constantemente que quando le ha de sobrevenir una creciente á un rio, el agua del fondo corre con mas rapidez de lo que suele. Proviene este fenómeno de que el peso de las aguas superiores se hace perceptible de mano en mano en un trecho largo, por cuyo motivo crece la carga del fondo, y es preciso por lo mismo que tambien crezca la velocidad.

559 Quando el alveo de un rio llega á angostarse, la profundidad crece por precision. Resulta de aquí mayor carga de agua sobre el fondo, y por consiguiente un aumento de velocidad desde la superficie al suelo. Importa conocer en algunas ocasiones, á lo menos con corta diferencia, la variacion que resulta en la profundidad de un rio, de la mudanza que padece la estension de su madre. Esta cuestion es de suma utilidad, particularmente quando se ha de construir algun puente. Por lo mismo nos detendremos en resolverla.

560 Para mayor brevedad supongamos que la madre

del

del rio sea un canal rectangular, y prescindamos de todas las resistencias. Sea el rectángulo *ACDB* el corte vertical del rio, hecho desde la una orilla á la otra. Despues de levantada la vertical indefinita *KN*, supongamos que la velocidad en la superficie *AB* sea efecto de la altura *OM*. Una vez que prescindimos de todas las resistencias, la velocidad de un punto qualquiera *R* ó *K* será efecto de la altura correspondiente *MR* ó *MK*; y el agua del rio correrá del mismo modo que si saliera por la luz *ACDB* del depósito *aCDb*, si este se mantuviera constantemente lleno á la altura *MK*. Supongamos ahora que despues de angostado el paso del agua con los arcos de la puente, el rio corra por la luz rectangular *EFGH* cuya base *FG* es conocida. Sea *IN* la altura correspondiente á la velocidad del agua en la superficie *EH*. El agua correrá en este supuesto como si saliera por la luz *EFGH* de un depósito *fCDg*, suponiéndole constantemente lleno á la altura *NK*. Fig. 125.

Sean
- *CD* . . . . $= c$
- *MK* . . . . $= H$
- *MO* . . . . $= h$
- La cantidad de agua que sale en un tiempo t por la luz *ACDB* . . . . $= Q$
- *FG* . . . . $= c'$
- *NK* . . . . $= H'$
- *NI* . . . . $= h'$
- La cantidad de agua que sale en el tiempo t por la luz *EFGH* . . . . $= Q'$

Lla-

Fig. Llamemos, á mas de esto, t' el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer de la altura dada a.

Todo esto supuesto, hallaremos (149) $Q = \frac{4tc(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})\sqrt{a}}{3t'}$, $Q' = \frac{4tc'(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'})\sqrt{a}}{3t'}$. Pero $Q' = Q$; tendremos, pues, $c(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}) = c'(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'})$.

561 Lleva esta equacion dos incógnitas, es á saber H' y h'. Supongamos que la velocidad de la superficie sea nula en ambos casos, conforme se verifica sensiblemente muy amenudo; tendremos $h = 0$, $h' = 0$, y la equacion se transformará en $cH\sqrt{H} = c'H'\sqrt{H'}$. De donde sacaremos $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$; quiero decir, que *la profundidad del rio antes de construir la puente es á su profundidad mas arriba de la puente despues de construida, como la raiz cúbica del quadrado de la suma de la latitud de los arcos es á la raiz cúbica del quadrado de la latitud del rio.*

562 Quando las alturas h y h' no son nulas, han de ser proporcionales, sensiblemente por lo menos, á las alturas H y H', quiero decir que $h : h' :: H : H'$, y por lo mismo $h' = \frac{H'h}{H}$. Substituyendo este valor de h' en la equacion general $c(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}) = c'(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'})$, y dividiéndolo todo por $H\sqrt{H} - h\sqrt{h}$, hallaremos $cH\sqrt{H} = c'H'\sqrt{H'}$, y $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Luego ya que tenemos $H : H' :: h : h'$, y por consiguiente $H - h : H' - h' :: H : H'$, tendremos $H - h : H' - h' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Pero $H - h$ y $H' - h'$ espresan las profundidades del rio en ambos casos; luego están tambien estas profundidades en la razon dicha (561).

Si

563 Si no se quisiera seguir el supuesto de antes (560), es á saber, de que las velocidades de los diferentes puntos del agua son proporcionales á las raices de las alturas correspondientes; y se supusiera que por razon del rozamiento la altura correspondiente á la velocidad media del agua quando pasa por la luz *ACDB*, es la recta dada *OS*, y que la altura correspondiente á la velocidad media del agua quando pasa por la luz *EFGH* es la recta *IT*, no sería mas dificil de resolver la cuestion. Porque con llamar *AC*, b; *CD*, c; *SO*, H; *EF*, b'; *FG*, c'; *IT*, H', es evidente que por ser las mismas las cantidades de agua que salen en un mismo tiempo por las dos luces *ACDB*, *EFGH*, tendríamos la equacion $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$; y porque consideramos como dada la ley, segun la qual los puntos *S*, *T* están colocados en las alturas *KO*, *KI*, sacaríamos otra equacion; estas dos equaciones servirian para determinar las dos cantidades incógnitas H' y b'. Fig.

Por egemplo, quando los puntos *S*, *T* están colocados del mismo modo en las rectas *KO*, *KI*, tenemos $H : H' :: b : b'$; y por consiguiente $b' = \frac{H'b}{H}$. Substituyendo este valor de b' en la equacion $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$, sacaremos $bcH\sqrt{H} = bc'H'\sqrt{H}$, y $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Luego tambien $b : b' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Por consiguiente las profundidades b y b' están tambien en este caso en la razon hallada.

En todos estos cálculos hemos supuesto que la madre del rio fuese un canal rectangular, cuya circunstancia se verifica pocas veces. Pero siempre será facil de modificar nues-

Fig. nuestra teórica, conforme exigiere la variedad de los casos, y de aplicarla siquiera al poco mas ó menos, segun las ocurrencias, á las cuestiones que pueden ofrecerse en la práctica.

Consideraciones físicas acerca del modo con que los Rios forman sus alvéos.

564 Qualquiera se hará cargo de que el agua de un rio frotando con el fondo y las orillas, arranca indispensablemente alguna tierra que la corriente lleva consigo. Por consiguiente el rio debe ensancharse y ahondarse. Este ensanchamiento y *ahondamiento* durarán todo el tiempo que la fuerza del agua no encontrare alguna resistencia que la aniquile. Pero como el alveo al paso que se ensancha pierde poco á poco su pendiente, la velocidad primitivamente adquirida mengua por lo comun por causa de los recodos de la madre, ú otros obstáculos; al contrario, á mayor profundidad tienen las tierras mas adherencia; de aquí proviene finalmente que la fuerza de las aguas, y la resistencia de las tierras forman sensiblemente equilibrio. Si para turbar este equilibrio se pone algun obstáculo en el rio, la fuerza del agua luchará con este obstáculo, y hará por restablecer el primer equilibrio. Los rios deben dejar primero de ahondarse que de ensancharse; porque hay dos causas, es á saber, la tenacidad del fondo, y la diminucion de la velocidad, que contribuyen para minorar ó impedir del todo el ahondamiento, siendo así que por lo contrario la diminucion del pendiente, y de la velocidad aumentan la profundidad del agua,

y

y por consiguiente tambien la presion y el rozamiento que Fig.
de ella resulta con los bordes, cuya presion intenta llevarse las tierras, ó hacer que se desmoronen y caygan en el rio. Esta es la razon porqué, siendo todo lo demás igual, los rios que corren por madres de materias homogeneas y de corta consistencia, son mucho mas anchos que profundos.

565 No todos los rios forman sus alveos del mismo modo; porque es cierto, por egemplo, que una misma corriente caba y se lleva mas facilmente un fondo de arena que un fondo de greda ó cascajo. Pero supongamos que la fuerza del agua y la resistencia del terreno sean dadas, y veamos el efecto cabal que debe resultar de la combinacion de estas dos fuerzas. Concibamos con esta mira muchos planos de igual longitud y distinta inclinacion respecto del orizonte. Supongamos despues un cuerpo grave que se mueva por ellos succesivamente. El principio de la resolucion de las fuerzas está diciendo que la pesantez relativa de dicho cuerpo será tanto mayor quanto mas se acercare á la direccion vertical el plano por el qual se mueve. Si nos figuramos ahora que los planos propuestos están empedrados de puntas que se oponen al movimiento del cuerpo, es constante que para comunicar á este cuerpo una cantidad *dada* de movimiento, se le deberá añadir á la pesantez relativa una fuerza estraña tanto mayor quanto menor fuere la gravedad relativa, ó quanto mas se acercare á la direccion orizontal el plano por el qual el cuerpo se mueve. Es, pues, tanto mayor, siendo todo lo demás igual, la resistencia de

los

Fig. los obstáculos que hay en los planos, quanto mas se acercan los planos á la direccion orizontal. Lo mismo sucede con la resistencia del terreno que forma el alveo del rio. Quanto mas se acerca el alveo á la direccion orizontal, tanto mayor es su consistencia. La fuerza de la corriente y la resistencia del terreno no cesan de luchar una con otra, y no se ponen en equilibrio hasta que la diminucion del pendiente hace que la segunda fuerza sea igual con la primera.

566 Síguese de aquí que, siendo siempre dada la resistencia del terreno, quanto mayor fuerza tuviere la corriente, tanto menor será el declivio del rio; porque con una misma inclinacion, el terreno se resiste mas á una fuerza menor que á otra mayor. Así, en creciendo la fuerza del agua, debe menguar el declivio para que se forme el equilibrio entre la fuerza de la corriente, y la resistencia del terreno. Como la velocidad del agua cerca del fondo pende por lo comun mas de la presion del agua superior que del movimiento antecedentemente adquirido, quanto mas profundo fuere un rio, menos declivio tendrá. Si llevare en todas partes la misma cantidad de agua, se podrá considerar como rectilineo en un corto trecho; pero en un trecho grande, dicho fondo es realmente una espiral, cuyas tangentes forman en todas partes ángulos iguales con las perpendiculares correspondientes tiradas desde el centro de la tierra que es el centro de la espiral. Esta espiral es tanto mas parecida á un círculo, quanto mas se acercaren al valor del ángulo recto los ángulos formados por las tangentes y las

per-

perpendiculares. Quando la cantidad del agua del rio crece, sea por razon de la lluvia, sea por la disolucion de las nieves, sea por el aflujo de otro rio ó de algun torrente, la fuerza de la corriente crece, y por consiguiente el suelo se vá poniendo mas y mas orizontal. Esta es la razon principal porqué quando muchos rios se juntan, el declivio del alveo comun es menor que el de los alveos particulares de los mismos rios antes de juntarse. Fig.

567 Hemos visto (549) como prescindiendo de los obstáculos, la velocidad crecería sin cesar en virtud de la pesantez y del declivio. Supongamos aquí que esta aceleracion subsiste, en parte por lo menos, en una estension determinada del alveo, á pesar de la resistencia del terreno que obra contra ella. Como es una misma la cantidad del agua, y crece la velocidad, la fuerza de la corriente tambien crecerá. Por consiguiente irá siempre menguando el declivio; será el menor posible, quando la aceleracion de la velocidad fuere la máxima posible. Si hay, pues, dos rios que aceleren su curso de un mismo modo en virtud del declivio, pero que sean de masas desiguales, el mayor tendrá menos declivio que el otro. Mientras la aceleracion dura, el fondo del rio debe formar una curva cóncava cuyas tangentes forman con las perpendiculares correspondientes, tiradas desde el centro de la tierra, ángulos que ván siendo siempre mayores, al paso que se apartán las aguas del origen de la aceleracion. Pero en cesando la aceleracion, y llegando la velocidad á un estado uniforme, el fondo se vá poniendo

sen-

Fig. sensiblemente rectilineo, ó forma la espiral de que se habló antes (566).

568 Quando un rio tiene por sí, y sin el auxilio de ningun pendiente, bastante fuerza para corroer el fondo, este fondo será indispensablemente orizontal. Porque si se supusiera que tuviese algun pendiente, este pendiente aumentaría la velocidad, y por consiguiente la fuerza de la corriente. Pero en su primer estado la corriente podia, por hypótesi, corroer el fondo; luego habiendo crecido su fuerza, será todavia mas poderosa para obrar el mismo efecto, y hacer por consiguiente orizontal el fondo. De aquí se infiere que si la fuerza del agua llega á crecer, la excavacion crecerá, pero no por esto habrá alteracion ninguna en la situacion orizontal del fondo.

Sea, por egemplo, *AEBD* el corte vertical y longitu-
126. dinal del rio en un sitio propuesto, cuyo fondo orizontal es *EB*. Supongamos que mas allá del punto *B* llegue á crecer la fuerza de la corriente, sea porque se angoste el alveo, de donde resulta forzosamente un incremento de altura y velocidad, sea por juntársele mas agua al rio &c. Es evidente que adquiriendo el agua mas fuerza corroerá el fondo, y obrará para ponerle orizontal. Primero corroerá el ángulo *HBC*, y el fondo tomará el declivio *HC*; despues la fuerza de la corriente auxiliada del pendiente *HC*, obrará para darle al fondo la posicion *MCG* que es orizontal, ó por lo menos casi orizontal. Digo *casi orizontal*; porque es de notar que hallándose la masa de aguas *AEBD* sos-

sostenida por la masa *DFGC*, quando el fondo *EB* baja á *MC*, la superficie *AD* del agua no se puede bajar sin que las aguas *DFGC* recaygan un poco sobre las aguas *AEBD*, y mengue por lo mismo la velocidad de la corriente. Pero esta diminucion de velocidad podrá estorvar que la corriente tenga bastante fuerza para poner enteramente orizontal el suelo. Puede, pues, suceder que un rio que tiene por sí bastante fuerza para mantener orizontal su fondo, en juntándosele otro rio, pierda parte de dicha fuerza, y necesíte pendiente; pero este pendiente jamás es efecto de la elevacion del suelo; es efecto de una escavacion real. Si suponemos que *EC* la represente; es evidente que si corta *BE* en *E*, el rio habrá adquirido otra vez en el mismo punto *E* su altura viva primitiva, y la fuerza suficiente para poner orizontal su fondo. El pendiente *EC* irá menguando, si el rio *AEBD*, en las inmediaciones del confluente, se angostare por razon del obstáculo que le opone el rio afluente, porque creciendo entonces la altura del agua, el movimiento perdido al encontrar el obstáculo, se halla mas compensado ó resarcido por la presion del agua y el aumento de la masa. Fig.

569 Sea *AD* un rio que no tenga mas fuerza que la suficiente para mantener su fondo *CD* en una situacion orizontal. Supongamos que despues de llegado dicho rio á *D* se ensanche ó divida en muchos brazos, de modo que no tenga mas que *BE* de profundidad. Yá que la fuerza del agua, siendo *AC* su altura, basta y nada mas para mantener ori- 127.

Fig. zontal el fondo, es evidente que la fuerza del agua, quando fuere *BE* su altura, no podrá causar el mismo efecto. De donde se sigue que si el rio llevare materias estrañas que la corriente en *D* no pueda ó sostener ó llevarse, se formará sobre *DG* el banco *DEFG* cuya parte superior *EF* está en pendiente. Como la cara *DE* no se puede sostener á plomo, el ángulo *E* se perderá y se formará al rededor del punto *D* el *contradeclivio HL* que por una parte remata en el fondo orizontal *CH*, y por la otra, en el declivio *EF.* Se echa, pues, de ver que se podrá formar en *D* un banco sin que la fuerza del agua *AH* mengue, y sin que la parte *CH* del fondo dege de ser orizontal.

Es de reparar que como mengua la fuerza del agua mientras se forma el contradeclivio *HL*, la superficie del agua debería entonces levantarse; pero como si se levantára, volvería á caer sobre *AB*, le es mas facil ensancharse, y corroer las orillas. Así, el agua sin levantarse sensiblemente, ensancha el alveo á medida que el contradeclivio se vá formando. Este ensanchamiento del alveo se efectúa en toda la longitud que corresponde el contradeclivio *HL*; despues se forma en *L* el declivio *LF*, y como se mantiene una misma la altura del agua, la latitud se queda la misma.

570 Hemos visto (566) como dada la resistencia del terreno, quanta mas fuerza tiene la corriente, menos declivio tiene el rio. Es evidente por el mismo principio que dada la fuerza de la corriente, quanto mayor fuere la tenacidad ó resistencia del terreno de que se compone el sue-

lo,

lo, tanto mayor pendiente tendrá el rio. De aquí proviene que los rios cuyo fondo se compone de greda ó tova, tienen mas pendiente que aquellos cuyo fondo es de arena ó légamo. Quando el fondo de un rio se compone de una materia (pongo por caso, de peña) que el agua no pueda corroer, el declivio se queda siempre el mismo, ó por lo menos, mengua muy poco con el discurso del tiempo. Esta es la razon porqué las cataractas que interrumpen la continuacion del alveo de un rio, duran siglos enteros sin esperimentar alteracion sensible. Suponemos que el declivio del fondo no permite á las materias estrañas mezcladas con el agua el amontonarse y detenerse. Si el suelo de un rio no opusiere en todas sus partes una misma resistencia, mudará de declivio á proporcion de la resistencia; se formarán en él recodos, gargantas &c. Fig.

571 Supongamos que el suelo de un rio se componga de partes separadas unas de otras, como son las piedras, el cascajo &c. El declivio será tanto menor quanto menor fuere la gravedad específica de dichas partes; porque quanto menor fuere el peso de estas partes, tanto menor resistencia le opondrán al agua, y por consiguiente tanta mas fuerza tendrá el rio para escavar el suelo, y ponerle orizontal. Fuera de esto, pueden las mismas partes por razon de su figura oponer mas ó menos resistencia al impulso del agua; de aquí deben resultar tambien variaciones en el pendiente. Los rios que corren por entre montes, ó cuyo suelo es de peña, deben tener y tienen con efecto mas declivio que los

Fig. rios que corren por las llanuras, porque el fondo de estos es por lo comun arenoso. Como los mas de los rios en la parte superior de su curso tienen su alveo lleno de piedras grandes, y estas piedras ván menguando de tamaño á medida que el rio se aparta de su origen, se echa de ver que en los rios que corren por un suelo pedregoso, el suelo debe formar una curva cóncava que, al irse apartando del origen, forma ángulos siempre menores con el orizonte. Es tambien evidente que si un rio se mueve por entre montañas sobre un suelo pedregoso, y despues en la llanura, el suelo fuese de una arena uniforme en todas partes, el suelo total se compondrá de dos curvas, la una cóncava y la otra convexa, que se unen &c.

572 Ya hemos insinuado que el agua lleva consigo por lo comun materias estrañas. Con efecto, no hay rio ninguno cuyas aguas sean perfectamente puras, y que dege de llevar algun cuerpo estraño, como piedras, cascajo, tierra, pedazos de raices, trozos de madera, &c. Entre estas materias unas son de una gravedad específica mucho mayor que la del agua, y se ván al fondo; otras tienen la misma pesantez específica que el agua, y se mezclan é incorporan con ella, de modo que se pueden considerar como que no forman mas que una sola y misma masa con el agua; otras nadan. Finalmente, las hay que, bien que tengan una gravedad específica algo mayor que la del agua, se mantienen elevadas, y las sostiene un cierto impulso de la corriente, combinado con la viscosidad del agua; pero quando

do llega á menguar la fuerza de la corriente, se ván abajo Fig.
á impulsos de su pesantez natural. Qualquiera percibirá que segun los parages donde se depositan las diferentes materias de que estamos hablando, deben resultar muchas variaciones muy reparables en la profundidad, la latitud y la direccion de la madre.

573 Supongamos un rio que por su propia fuerza, 128.
combinada con la resistencia del terreno, se formaría el fondo *AB*; y que á este fondo le cubra el triángulo *ABC* de la misma materia que él. Es evidente que corriendo el agua por el fondo *CB* tendrá fuerza para escavarle; pero como la escavacion no se puede hacer en un instante, supongamos que en el tiempo que el fondo gasta en llegar desde *CB* á *DB*, el rio reciba por alguna causa, pongo por caso, por juntársele un torrente, quanta materia es menester para poner otra vez el fondo en *CB*. Prosiguiendo la misma fuerza de la corriente, escavará otra vez, y llevará el pendiente á *DB*. En el discurso de esta operacion sobrevendrá nueva materia que intentará volver á poner el declivio en *CB*; el agua escavará otra vez, y volverá á poner el declivio en *DB*, y así prosiguiendo. Es, pues, evidente que la escavacion nunca llegará á *AB*, sino á *DB* no mas. El fondo siempre estará como en movimiento entre los dos pendientes *CB*, *DB*. Esto manifiesta que si un rio corre por un fondo que se resiste á la escavacion, y esta escavacion para que llegue al punto que pide la fuerza de la corriente combinada con la resistencia del terreno, requiere un tiempo determinado; si despues

Fig. se supone que antes de concluirse le llega al rio nueva materia; el mismo rio no cesará de escavar su suelo; y se podrá considerar el fondo como sentado entre dos términos, de los quales el uno corresponde á la altura máxima que la nueva materia puede ocasionar, el otro á la profundidad máxima á que ha llegado efectivamente la escavacion.

Es digno de notarse que de crecer el rio y bajarse el alveo resultan variaciones en la fuerza de la corriente, bien que sin embargo la cantidad de materia que acarrea, en el tiempo de la avenida, por medio del declivio grande *CB*, sea igual á la cantidad de materia que acarrea en el tiempo de las aguas bajas, por medio del corto declivio *DB*. Pero en todo esto se puede tomar un término medio arismético, en el qual los excesos compensan los defectos, y suponer que las escavaciones son proporcionales á los tiempos en que se hacen.

574 Como la cantidad de materia que lleva al rio un torrente afluente, es mayor ó menor conforme el torrente está mas ó menos lleno, síguese con evidencia de lo dicho (573), que, siendo todo lo demás igual, quanto mas tiempo se pasare entre dos avenidas consecutivas del torrente, tanto menos declivio tendrá el rio. Asimismo, como las avenidas del torrente llevan tanta mas materia al rio, quanto mayores son y mas duran, el rio tendrá tanto menos pendiente, quanto menores y mas cortas fuesen las avenidas. Pero por otra parte, como un rio tiene tanta mas fuerza para escavar su alveo, quanto mayor es su avenida, y quanto mas dura, tendrá tanto menos declivio quanto

ma-

mayor fuere su avenida, y quanto mas durare. Y como la avenida del rio pende así en la cantidad como en la duracion, de la avenida del torrente; y la primera hace una escavacion mayor, siendo así que la segunda hace un relleno mayor, hemos de indagar como estas dos causas se contrapesan recíprocamente, para poder apreciar el efecto y la cantidad de la que vence. Fig.

575 Quando un río reciba de un torrente afluente tal cantidad de tierra ó arena, que no pueda incorporarse con el agua, esta materia estraña se bajará al suelo, y le hará levantar. Pero en cesando el curso del torrente, la corriente del rio arrancará y se llevará la materia depuesta. Si para causar este efecto se necesitare mas tiempo que el que media entre dos afluencias consecutivas del torrente, el fondo del rio no se podrá reducir al pendiente menor que requieren la fuerza del agua y la resistencia del terreno; pero este fondo se formará entre dos términos de los quales el uno es el que corresponde á la corrosion máxima que puede hacer el agua del rio, el otro es el que corresponde á la elevacion máxima que puede causar la materia que el torrente lleva. Todo esto es evidente por lo dicho hasta aquí.

576 Estas son las leyes generales que siguen los rios en su pendiente. Indaguemos ahora lo que pertenece á la direccion de sus alveos.

Todo movimiento es (IV. 16) esencialmente rectilíneo, y un mobil no se desvia de esta direccion sino quando

Fig. se halla obligado de alguna causa esterior. Por consiguiente los rios se encaminarian á su paradero en linea recta, si no encontráran obstáculo ninguno; pero la resistencia desigual del terreno, los depósitos que forman las materias que el agua acarrea, los obstáculos naturales ó artificiales con que el agua tropieza, ocasionan en el suelo y las orillas recodos y sinuosidades de todas castas.

129. 577 Sea *ACDEB* el corte latitudinal de un rio rectilineo. Supongamos que la materia del terreno sea de resistencia desigual, que la resistencia mayor esté en la parte *DE*, y la menor en la parte *CD*. Concibamos que el alveo se haya formado primero en dicho parage, sea con la escavacion, sea con los depósitos de las materias estrañas que el agua acarrea. Esto supuesto, ya que la fuerza de la corriente es la misma en *CD* y *DE*, y la parte *DE* resiste mas que la parte *CD*, es evidente que si la fuerza de la corriente no fuera mas que la que basta para impedir que las nuevas materias que el agua acarrea se depongan, y la resistencia de la parte *DE* fuera la que basta no mas para impedir la escavacion, es evidente, digo, que la parte *DE* no se podrá encetar, y que la parte de menos resistencia *CD* cederá, y se ahondará; con menos pendiente le bastará para impedir la separacion del terreno. Supongamos, pues, que el agua escave hasta *FD*; siendo ahora *FG* la altura del agua en este sitio, su velocidad crecerá y tendrá mas fuerza para escavar. En el tiempo que se hace esta escavacion, es preciso que la altura del agua mengue en *HI* una cantidad

cor-

correspondiente á la parte *CDF* que es el aumento que le Fig.
sobreviene á la seccion del rio; porque de otro modo las partes de la masa ó cuerpo de agua dejarian de estar contiguas. Pero por lo supuesto, la velocidad primitiva en *I* era la que bastaba no mas para impedir los depósitos de las materias estrañas; luego esta velocidad despues de su decremento yá no podrá causar el mismo efecto. El fondo *DE* se levanta, pues, á *DK*; y la nueva seccion del rio es *ACFDMKB*. La mayor velocidad del agua será ácia la orilla *AC*. Luego esta orilla será forzosamente corroida, siendo así que al contrario la orilla *EB* apartándose mas y mas del filon del agua recibirá los depósitos de las materias estrañas. Por consiguiente el rio perderá allí su direccion rectilinea.

578 Si la seccion latitudinal de un rio estuviere formada así en latitud como en profundidad, en un terreno uniforme, y tuviere la figura de un paralelogramo rectángulo cuyos lados sean verticales; esta seccion no padecerá ninguna alteracion por parte de la corriente mientras fuere pura; pero si se mezclaren con el agua del rio materias estrañas por alguna causa, sea la que fuere, las orillas padecerán indispensablemente una corrosion, y el suelo se irá inclinando desde las orillas ácia el medio de la seccion. Con efecto, sea *BDFC* la seccion del rio propuesto. Todo el 130.
tiempo que no crece el cuerpo de agua que pasa por esta seccion, no debe variar, una vez que, segun suponemos, el fondo y las orillas están fijadas. Pero como la velocidad del

Fig. del agua es mayor ácia el fondo que á lo largo de las orillas; quando el rio recibe nueva materia, oponiendo esta materia en todas partes la misma resistencia á la corriente, el menoscabo de fuerza de que es causa, es uno mismo ácia el fondo y ácia las orillas. Por consiguiente, si suponemos que con la velocidad primitiva del punto *E* tuviese la corriente no mas que la fuerza precisa para impedir los depósitos, es evidente que la corriente ácia las orillas no tendrá la misma fuerza. Se formarán, pues, depósitos ácia las orillas, y la seccion se angostará. Pero en virtud de esta diminucion de la seccion el agua deberá forzosamente subir; de donde se sigue que la velocidad del punto *E* crecerá, y que en virtud de esto se hará una escavacion hasta *K*. Por otra parte, el aumento de la profundidad de la seccion causa mas incremento de la velocidad en todos sus puntos. Así, la fuerza de la corriente que poco antes estaba en equilibrio con la resistencia de las orillas, habiendo crecido ahora con el aumento de la velocidad, corroerá las mismas orillas, y el alveo se ensanchará por la parte de arriba. La seccion rectangular *BDFC* se transformará, pues, en la seccion *ROKHG*.

Combinando los efectos que resultan de los depósitos de las materias estrañas con los efectos que resultan de la desigual resistencia del terreno que forma la madre, se hallará la razon de muchas desigualdades que se reparan así en la direccion como en la profundidad de los rios.

131. 579 Sea un rio qualquiera *AXDC* rectilineo ó tortuo-

tuoso que encuentra la punta de dique ó la presa *BE*, puesta oblicuamente sobre la orilla *AX*. Si los diferentes filetes de agua que hieren *BE* fuesen cuerpos aislados y perfectamente elásticos, ó si la presa misma fuese un cuerpo perfectamente elástico, las moléculas de agua se reflectirían ó serian rechazadas formando el ángulo de reflexion igual al ángulo de incidencia. Pero este supuesto no se puede admitir aquí, hablando con exactitud. No obstante, como solo se trata de dar á conocer por mayor el movimiento reflejo del agua, supondremos que el ángulo de reflexion es con efecto igual al de incidencia. Sea, pues, *GH* un filete que, despues de dar en un punto *H*, se reflecte en la direccion *HL*, formando el ángulo *EHL* igual al ángulo *GHB*. Supongamos que *HL* encuentre en *F* el filete inmediato *SF*. El punto *F* será impelido en las dos direcciones *FM* y *FL*; por manera, que si representan *FM* y *FL* las velocidades en las mismas direcciones, y concluimos el paralelogramo *FMNL*, la espresion de la velocidad del punto *F* será la diagonal *FN*. Encontrando esta diagonal en *P* la presa *BE*, el filete se reflectirá en la direccion *PO*, formando con *PE* el ángulo *OPE* igual al ángulo *FPB*. Quando *PO* encontrare en *I* el filete *ZI*; si representan *IQ* y *IO* respectivamente las velocidades en las mismas direcciones *ZIQ*, *IO*, y se concluye el paralelogramo *IQRO*, la diagonal *IR* representará la velocidad del punto *I*. Como *IR* encuentra la presa en *V*, el punto *I* se reflectirá en la direccion *VT*, formando el ángulo *EVT* igual al ángulo *IVB*, y se podrá combinar, con-

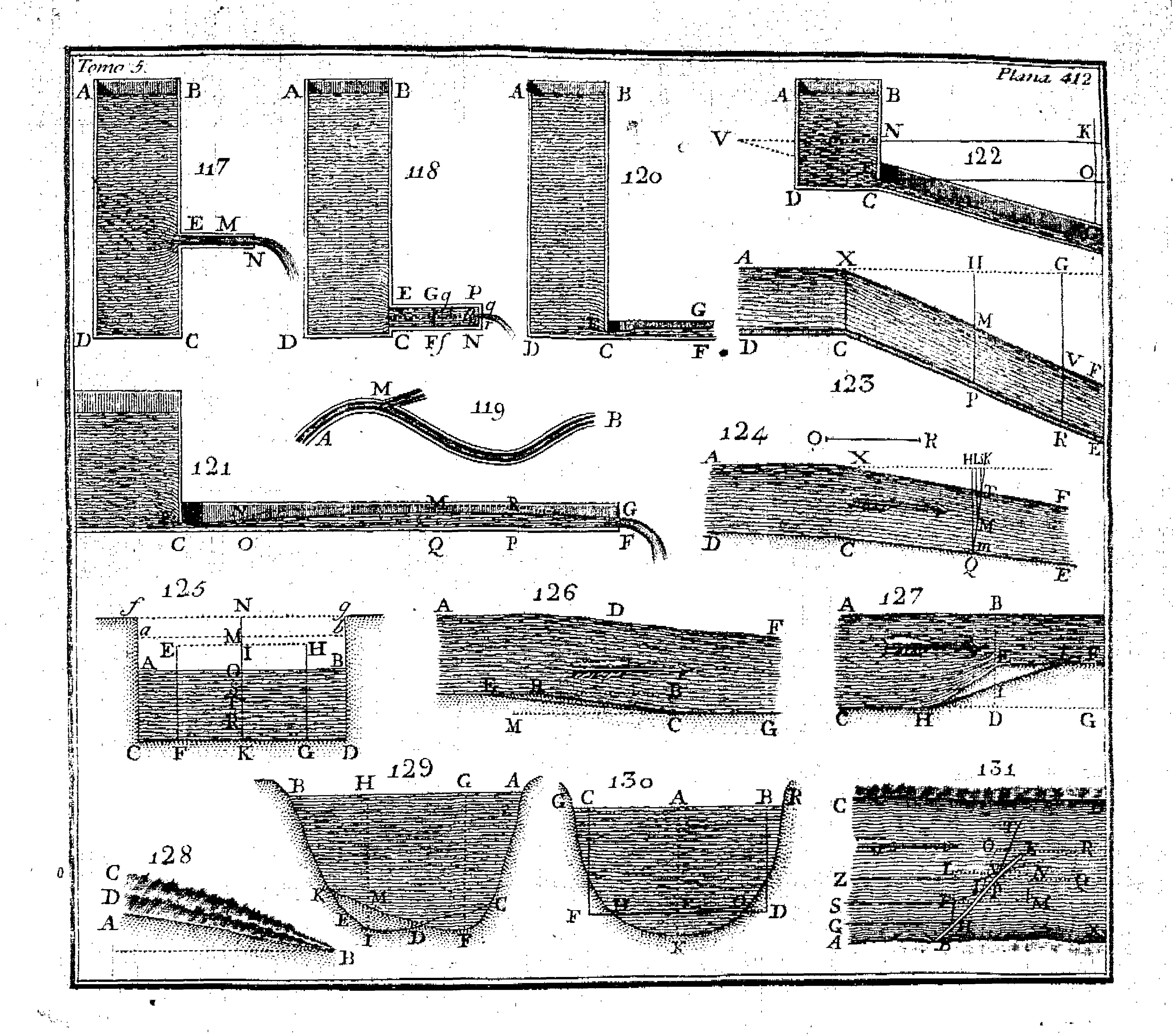
Fig. 131.

Fig. conforme lo acabamos de practicar, la velocidad nueva con la velocidad de un filete nuevo, y se proseguirá á este tenor. Con esto se conseguirá averiguar la direccion que la presa *BE* la dá á la corriente del agua. Es patente que la presa propuesta inclina la corriente ácia la orilla opuesta *CD* en una direccion mas ó menos oblicua, y que su efecto pende de su posicion combinada con la velocidad primitiva del agua. De esto deben originarse mudanzas proporcionales en la madre del rio.

Del movimiento de los Rios en su desaguadero; de la union de los Rios unos con otros, y de su separacion.

580 Quando la superficie de un rio está en estado permanente, esto es, ni sube ni baja, pasan, segun probamos (546), en tiempos iguales cantidades iguales de agua por todas las secciones que se pueden imaginar perpendiculares á la direccion de la corriente. Síguese de aquí que si el rio propuesto se mantiene en un mismo estado en su desaguadero, arroja tanta agua precisamente quanta le llega de su parte superior; si la superficie se levanta, arroja menos de la que recibe, y el exceso de la que viene respecto de la que sale causa la hinchazon; y finalmente, si su superficie baja, arroja mas agua de la que recibe, y el exceso del gasto respecto de la entrada es causa de bajarse la superficie.

581 Puede suceder que el agua de un rio que se vacía en un depósito qualquiera de aguas rebalsadas ó corrien-


Tomo 5.
Plana 412
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131

rientes, cayga desde cierta altura en el depósito, conforme sucede en las cataractas. Es constante que entonces el *desague* se hace libremente, y que como no obra la resistencia del fondo y de las orillas en el agua que cae, adquiere el fluido mas velocidad y mengua su volumen; de donde resulta que el agua superior debe tambien acelerarse gradualmente, y su superficie no puede menos de inclinarse al orizonte. Pero como los rios cuyo fondo sufre corrosion, no admiten esta inclinacion, por lo comun la superficie del rio se junta con la del depósito, de modo que las dos superficies se pueden considerar como dos planos que se juntan en el parage del desembocadero. Esta interseccion no está siempre en un mismo parage en los diferentes estados de incremento ó decremento del rio; pero en sus variaciones jamás pasa ciertos límites; y se puede tomar entre sus incursiones un término medio que se podrá considerar como la seccion comun de las dos superficies. La superficie del rio está inclinada de arriba abajo, como se percibe; y el desague no puede menos de efectuarse. Todo esto se puede aplicar á los rios que desaguan en lagunas ú otros rios. Por lo que mira á los rios que desaguan en mares que tienen flujo y reflujo, hay alguna diferencia. El flujo rechaza las aguas rio adentro, y las obliga á subir cierta altura; despues, quando se hace el reflujo, las aguas rechazadas ó suspensas, vuelven á seguir su direccion primitiva. El punto de interseccion de la superficie del rio con la del mar, está, pues, entonces siempre en movimiento, y

Fig.

no

Fig. no se le puede señalar lugar fijo y determinado.

582 El agua de un rio que entra en otro monton de aguas esperimenta una resistencia que minora su velocidad, y es dificultosa de valuar con exactitud. Sean, por egemplo, *ABCD*, *ECGF* dos rios que juntándose en *CMN* no forman mas que un rio *BHKG*. Imaginemos un instante un tabique en *CN*, que separe las dos masas de agua. Es evidente que la presion originada del peso de las aguas que esperimenta el tabique es una misma por ambos lados, y que por lo mismo las dos masas de agua al encontrarse no obran una en otra sino por razon de sus velocidades de traslacion. De esta percusion debe resultar una velocidad media y compuesta, cuya direccion divide el ángulo *DCE* del confluente en dos partes iguales ó desiguales, conforme los dos rios chocan uno con otro con fuerzas iguales ó desiguales. Algunos Autores han buscado acerca de este punto determinaciones precisas, para cuyo fin han apelado á las leyes de la percusion de los fluidos, que declararemos mas adelante. Pero los movimientos de que vamos hablando son tan complicados de suyo, y los alteran tantas circunstancias físicas y estrañas, que quizá nunca jamás se sacarán fórmulas analyticas que los representen con bastante exactitud.

583 El pendiente de los rios mengua á medida que se ván acercando al mar (566). Así, en las inmediaciones del desaguadero la corriente hecha orizontal, ó sensiblemente tal, se sale por todas las partes donde halla facil salida; se estiende su superficie, y mengua su profundidad.

De

De aquí resulta en la union del rio con la mar, la formacion de un banco, ó de una especie de barra que el agua cubre á poca altura. En los mares que tienen flujo y reflujo, en el tiempo del flujo el agua de la mar que entra en el alveo del rio, impele ácia arriba la tierra que forma la barra, pero en el tiempo del reflujo, el agua del rio vuelve á tomar su curso natural, arrastra ácia abajo la tierra, y obra para restituir las cosas á su primer estado. Al cabo de algun tiempo, estas dos corrientes encontradas luchando sin cesar una con otra, le dan al suelo del rio una forma permanente, y á propósiro para poner una especie de equilibrio entre los efectos recíprocos que causan. En la figura, que representa un perfil del rio y de la mar, tomándole en la direccion de la longitud del rio, la curva *DEF* representa el fondo del rio *ABED*, y del mar *CBEF*. El punto *E* es la cumbre de la barra. Se puede considerar *BE* como una luz por la qual pasan alternadamente las dos espresadas corrientes. Adquiere la profundidad necesaria para modificar sus fuerzas, y establecer entre ellas la debida proporcion. Los elementos principales de sus dimensiones son la cantidad de agua del rio, su velocidad, y la elevacion de las aguas al tiempo del flujo.

Fig. 133.

584 Se cree comunmente que las barras son efecto de los depósitos de las materias que el agua lleva consigo, y se ván al fondo del rio á medida que su suelo se acerca á la orizontal, y que por consiguiente mengua la velocidad de la corriente. Pero por lo que precede se echa de ver que

aun

Fig. aun quando las aguas fuesen perfectamente puras, siempre se formaría en el desaguadero una barra mas ó menos reparable. Porque la fuerza con que el agua corroe el fondo, intenta ponerle, y le pone con efecto orizontal con poca diferencia en las inmediaciones del desaguadero. Debe, pues, llegar á ser muy poca la profundidad del agua por esta misma razon. Despues la accion del flujo y reflujo (quando es mar que le tenga) la modifica, la aumenta ó disminuye, conforme requieren las leyes del equilibrio, de que hemos hablado poco há (583). Los depósitos de las materias que el agua acarrea pueden ocasionar algunas mudanzas en la figura y las dimensiones de la barra, pero no son su causa primordial. Pueden tambien alterarla algo las arenas que los vientos trasportan, las quales formando en el desembocadero *dunas* ó barras, obligan algunas veces al agua á mudar la direccion de su curso.

585 Supongamos una mar sin flujo y reflujo, ó prescindamos por lo menos de este movimiento alternativo de las aguas. Se repara comunmente que al tiempo de las avenidas, los rios que desaguan en dicha mar, suben menos cerca de su desaguadero que en las partes mas distantes. Así debe ser con efecto. Porque el agua de un rio en su desaguadero no sube sino en quanto la superficie del depósito adonde vá á parar sube al mismo tiempo, pues la seccion comun de la superficie del rio con la superficie del depósito, mirándola como inmobil, está siempre con corta diferencia en el mismo sitio (581). Pero como la superficie de la mar se levanta

in-

insensiblemente por causa del agua que la echa el rio afluente, es evidente que en las avenidas la superficie del rio debe formar con la prolongacion de la superficie del mar un ángulo mayor que en las aguas bajas. Porque entre muchas líneas inclinadas que rematan en un mismo punto ó las falta poco, la que está ras con ras con la superficie de un volumen mayor de agua debe inclinarse menos que las demás respecto de la orizontal. Por consiguiente el crecimiento debe ser mas reparable en los parages mas distantes del desaguadero que en sus inmediaciones. Lo mismo decimos de los rios que tienen mucho declivio, que de los que tienen poco; pero la proposicion se verifica principalmente en estos últimos. Fig.

586 Sácase de aquí la esplicacion de un fenómeno muy notable, y es el que vamos á referir. Un rio chico desagua en otro que siempre se queda con la misma cantidad de agua, ó el mismo nivel, y se mete muchísimo en el alveo del primero, de modo que el agua está como estagnante en el rio chico en un gran trecho desde el desaguadero para arriba. Sobreviénele de repente á dicho rio una avenida grande; y no obstante esto la superficie del agua, en las inmediaciones del desaguadero, no sube mucho mas arriba de lo que llegaba antes de la avenida. Este efecto es muy natural, conforme se colige de lo dicho (585). El agua sube en las partes superiores del rio chico. Esta agua dá un impulso á la que está en las inmediaciones del desaguadero, y acelera su velocidad. Por consiguiente quando se repara que

Fig. un rio crece cierta cantidad cerca de su desembocadero, se puede inferir que ha crecido mucho mas en las partes superiores.

587 Sea ahora un rio que lleve siempre una misma cantidad de agua, y vaya á desaguar en la mar, ó en otro rio que llamaremos *rio principal.* Supongamos que el agua del mar con el flujo, ó la del rio principal con una avenida se introduzca en el alveo del rio afluente. Entonces la velocidad de este rio afluente padecerá atraso, y sus aguas se levantarán mas en las inmediaciones del desaguadero que en las partes superiores. Con efecto, sea *BR* la
134. superficie del mar, ó del rio principal, y *BF* el desembocadero del rio afluente *IBFO.* Supongamos ahora que la superficie *BR* sube hasta *AT.* Es evidente que entonces el agua del mar ó del rio principal opone alguna resistencia al movimiento del rio afluente, y que por lo mismo la superficie primitiva *EB* del rio afluente subirá hasta el punto *D* donde encuentra la superficie *TAM* del mar ó del rio principal, y tomará por consiguiente la posicion *EK.* Pero como la reaccion del mar ó del rio principal tiene sus límites, y si por el punto *M* donde la orizontal *TAM* encuentra el suelo del rio afluente, se tira la seccion *EM* perpendicular á la corriente del rio afluente, el punto *E* por lo menos estará libre de dicha reaccion; es evidente que la superficie *EK* estará mas alta en la seccion *KDG* que en otra seccion qualquiera hecha entre los puntos *E* y *K*, y con mas razon en otra seccion qualquiera hecha mas allá del punto *E.*

La

588 La misma demostracion y la misma figura están manifestando que á medida que sube la superficie *AT*, sube tambien el punto *K*, y sube al mismo tiempo ácia el origen del rio afluente. No en todos los casos se debe considerar el punto *K* como la interseccion de dos lineas. Se forma allí una hinchazon mas ó menos reparable, que pende de la proporcion que hay entre la fuerza del rio afluente y la fuerza del mar ó del rio principal. Hay casos en que la superficie del mar es en el punto *K*, muchos pies mas alta que la superficie del rio afluente, y tiene el punto *K* un movimiento muy considerable en direccion contraria á la del rio afluente. Lo mismo se repara, guardando la debida proporcion, en el desembocadero de dos rios que desaguan uno en otro; quando el uno crece y el otro no, ó no crece este en la misma proporcion que el primero. Fig.

589 Quando dos rios se juntan y no forman mas que uno, el ancho del alveo de este rio *compuesto* siempre es menor que la suma de los anchos de los dos rios *simples* antes de juntarse; porque es evidente que la superficie con la qual el agua roza en el rio compuesto, es menor por precision que la suma de las dos superficies con las quales el agua roza en los dos rios simples. Por esta razon el filon del agua del rio compuesto corre con mas rapidez que el de los rios simples. Suponiendo, pues, que la velocidad ácia las orillas sea una misma en ambos casos, es evidente que las materias estrañas que el agua acarrea, deben

Fig. depositarse en el rio compuesto en las orillas. De donde se sigue que el alveo se angosta, y se vá haciendo mas profundo á proporcion. De esta mayor profundidad resulta una altura mayor de agua, que aumenta su velocidad. Todo esto lo confirma la esperiencia. Rios se ven, particularmente quando tienen poco declivio, con los quales se juntan otros sin que al parecer sea mayor su volumen; pero es mayor su velocidad.

590 Puede suceder, y sucede comunmente que dos rios que se juntan tengan cantidades de agua, declivios y velocidades muy diferentes. Asimismo, quando un rio se divide en diferentes brazos, es evidente que como estos brazos se pueden considerar como otros tantos rios particulares, tendrán, segun fueren las circunstancias, cantidades de agua, pendientes y velocidades diferentes. No es, pues, de estrañar que quando un rio se divide en dos brazos en la punta de una isla, sus brazos al apartarse uno de otro no guarden siempre un mismo nivel. Cada nivel particular subirá ó bajará respecto de los demás, conforme el agua tuviere, en virtud de su cantidad y del declivio, mayor ó menor facilidad para correr.

591 En el año de 1760 salió á luz un tratadito sobre el curso de los rios, cuyo Autor afirma, que *un rio grande puede sorber todas las aguas de otro rio tan grande como él, sin que por esta creciente suban las aguas del primer rio, cuyo alveo se queda con el mismo ancho que antes. Esto sucede*, prosigue dicho Autor, *porque como con la crecien-*

ciente es otra tanta de la que era antes el agua del rio, tambien es otra tanta la velocidad de su corriente. Por esta razon no ha podido subir á mayor altura, y era inutil el mayor ensanche de su alveo. Esto manifiesta que, segun discurre el citado Autor, con aumentar la cantidad de agua se aumenta en la misma razon su velocidad, por lo menos sensiblemente, y que la altura del agua no debe ser mayor. De aquí infiere que no influye en la altura de las aguas el aumentar ó disminuir su volumen; y clama mucho contra la práctica de los que sangran un rio que suele salirse de madre, ó de los que desvian por medio de canales parte de sus aguas, con el intento de que bage, y precaver las inundaciones que pueden resultar. Fig.

592 Esta opinion que ha alucinado á muchos, necesita de alguna esplicacion para reducirla á sus debidos límites. La hypótesi en que se funda, es á saber, que las *velocidades crecen como las cantidades de agua*, es errada (533). Verdad es que con aumentar la cantidad de agua se aumenta su velocidad, pero no en la misma razon ni con mucho. En los rios que tienen poco declivio, y cuyo nivel es el mismo, con corta diferencia por lo menos, que el del mar, conforme se verifica comunmente en las inmediaciones del desaguadero en el mar; no bajará, sensiblemente por lo menos, el nivel del agua, porque se divida el rio en muchos brazos.

Sea, por egemplo, el rio *AB* cuyo nivel es el mismo 135.
que el del mar *GHEF*. Es patente que si se hacen nue-

Fig. vas aberturas CF, DE, no por esto bajarán las aguas en la parte ACD, ó que por lo menos solo bajarán en la razon de la suma de las superficies CF, DE á la suma de las superficies AB, $GHEF$ &c. cuya cantidad es insensible. Infiérese de aquí que las sangrias que se le hacen á un rio cerca de su desaguadero en la mar, ó en general á todo rio que tiene poco declivio, proporcionan muy leves ventajas. Pero quando el rio tuviere un declivio y una velocidad sensibles, no hay duda en que el aumento de la cantidad de agua hará subir sensiblemente el nivel del rio, y recíprocamente bajará el nivel del agua quando se minorase su volumen con sangrias.

593 En algunas ocasiones hay que desviar alguna porcion del agua de un rio por algun fin particular; y se quiere saber quanto bajará el nivel de dicho rio cuyo caudal se supone corto, á fin de quitarle el agua con economía, y no privarle de la circunstancia de navegable. Resolveremos esta cuestion primero en el supuesto de que el rio y el canal de *desvio* ó *derivacion* sean ambos rectangulares.

136. 594 Sean $ABCD$ el plan ó la seccion orizontal de
137. un canal rectangular que representa el rio propuesto; $EFHG$, el plan del canal tambien rectangular por el qual se ha de dirigir el agua que se le quiere quitar al rio. Supondremos, para ceñirnos al caso mas comun, que en la superficie la velocidad de la corriente sea como insensible. Fuera de esto, prescindimos de los obstáculos, y suponemos por lo mismo que en toda la profundidad la velocidad de cada punto sea efec-

efecto de la altura que le corresponde. Sea el rectángulo Fig.
MOPN la seccion vertical y latitudinal del rio; *OP* representa 137.
el nivel del agua antes de abrir el canal de derivacion. Supongamos que despues de hecho el canal el nivel bage á *VX*, y que el rectángulo *SQRT* represente la seccion vertical y latitudinal del mismo canal. Es evidente que, por la cuestion, la suma de las cantidades de agua que pasan en un tiempo dado t, por los dos orificios *VOPX*, *SQRT*, debe ser igual con la cantidad de agua que pasaba en el mismo tiempo t, por el orificio *MOPN*. Llamemos *MO*, H; *OP*, c; *SQ*, H'; *QR*, c'; y t', el tiempo que gastaría un cuerpo grave en caer desde la altura dada a.

La cantidad de agua que pasa por el orificio *VOPX* será (149) $\frac{4tcH'\sqrt{aH'}}{3t'}$; la que pasa por el orificio *SQRT*, $= \frac{4tc'H'\sqrt{aH'}}{3t'}$; la que pasaba por el orificio *MOPN*, $= \frac{4tcH\sqrt{aH}}{3t'}$. Luego si omitimos el factor comun $\frac{4t\sqrt{a}}{3t'}$, tendremos, por la condicion espresada, $cH'\sqrt{H'} + c'H'\sqrt{H'} = cH\sqrt{H}$.

Suponiendo *dada* la cantidad de agua que en el tiempo t se ha de desviar del rio, y llamando q esta cantidad, tendremos $q = \frac{4tc'H'\sqrt{aH'}}{3t'}$. Combinando esta equacion con la precedente, hallaremos los valores de H' y c' por medio de las dos equaciones $H' = \sqrt[3]{\left[\frac{(4tcH\sqrt{aH} - 3t'q)^2}{16t^2c^2a}\right]}$, $c' = \frac{3t'cq}{4tcH\sqrt{aH} - 3t'q}$. Con esto queda determinada la profundidad y la latitud del canal. Tambien se conocerá la cantidad $H - H'$ que espresa quanto habrá bajado el nivel del rio.

595 No sería menos facil de resolver la cuestion aun

Fig. quando no supusiéramos que la velocidad de cada filete de agua es efecto de la altura que le corresponde, y se fijára la altura media de la corriente como antes (563).

596 Como los rios casi nunca tienen la forma rectangular, es preciso, antes de aplicar á la práctica la teórica precedente, egecutar algunas operaciones preliminares, que es importante declarar. Sea en general *MFGHIKN* la sec-
138. cion vertical y latitudinal del rio. Se le sondeará en trechos iguales; quiero decir que despues de dividida la latitud *MN* en partes iguales *MA*, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EN*, se medirán las alturas correspondientes *AF*, *BG*, *CH*, *DI*, *EK*. Han de ser muchas las divisiones, para que se puedan considerar como lineas rectas los arcos *MF*, *FG*, *GH* &c. y la seccion del rio como un polýgono rectilíneo. La superficie de este polýgono será $=(AF+BG+CH+DI+EK)\times MA$ (I. 500), esto es, el producto de la suma de las alturas por una de las divisiones iguales de la latitud. Dividiendo este producto por toda la latitud *MN*, suponiendo que la vertical *MO* represente el cociente, y concluyendo el rectángulo *MOPN*; la area de este rectángulo será la misma que la del polýgono. Sentado esto, en la práctica se podrá considerar, sin recelo de error sustancial, el rectángulo *MOPN* como la seccion del rio. Así, suponiendo que con la sangria el nivel del espresado rectángulo bage á *VX*, la seccion verdadera del rio, despues de la sangria, será el polýgono *mFGHIKn*, y el decremento que habrá padecido el nivel, será sensiblemente *MV*. Se practicará lo propio

res-

respecto del canal de derivacion si no tuviere la forma rectangular. Este mismo método se puede aplicar tambien á la cuestion que resolvimos (560 .. 563). Fig.

Métodos para medir la velocidad de las aguas corrientes.

597 Las dificultades que se encuentran quando se quieren sacar de la teórica reglas seguras y generales con el fin de determinar en qualesquiera casos la velocidad de las aguas corrientes, y por otra parte la necesidad de averiguarla, han puesto á los Matemáticos en la precision de inventar varios instrumentos para egecutar esta operacion con la exactitud que requiere su importancia.

Del Nadador.

598 Un cuerpo que nada en la superficie del agua adquiere en poco tiempo toda la velocidad de su corriente. Se puede, pues, medir la velocidad de una corriente metiendo en ella un cuerpo que se sumerja casi todo, y reparando qué tiempo gasta en andar un espacio dado. Es preciso que el *Nadador* esté metido casi todo en el agua, á fin de que le dé el ayre lo menos que se pueda, y no altere su movimiento. *Mariote* usó mucho este método.

599 Como sabia por esperiencia este Autor, que el agua de un rio no corre con la misma velocidad en todos los puntos de una seccion qualquiera, y que cerca del fondo mengua mucho por razon de las piedras, hierbas, y otros obs-

Fig. obstáculos que encuentra, determinó estas diferentes velocidades en un rio que corria uniformemente. Para este fin ató dos bolas de cera con un hilo que cogía un pie de largo; la una tenia en su centro algunas piedrecitas para que su gravedad específica fuese algo mayor que la del agua; por manera que quando las bolas estaban en el agua, la mas pesada tenia tirante el hilo, y era causa de que la mas ligera se metiese en el agua mas de lo que se hubiera metido estando sola, y con esto su parte superior estaba casí á nivel del agua, y no podia el ayre, ni aumentar, ni disminuir su velocidad. Siempre reparó que la bolita de abajo se quedaba atras, particularmente en los parages donde el fondo criaba hierbas, pasando cerca de ellas la bola inferior; porque el rio no venia á tener mas que unos tres pies de profundidad. Pero quando se metian las mismas bolas en un parage donde, por encontrar el agua algun obstáculo, se levantaba un poco la superficie, y tomaba despues un curso mas rápido, conforme sucede en los ojos de las puentes; la bola inferior iba delante de la superior, de donde se saca que entonces el agua de en medio caminaba mas aprisa que la de la superficie.

Manifiestan estos esperimentos que la velocidad crece ó mengua de la superficie al fondo, segun las circunstancias. Por el curso regular de las cosas la velocidad debería ir creciendo de la superficie al fondo, porque corresponde á una caida ó altura que vá siempre creciendo mas y mas; pero puede suceder que los obstáculos la minoren

ren más de lo que la aumenta el aumento de la caida. Fig.

De la Rueda ó Molinillo.

600 Se puede medir la velocidad de una agua corriente por medio de una rueda con alas, que se mueva con desahogo al rededor de su ege, contando las vueltas que diere en un tiempo determinado; así se averiguará la razon entre las velocidades en diferentes parages de una misma ó de diferentes secciones; y la velocidad absoluta en los canales de una inclinacion sensible, en los quales el agua que precede no impide el movimiento circular de la rueda. Porque en conociendo el diámetro, y por consiguiente la circunferencia de la rueda, y el número de vueltas que dá en un tiempo determinado, se hallará facilmente el espacio que un cuerpo andaría en un minuto ó en un segundo de tiempo con la velocidad circular de la rueda, en los parages donde se puede suponer su velocidad igual con la del agua.

601 Pero con este instrumento solo se puede medir la velocidad de la corriente ácia la superficie; y al girar la rueda, esperimenta alguna resistencia de parte del ayre.

Otro inconveniente tiene el uso de este instrumento. Donde el agua corre con poca velocidad, conforme sucede en los alveos poco inclinados, la rueda no gira con la misma velocidad de la corriente, sino con una velocidad algo menor; porque el ala que precede tiene que levantar una porcion de agua que la gravedad detiene. De aquí resulta que todo el movimiento de la rueda mengua. Veamos, pues,

en

Fig. en qué inclinacion la espresada ala esperimenta la mayor resistencia.

139. Sea C el centro; CA, el radío; BCb, la quarta parte de una rueda; AB, lo que coge de largo una ala; AH, la superficie orizontal de la corriente, á la qual es paralela la CB; IK, el fondo del canal. Es evidente que el ala precedente esperimentará la resistencia máxima por parte del agua que la gravedad detiene y el ala debe levantar, quando el cuerpo de agua que el triángulo FGD representa, se oponga máximamente á su movimiento; y que la fuerza máxima con que la corriente hace andar la rueda es aquella que dá directamente en el ala vertical AB. Pero esta vá siempre menguando, al paso que se vá apartando de su situacion vertical AB, por manera que en la situacion CD del radio, si representa FD la fuerza máxima impelente, representará DG la fuerza residua, y FG la fuerza perdida. Por consiguiente tendremos la resistencia máxima quando la area del triángulo FGD multiplicada por el lado FG fuere un máximo.

Llamemos CA, a; CB, b, y supongamos que en la posicion CD, ó en el ángulo ACD se halle la espresada máxima resistencia. Tírese la DE paralela á la vertical BC, y llamemos CE, x; DE, z. De los triángulos semejantes CED, FGD, sacaremos $DE : EC :: DG : GF$, esto es, $z : x :: z - a : \frac{xz - xa}{z} = GF$. Por consiguiente la area del triángulo $DGF = \frac{(z-a)(z-a)x}{2z}$, y multiplicando esta por GF ó $\frac{(z-a)x}{z}$, deberá resultar el producto máximo $\frac{(z-a)^3 \times x^2}{2z^2}$, cuya di-

diferencial $\frac{-2zdz\times(z-a)^3\times x^2+z^2\times 3(z-a)^2\times x^2dz+z^2(z-a)^3\times 2xdx}{z^4}$ Fig.
$=0$ (III. 398 y sig.). Dividiendo por $\frac{(z-a)^2xz}{z^4}$, será $-2x\times(z-a)dz+3xzdz+2z\times(z-a)dx=0$, esto es $(2z^2-2az)dx=(xz+2ax)dz$. Pero por ser $z=\sqrt{(b^2-x^2)}$, y por lo mismo $dz=\frac{-xdx}{\sqrt{(b^2-x^2)}}=-\frac{xdx}{z}$, resultará $(2z^2-2az)dx=\frac{(-x^2z-2ax^2)dx}{z}$, y dividiendo por $\frac{dx}{z}$, será $2z^3-2az^2=(z+2a)\times -x^2$; pero $-x^2=-b^2+z^2$; luego $2z^3-2az^2=(z+2a)\times(-b^2+z^2)=-b^2z-2ab^2+z^3+2az^2$, y finalmente tendremos la equacion $z^3-4az^2+b^2z+2ab^2=0$, que será reducible siempre que b^2 fuere mayor que $\frac{16a^2}{3}$; porque entonces no tendrá mas que una raiz real. En determinando z, estará determinada x, porque $z^2=b^2-x^2$; y así será determinada la *CE*, y conocido el ángulo *CDE* $=$ *BCD*.

Si el ala subsiguiente *AB* quitára toda ó la mayor parte de la fuerza que impele el ala *FD*, en este caso la resistencia máxima penderia únicamente de la area máxima del triángulo *FGD*; y con esto la equacion sería $z^3-\frac{b^2z-ab^2}{2}=0$, que tambien será reducible siempre que b fuere igual ó mayor que $a\sqrt{13\cdot\frac{1}{2}}$.

Del Tubo recurvo de Pitot.

602 Este instrumento es un tubo de vidrio *AB*, que 140.
tiene en *G* un recodo, y se mete verticalmente en una corriente. La altura *CM*, á la qual sube el agua en el tubo, es la que proviene de la velocidad con que camina la corriente en *A*.

Por-

Fig. Porque manteniéndose invariable la altura *CM*, es evidente que la presion del agua *MC* hace equilibrio con la fuerza que obra para que el agua suba en la direccion *ACM*, y que por consiguiente la velocidad del punto *A* es la misma que si el agua en el mismo parage hubiese caido de la altura *MC*. Con meter el tubo mas ó menos dentro del agua se determinan las alturas que corresponden á las velocidades de los diferentes puntos de la corriente.

Quando se hiciese uso de este instrumento se deberá poner cuidado en colocarle muy firmemente en situacion vertical, y muy directamente á la corriente para que reciba todo su impulso. Y como el movimiento del agua por mas regular que sea, padece momentaneas alteraciones, requiere paciencia y juicio el determinar la cantidad precisa de su elevacion.

Para que el instrumento se mantenga inmobil en la si-
141. tuacion vertical y direccion correspondiente, se le mete por dos taladros hechos en dos gruesos travesaños orizontales de madera afianzados uno con otro por medio de dos pilares verticales asegurados en sus bases. En los taladros se ajusta y afirma el instrumento con unas cuñitas de madera. Los tubos de vidrio tienen 5 ó 6 lineas de diámetro, para que sea mas perceptible el aumento ó diminucion de la altura. El tubo recurvo está encajonado hasta la mitad de su grueso en un prisma de madera, en el qual están señaladas á cada lado del tubo las divisiones de las alturas en pies, pulgadas y lineas; por cuyo medio siempre se sabe

la

la cantidad de la inmersion, y la altura á que llega el agua Fig.
en el tubo. Pero la operacion es muy dificultosa de egecutar con la exactitud que corresponde, en una corriente muy rápida. Habiendo intentado hacerla muchas veces á la profundidad de quatro pies, jamás se pudo conseguir, porque el agua daba con tal ímpetu en el instrumento, que á pesar del peso y firmeza de su pie, y de asegurarle con los brazos, bamboleaba tanto por los embates del agua que no fue posible se estuviese quieto quanto se necesitaba para una observacion hecha aprisa, de manera que algunas veces se quiebra á lo último el tubo. Esto manifiesta lo poco que hay que fiar de los esperimentos hechos en grandes rios desde dentro de bateles ó barcos que siempre se están meneando.

Del Regulador.

603 El regulador es invencion de *Guglielmini*. Pro- 142.
pone este Autor para medir la cantidad de agua de una corriente, que se encierre la corriente propuesta entre dos paredes verticales y paralelas, se allane bien el fondo y se le cierre al agua parte del paso por medio de una compuerta mobil verticalmente, obligándola á que pase por el agugero rectangular que queda entre el fondo, las dos paredes, y la parte inferior de la compuerta. Este agugero se llama *Regulador* ó *Cataracta*. La cantidad de agua que pasa en un tiempo dado por el regulador se mide por el método dado (149); y la velocidad media del agua se halla por lo dicho (150).

Pa-

Fig. Para servirse con seguridad del regulador es preciso que el agua detenida en el canal artificial se pueda realmente considerar como detenida, de modo que no se reparen balances en su superficie, y que á alguna distancia de la cataracta no sea sensible su movimiento progresivo; que la altura no varíe y sea constante; y que el agua obligada á pasar por el regulador pueda empujar lejos de sí la precedente que se moviere mas lentamente. Pero estas condiciones concurren muy pocas veces, ó porque es mucha la velocidad ó cantidad del agua, ó porque son muy bajas las orillas; de donde resultaría una inundacion, si se la hiciera subir tan alto como se necesita. A mas de esto, aunque sucede con frecuencia que en las inmediaciones de la cataracta el agua ni sube ni baja, y balanceando continuamente se mantiene á la misma altura; no por esto sirve al intento, porque entonces no es sola la presion la que allí obra, y vá acompañada de balances y sobresaltos que alteran notablemente el efecto de la aceleracion en el agua inferior. Sin embargo siempre que la seccion de la corriente libre se disminuye con bajar la compuerta, y el agua que está detras de ella no sube mas, y siempre se mantenga á una misma altura será señal de que la corriente entera pasa por el regulador, pero no de que toda la velocidad sea efecto de la sola presion. Porque como la simple presion, y la caida libre son causas equivalentes de aceleracion, prevalece la mayor de las dos á la menor; esto no obstante, ambas concurren á un tiempo para un mismo efecto.

El

El regulador no es de uso ninguno en los grandes rios y canales. Es de un uso mas seguro, comun y acomodado en los canales artificiales, en los quales se hallan reguladores hechos yá, ó fáciles de concluir. Fig.

Del Quadrante.

604 El quadrante de círculo *ACB* de que se trata en este lugar, lleva en su centro dos hilos, el uno algo corto *CP* que sostiene en el ayre un peso *P*, el otro mas largo *CH* ó *CM* del qual cuelga un peso cuya gravedad específica es mayor que la del agua, y se sumerge en ella mas ó menos segun se suelta mas ó menos el hilo. Por medio del desvio de este segundo hilo de la vertical, se mide primero la fuerza, y despues se infiere la velocidad de la corriente, conforme sigue. 143.

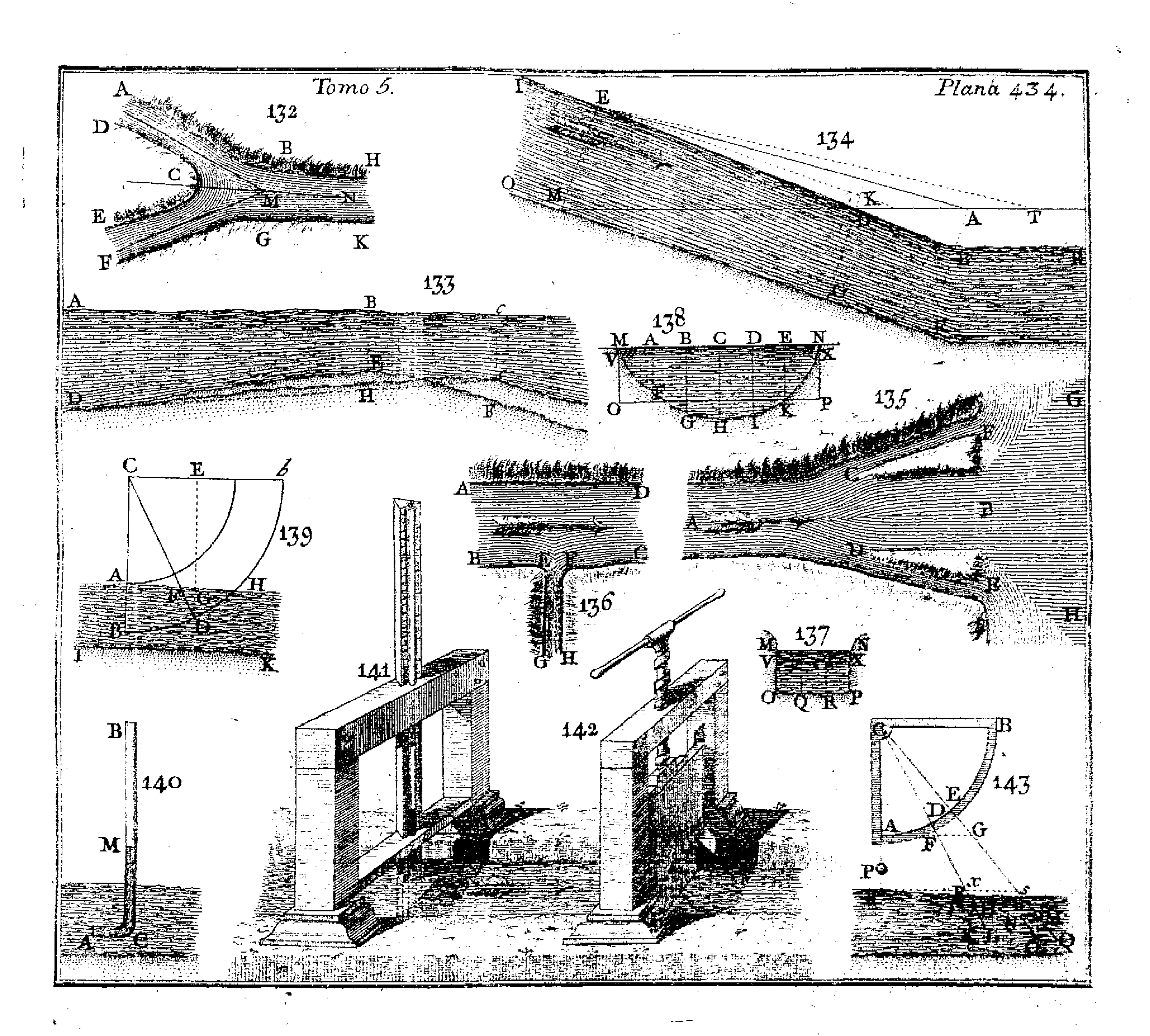
605 Llamemos *F* el peso constante que se ha de sumergir en el agua, y representen este peso las verticales iguales *HK*, *MO*; háganse los paralelogramos *HIKL*, *MNOQ*, cuyos lados *HI*, *MN* tengan la misma direccion que la corriente, y los lados *HL*, *MQ* la misma direccion que el hilo. Es evidente que de las dos fuerzas en que se resuelve la fuerza *HK* ó *MO*, solo se debe considerar la fuerza *HI* ó *MN*, porque la resistencia del punto *C* aniquila la otra *HL* ó *MQ*. A mas de esto, se echa de ver que tendremos fuerza $HI = F \times \frac{\text{sen } XCR}{\text{sen } XRC}$, y la fuerza $MN = F \times \frac{\text{sen } XCS}{\text{sen } XSC}$. De donde se infiere que en general la fuerza igual y contraria de la corriente es el producto del peso *F* por la razon que hay entre el seno del ángulo que forma

Fig. el hilo con la vertical, y el seno del ángulo que forma el hilo con la corriente. El primero de estos dos ángulos le dá inmediatamente el quadrante. Por lo que mira al segundo XRC ó XSC, siempre es facil de determinar; porque si tiramos la orizontal xy, conoceremos el ángulo yXY, una vez que es dada la direccion de la corriente. Pero el ángulo $XRC = XxC - RXx$, y el ángulo $XSC = XsC - SXs$. Quando la direccion de la corriente es orizontal, el ángulo yXY es nulo, y tirando las tangentes AF, AG, de los ángulos ACF, ACG, tenemos $\frac{\text{sen } XCR}{\text{sen } XRC} = \frac{AF}{CA}$, $\frac{\text{sen } XCS}{\text{sen } XSC} = \frac{AG}{CA}$. De donde se sigue que entonces la fuerza de la corriente es como la tangente del ángulo que forma el hilo con la vertical.

606 Ahora bien, si consideramos que la impulsion de un fluido en un mismo cuerpo es proporcional al quadrado de la velocidad del mismo fluido, conforme probaremos mas adelante, y llamamos u la velocidad en H; V, la velocidad en M; tendremos en general $uu : VV :: \frac{F \times \text{sen } XCR}{\text{sen } XRC} : \frac{F \times \text{sen } XCS}{\text{sen } XSC} :: \frac{\text{sen } XCR}{\text{sen } XRC} : \frac{\text{sen } XCS}{\text{sen } XSC}$. Luego $u : V :: \sqrt{\left(\frac{\text{sen } XCR}{\text{sen } XRC}\right)} : \sqrt{\left(\frac{\text{sen } XCS}{\text{sen } XSC}\right)}$.

607 Se echa de ver que en conociendo u, se conocerá V. Se podrá medir por medio del nadador, la velocidad u en la superficie. Sentado esto, dándole primero al hilo CH una longitud tal, que el cuerpo H no se sumerja mas que lo que coge su diámetro, dejando que este cuerpo se sumerja despues hasta una profundidad qualquiera; se medirán los ángulos XCR, XRC, XCS, XSC; y se sacará V por la proporcion antecedente.

Es-


Tomo 5.
Plana 434.
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143

608 Este instrumento muy usado de los Hydráulicos prácticos se debe usar con precaucion, si se quieren resultados algo exactos. El hilo que sostiene el cuerpo sumergido no siempre se mantiene en la misma posicion; está espuesto á movimientos de oscilacion que le arriman ó apartan de la vertical, y hacen muy incierta la medida del ángulo que forma con la misma linea. Esto sucede particularmente quando la gravedad específica del cuerpo sumergido es poco mayor que la del fluido. Pero por otra parte no se debe aumentar mucho la gravedad específica de dicho cuerpo respecto de la del agua; porque entonces las leves variaciones que suceden en las velocidades, no serian perceptibles en el instrumento. Fig.

Método para medir las aguas corrientes sin instrumento alguno.

609 Enseñaremos cómo se puedan medir 1.° las aguas que corren por canales regulares. 2.° las que corren por canales irregulares.

Cómo se pueden medir las aguas corrientes por canales regulares.

610 Para dar acerca de este punto tan dificultoso como esencial, toda la luz que alcanzamos, haremos ó repetiremos algunas consideraciones acerca del movimiento progresivo de las aguas que corren por canales regulares. Desde luego es constante que como la presion de los fluidos obra en todas las direcciones, sus partículas se pue-

Fig. den mover unas por entre otras, y están en reposo quando llegan á esperimentar por todas partes una misma presion, encaminándose, así á impulsos de su propia gravedad, como por razon de la presion de las demás partes, al parage donde la esperimentan menor. Resulta de aquí que en haciéndole á un vaso lleno de agua una abertura lateral, al instante se salen las partes del fluido impelidas de la presion con que en ellas obraban las demás, y prosigue el chorro en una direccion perpendicular al plano del orificio, sea este perpendicular ó inclinado al orizonte. En virtud de esto es muy lícito considerar la seccion de un rio como una abertura lateral hecha en un vaso de mucha cabida, y la velocidad con la qual el agua corre por dicha seccion como efecto de la presion con que obra el agua depositada hasta una altura determinada, ó lo que es lo propio, como adquirida al caer de una altura dada.

Este supuesto, que es muy natural quando se trata del curso de las aguas de los rios, le han admitido Matemáticos de grande autoridad; bien que le han desechado algunos modernos, porque no concuerda de todo punto con los esperimentos, y han apelado á otras hypótesis menos naturales, y por lo mismo mas aventuradas.

611 La razon de las velocidades que son como las raices quadradas de las alturas, cuya razon se verifica en las aguas que salen por las luces de los vasos (140); la reciprocidad de las secciones con sus velocidades medias (547) en un mismo cuerpo de agua corriente, son dos prin-

principios que juntos nos están indicando el rumbo que hemos de seguir en la investigacion actual, y nos suministran reglas para averiguar así la celeridad como la cantidad relativa del fluido. Pero para hallar la cantidad efectiva se nos hace preciso otro principio á la verdad menos evidente y menos conocido, pero no menos seguro por sí, ni menos necesario. Fig.

612 La razon y la observacion evidencian, conforme queda dicho en otro lugar, que no todas las partes de una seccion se mueven con la misma velocidad; que las que están ácia el medio ó el filon corren mas veloces que las mas inmediatas á las orillas. Tambien es mas rápido el movimiento ácia el fondo que cerca de la superficie, quando es notable la altura viva de la seccion; y corren con mas rapidez las aguas que están mas lejos de los obstáculos que las que están cerca. Esta es la razon porqué los Autores que con mas acierto han meditado en este asunto, aconsejan que se averigue en muchos parages la celeridad de una misma seccion, así en latitud como en altura, para hallar una velocidad media entre todas, ó una que se pueda considerar como comun á toda la seccion. Pero esta velocidad media se halla muy á tientas, y lejos de contentarnos, nos deja casi siempre con algunos recelos de error. Esto es lo que falta á la teórica y á la práctica de la medida de las aguas; quiero decir, que nos falta la ley de las velocidades absolutas para hallar las efectivas.

613 Pero el determinar, sin mas auxilio que los prin-

Fig. cipios teóricos, qué ley siguen los decrementos de la velocidad absoluta al apartarse las partes del agua de las mas veloces, y acercarse á los obstáculos, es empresa, quando no imposible, dificultosísima por lo menos. Y aun quando se pudiera conseguir, ¿quién sabe quantas dificultades habria para aplicar este conocimiento á la práctica? Por este motivo, fundados en el principio de que los efectos naturales, obrados por las mismas causas, y en las mismas circunstancias han de salir arreglados á una misma ley, sea la que fuese; y sabiendo la que se ha manifestado en repetidos esperimentos, se ha discurrido aplicarla á otros, cotejando los resultados con las cantidades medidas actualmente, por cuyo medio se ha visto confirmada, y probada la misma ley.

614 Por lo dicho (131 y 258 y sig.) queda patente la ley que siguen las velocidades de las aguas que salen de las luces de los vasos, y la proporcion de 8 á 5 que hay entre la area de la luz, y la de la vena sumamente contraída. Es tanta la dificultad de esta determinacion, que no es de estrañar sea distinta la razon que en esto señalan varios Escritores; asegurando unos que la area del orificio es á la de la vena sumamente contraída como 324 á 199, otros como 432 á 265, y otros finalmente como 18 á 11, cuyas razones se acercan todas, bien que unas mas que otras, á la razon de 8 á 5, y en algunos casos se la deben preferir.

615 Sentado esto, es constante que tenemos muchos indicios para persuadirnos á que se verifica la misma razon

zon en las aguas libremente corrientes de los rios; y la disparidad que á primera vista parece debe haber entre una corriente libre, y la que sale por una luz hecha en una pared delgada, no es mas que aparente. Fig.

1.° Porque la presion mayor ó menor que obliga al agua á salir por la luz, de ningun modo altera la razon entre la area de la luz, y la de su vena sumamente contraída; pero en quanto al efecto de la aceleracion, la caída libre ó la caída de igual altura equivale á una presion qualquiera. Luego en orden á esto no hay ninguna disparidad.

2.° Apenas sale el agua por la luz donde esperimenta alguna resistencia, quando, en cesando esta, coge luego aquel volumen que corresponde á su masa y á su velocidad, y le conservaría siempre, si no esperimentase despues de salida otras resistencias, ó particularmente no se acelerára por razon de una nueva caída ó bajada. Pero quando el agua corre por un canal regular, las resistencias son siempre unas mismas, y por esto se queda siempre con su primero mayor volumen; y siendo uniforme la latitud, se mantendrá en una altura viva mayor de la que naturalmente tendria, si no tuviera resistencia ninguna que vencer, de modo que con flujo perene pueda toda salirse, lo que no podria egecutar si con la mayor altura viva no llegára á ser tan superior á la suma de todas las resistencias, como necesita cabalmente para su curso constante.

616 A estas consideraciones se podrian añadir mu-

 chos

Fig. chos esperimentos que confirman nuestra proposicion, pero se puede probar mas directamente todavia. La teórica y la práctica manifiestan que las portadas de una misma corriente son iguales, sea que estas se midan en una seccion libre ó en una seccion minorada con bajar la compuerta de un regulador; pero el agua quando se la precisa á pasar toda por debajo de la catarata, se halla en las mismas circunstancias que la que sale por una luz hecha en un vaso, con tal que en ambos casos sea libre la salida; y como el agua que sale por la luz de un vaso padece contraccion de la vena, la padecerá tambien la que pasa por debajo de la catarata. Pero esta es igual á la que pasa por una seccion libre qualquiera de la corriente; luego está sugeta á la misma ley que la otra, quiero decir á la suma contraccion de la vena; ó por hablar con mas propiedad, una vez que aquí se trata de aguas corrientes, padece igual diminucion de velocidad.

617 En los canales regulares se manifiesta con evidencia el efecto de los tres principios sentados (611 y 612). Porque estos tienen su fondo ó muy inclinado, ó lo que es mas comun, un poco no mas; ó le tienen sensiblemente orizontal. En todos estos canales, sin exceptuar ninguno, el movimiento progresivo del agua pende de alguna especie de pendiente ó declivio; sin esta circunstancia no puede haber naturalmente movimiento progresivo perene, se estaría el agua quieta hallándose detenida por todas partes. En el estado físico de las cosas no se halla rio ó canal alguno

de

de agua corriente que desde su principio hasta su paradero Fig.
tenga orizontales su suelo y superficie.

618 En todos estos canales, el movimiento del agua se vá acelerando al paso que se aleja del principio natural ó equivalente del movimiento, y esta circunstancia dá lugar al primero de los tres principios. Resulta de aquí ser forzoso se verifique tambien el segundo, esto es, la reciprocidad de las secciones con sus respectivas velocidades medias, habiendo de pasar por todas las secciones cantidades iguales de agua en tiempos iguales. Se hace igualmente indispensable el tercer principio de las resistencias; porque el agua no puede menos de esperimentar en su curso la resistencia del fondo y de las orillas por mas planas y lisas que las supongamos; porque finalmente estas se quedan inmobiles rozando continuamente con ellas, y esto no puede hacerse sin que el agua esperimente alguna oposicion.

619 De otro modo se puede y suele considerar el movimiento progresivo de las aguas de los rios; es á saber considerando la corriente como un cuerpo que baja por un plano inclinado; toda la diferencia que hay entre la bajada de un fluido y la de un sólido, consiste en que el sólido acelerándose succesivamente no muda de volumen, siendo así que el fluido continuamente disminuye de masa por razon de irse acelerando sin cesar su movimiento, y al contrario crece su mole quando se atrasa el movimiento. Esto concuerda con el segundo principio de estar las secciones en razon recíproca de sus velocidades medias. En este nue-

Fig. vo modo de considerar el movimiento de las aguas se funda el método facilísimo y seguro para medirla sin instrumento ninguno, ni necesidad de apelar á la esperiencia.

Antes de manifestarle, sentaremos algunas proposiciones, que nos serán de mucho socorro.

144. 620 Supongamos que represente AP''' la altura de una seccion, esto es, la altura de agua que la corresponde, y que el agua en A se mantenga inmobil sin velocidad alguna. El agua que corresponde á los puntos P, P', P'' &c. se moverá con mayor velocidad conforme estuviesen mas distantes del punto A de la superficie. En el tiempo que el agua P anduviere el espacio PM, el agua P' andará el espacio $P'M$ &c. Por consiguiente las lineas PM, $P'M'$ &c. representarán respectivamente las velocidades de los diferentes puntos de la seccion, cuyas lineas rematarán en la curva AM'''.

La naturaleza de esta curva es muy facil de determinar. Porque como las velocidades de los puntos P, P', P'' &c. son proporcionales á las raices quadradas de las alturas AP, AP', AP'' &c. miraremos las mismas alturas como las abscisas, y los espacios PM, $P'M'$ &c. como las ordenadas; tendremos, pues, $\sqrt{AP} : \sqrt{AP'} :: PM : P'M'$, cuya proporcion manifiesta (III. 47) que la curva es una parábola.

621 Si la perpendicular de la seccion fuese la linea PP''', y no se mantuviese inmobil el agua P, antes al contrario anduviese en un tiempo dado el espacio PM, es paten-

tente que podríamos considerar su velocidad como efecto Fig.
de la altura AP del agua respecto del punto P. Tambien en este supuesto es la curva AM''' una parábola, y es facilísimo de demostrar.

622 Síguese de aquí que prescindiendo de las re- 145.
sistencias, la cantidad de agua que en un tiempo dado pasa por la seccion cuya altura es AP''', es igual al espacio parabólico $AP'''M'''$, cuyo espacio $= \frac{2}{3} AP''' \times P'''M'''$. Por consiguiente si tomamos $P'''N = AB = \frac{2}{3} P'''M'''$ será el rectángulo $AP'''NB$ los dos tercios del rectágulo $AP'''M'''D$, y por lo mismo el rectángulo $AP'''NB$ espresará dicha cantidad de agua. Luego el rectángulo $AP'''NB$ es igual al espacio parabólico $AP'''M'''$, y será la *escala* ó medida de las velocidades desiguales de la seccion cuya altura es AP'''. Porque la suma de todas las ordenadas pm, PM, $P'M'$, $P''M''$ &c. de la parábola que representa las velocidades desiguales de dicha seccion, es igual á la suma de todas las ordenadas iguales AB, pn', $P'M'$, $P''M''$, $P'''N$, conforme se evidencia si del rectángulo $AP'''NB$, y del espacio parabólico $AP'''M'''$ se quita la parte comun $AM'NP'''$, pues los remanentes $AM'B$, $NM'M'''$ serán iguales. Por consiguiente las cantidades mn', Mn que les faltan á las cantidades pm, PM para ser iguales con las velocidades AB, pn', $P'M'$, son iguales con las cantidades $M'''N'$, $M''M'''$ que para lo mismo les sobran á las velocidades iguales AB, $P'M$, PO. Luego podemos considerar la velocidad $P'M'$ como la velocidad media de la seccion.

Es-

Fig. 623 Esta velocidad está á los quatro novenos de la altura AP'''' contando desde el punto A.

Porque yá que $P''''M'''' : P'M' :: \sqrt{AP''''} : \sqrt{AP'}$, y por construccion $P''''M'''' : P'M' :: 3 : 2$, tendremos tambien $\sqrt{AP''''} : \sqrt{AP'} :: 3 : 2$; de donde se saca sobre la marcha $AP' = \frac{4}{9} AP.''''$

146. 624 Tambien se nos hace preciso probar que *quando toda el agua que sale por una luz orizontal* MN *ó vertical* CD, *corre por un canal regular* MR *ó* DT *inclinado al orizonte, la superficie del agua corriente en el canal forma una hypérbola sólida.*

Prolónguese la linea del fondo hasta que concurra con el nivel del agua, formando con este el ángulo MEG ó DFB; córtese la corriente con un plano OP ó LK paralelo al orificio de la luz, MN ó DC; y llamemos V la velocidad en M, y u la velocidad en O. Por lo dicho (547) será $OP : MN :: V : u :: \sqrt{ME} : \sqrt{OE}$, y por consiguiente $(OP)^2 : (MN)^2 :: ME : OE$. De donde se sigue que la linea NP es con efecto una hypérbola sólida, trazada entre las asýmtotas ME, EG.

625 Por consiguiente, si suponemos que las dos asýmtotas formen un ángulo recto, y llamamos una abscisa
147. qualquiera AB, x; la ordenada correspondiente BE, perpendicular á AC, y; tendremos respecto de cada punto constante de la curva el producto sólido xyy igual á la potencia de la hypérbola, que es una cantidad constante. Por manera que si llamamos p esta potencia, será $xyy = p$, é

y

$y\sqrt{x} = \sqrt{p}$; que es cabalmente lo que sucede en una corriente de cantidad invariable, quando por qualesquiera de sus secciones han de pasar cantidades iguales de agua en tiempos iguales ; esto es, en el caso de ser las secciones recíprocamente como sus velocidades medias. Y quando las secciones son de igual latitud, las alturas vivas son recíprocas de las mismas velocidades medias ; de modo que llamando y qualquiera altura viva, y z la altura capaz de causar la correspondiente velocidad media, será en todas las secciones constante el producto $y\sqrt{z}$, y por lo mismo tendremos $y\sqrt{x} : y\sqrt{z} :: \sqrt{x} : \sqrt{z}$.

Fig.

Si las rectas BE, CD perpendiculares á la AC representan las alturas vivas de dos secciones, las BM, CN perpendiculares á la orizontal AL serán las alturas de donde baja el agua, y serán $\sqrt{BM}$, $\sqrt{CN}$ como las velocidades, y $BE\sqrt{BM} = GD\sqrt{CN}$. Pero los triángulos semejantes AMB, ANC dán $AB : BM :: AC : CN$; y tambien $\sqrt{AB} : \sqrt{BM} :: \sqrt{AC} : \sqrt{CN}$, y por lo mismo $BE\sqrt{AB} : BE\sqrt{BM} :: CD\sqrt{AC} : CD\sqrt{CN}$. Luego la raiz quadrada de la potencia de la hypérbola, esto es $\sqrt{p}$, es á la cantidad constante $y\sqrt{x} :: \sqrt{AB} : \sqrt{BM}$, ó $:: \sqrt{AC} : \sqrt{CN}$, ó en razon subduplicada de la secante á la tangente, ó del radio al seno recto del ángulo de inclinacion ; y la portada de la corriente será como la potencia de la hypérbola vulgar, cuyas abscisas tomadas sobre una de las asýmtotas representan las velocidades, y las ordenadas representan las alturas vivas de las secciones. 148

Si

Fig. Si sobre el ege AC cuyo vértice es A, se traza la pa-
147. rábola $AHOP$, y se prolongan las BC, CD hasta O y P; las BO, CP serán como las velocidades, y por consiguiente como $\sqrt{BM}:\sqrt{CN}$, y tambien como $\sqrt{AB}:\sqrt{AC}$. Por consiguiente lo mismo será buscar el centro del hyperboloide KED quando son dadas las ordenadas BE, CD, y la diferencia BC de las abscisas AB, AC, que buscar el vértice de la parábola, ó el principio de la caida, quando fuese dada la razon entre las ordenadas, y la diferencia BC de las abscisas. Porque en ambos casos se saca $\frac{BC\times(CD)^2}{(BE)^2-(CD)^2}$, ó $\frac{BC\times(BO)^2}{(CP)^2-(BO)^2}=AB$.

626 No solamente se verifica este hyperboloide en los canales de fondo inclinado, sino tambien en los de fondo orizontal, quando corre por ellos el agua con alguna aceleracion de movimiento; sin que haya entre estas dos especies de canales mas diferencia sino la de que en los canales de fondo orizontal la AC ocupa el lugar de la orizontal AL, y esta hace las veces de una linea inclinada al ori-
148. zonte, y las alturas vivas BE, CD de las secciones caen sobre las alturas BM, CN perpendiculares á la AC. Esta es la razon porqué en los canales de fondo orizontal la raiz quadrada de la potencia del hyperboloide está con la portada de la corriente en la razon subduplicada del radio á la tangente del ángulo de inclinacion LAC.

Repárese que el hyperboloide tiene su curvatura máxima en su vértice donde está á la mínima distancia del centro
149. A, y que quanto mas se aparta la curva del centro, tanto

mas

mas se arrima á la asýmtota, y mengua su curvatura. Esto Fig.
esplica porqué en las crecientes de los rios se acelera el movimiento de su superficie, y esta sube á mayor altura á distancias mayores del desembocadero, conforme lo han reparado muchas veces grandes Matemáticos.

627 Tambien se podrá determinar la concavidad máxima de un arco EID del hyperboloide comprendido entre dos alturas vivas BE, CD distantes una de otra una distancia conocida BC, tirando la subtensa ED, y dividiendo por medio en F la distancia BC con la perpendicular FG que corta en G la ED; porque será $FG = \frac{BE+CD}{2}$. Pero la ordenada FI en el hyperboloide es $= \sqrt{\left(\frac{AB \times (BE)^2}{AF}\right)}$; luego $FG - FI$, esto es, IG será $= \frac{BE+CD}{2} - \sqrt{\left(\frac{AB \times (BE)^2}{AF}\right)}$.

628 Dadas las ordenadas BE, CD, y la distancia BC que hay entre ellas, se sabe (III. 572) que la superficie del trapecio hyperbólico $EBCD = 2AC \times CD - 2AB \times BE$; por consiguiente si se busca la recta FI, que divide dicho trapecio por el medio, se sacará $FI = \frac{2AC \times CD - 2AB \times BE}{BC}$.

629 Finalmente, siendo (III. 389) en esta curva la subtangente FP dupla de la distancia AF; de los triángulos semejantes HPA, IPF se saca que la AH es sesquiáltera de FI, y tomando $AK = FI$, espresará HK el declivio de HI en un punto qualquiera dado I de la curva, respecto de la orizontal KI tirada por el mismo punto I. Todo esto presupuesto

630 Cuestion I. *Medir una agua corriente por un ca-*

Fig. 150. *canal regular, sensiblemente inclinado, cuyo fondo sea la recta* AC *inclinada al orizonte* AL.

Tómense dos secciones tan distantes una de otra, que sea perceptible la diferencia de las alturas vivas *BE*, *CD* perpendiculares al fondo *AC*, y por medio de la nivelacion, el declivio *FC* de una seccion á otra. Mídase tambien la distancia *BC*, y hágase: como la diferencia de los quadrados de las dos alturas *BE*, *CD* al quadrado de la menor *CD*, así la distancia *BC* á otra distancia que supondremos $=BA$, será el punto *A* el principio equivalente del alveo, ó de la caida. Pero como en la práctica se miden las distancias orizontalmente, y no las inclinadas como *BC*, se considerará la orizontal $BF = MN$, y con esto se sacará la quarta proporcional *MA*, la qual determina igualmente el punto *A*. Hallado el punto *A*, se hallará el declivio ó bajada correspondiente á cada seccion, y tambien la de otra qualquiera del mismo canal, haciendo: como la distancia *BF* á la caida *FC*, así la distancia *AM* á la caida *MB*, y la distancia *AN* á la caida *NC*; y á este tenor la caida correspondiente á una distancia qualquiera, por ser los triángulos *AMB*, *ANC* semejantes al triángulo *BFC*. Pero dada la bajada ó caida es facil hallar la velocidad que la corresponde. Multiplicando, pues, esta celeridad por la area de la seccion, el producto será la portada de la corriente que se busca.

631 Si no obstante un declivio qualquiera del fondo, fuesen iguales las alturas vivas de las dos secciones, esto será

rá señal cierta de ser uniforme el movimiento del agua, á Fig.
lo menos en aquel trecho. Porque entonces la aceleracion correspondiente al declivio la atajarán continuamente las resistencias; de modo que se medirá la portada del agua conforme diremos muy en breve respecto de los canales orizontales. Porque siendo $BE = CD$, será $(BE)^2 - (CD)^2 = 0$, y por consiguiente la distancia AB de la primera seccion al principio del alveo llega á ser $= \frac{BC \times (CD)^2}{0}$, esto es infinita, y la superficie de la corriente paralela al fondo como en los canales orizontales.

632 Cuestion II. *Medir el agua que corre por un canal orizontal, con un movimiento algo acelerado, sea la que fuere la causa de la aceleracion.*

En este caso las alturas vivas BE, CD de las dos sec- 151.
ciones se confundirán con las BM, CN, y la distancia BA se sacará tambien con hacer: como la diferencia de los quadrados de las dos alturas al quadrado de la menor, así la distancia medida CB es á la BA, que se busca. Por consiguiente, si mas arriba del punto A prosigue uniforme el canal, midiendo allí la altura viva, el cálculo se hará del mismo modo que en los canales orizontales. Pero si esto no se pudiese practicar, ni tampoco fuese posible averiguar, nivelando el trecho siguiente, el término de la *llamada* ó caida sin el socorro de otro dato, sería indeterminada la resolucion del caso, y por lo mismo de ningun socorro para la práctica. Por lo qual se deberán tomar dos secciones tan distantes una de otra, que la superficie de la corrien-

Fig. te entre ellas se pueda considerar sin recelo de error sustancial como un plano inclinado; esto es muy facil, ó si no, acúdase á la observacion (626) acerca de la curvatura del hyperboloide, y por este camino se vencerá la dificultad con un simple cálculo arismético. Hecho esto, se podrá tomar la diferencia EF de las dos alturas BE, CD por el pendiente de dicha superficie, y se proseguirá la operacion del mismo modo que en los canales de fondo inclinado, con el fin de hallar la caida correspondiente á cada una de las dos secciones.

633 Cuestion III. *Medir el agua que corre por un canal, quando ni la superficie de la corriente ni el fondo tienen declivio alguno, aun en un trecho grande entre las dos secciones.*

En este caso serán sensiblemente iguales las dos secciones; por lo mismo el canal será en todo este trecho sensiblemente orizontal, y correrán por él las aguas con velocidad uniforme, y la celeridad media se hallará (623) á los quatro novenos de la altura viva debajo de la superficie de la corriente.

Se podria dudar que esta velocidad uniforme seã la que verdaderamente corresponde á la sola altura viva, ó si acaso es mayor ó menor que ella. Se desvanecerá la duda observando el movimiento de la misma agua en un trecho de alguna estension mas arriba, y mas abajo de las dos secciones. Porque todo impulso precedente se estingue bastante presto, y la igualdad de las dos secciones nos ase-

gu-

gura la uniformidad del movimiento, cuya uniformidad en un trecho notable no se compone de ningun modo con la aceleracion del agua siguiente, ni tampoco con el atraso de reboso ocasionado de algun obstáculo puesto mas abajo de las secciones. Y finalmente se podrá verificar dicha uniformidad de movimiento por medio de alguno de los instrumentos con que dejamos dicho que se puede medir la velocidad de las aguas corrientes. Fig.

Despues de hallada la portada por este método, se deberán llevar en cuenta las resistencias que son respectivamente mayores en las menores alturas vivas.

634 Aclararemos todo lo dicho hasta aquí con algunos egemplos.

I. Sea un canal de fondo inclinado; y sea el intervalo entre las dos secciones de 90 pies; su declivio de 4 pulgadas; la altura viva *BE* de la seccion superior de 24 pulgadas; la de la inferior *CD*, de 21; la latitud del canal, de 4 pies.

Del quadrado 576 de la altura mayor, réstese el quadrado 441 de la altura menor, y dígase: como la resta 135 al quadrado menor 441, así el intervalo de 90 pies á la distancia desde el principio del alveo á la seccion superior que se hallará de 294. Hágase despues: como 90 á 294, ó como 135 á 441, así el declivio dado de 4 pulgadas al declivio correspondiente á la seccion superior, que se hallará ser 13 pulg. 0.9; y por consiguiente para la seccion inferior 17 pulg. 0.9. Pero al pendiente de

Fig. 13 pulg. 0.9 corresponde una velocidad de pies 8. 1. 0 por segundo, los quales multiplicados por la superficie de la seccion superior de 8 pies quadrados, darán en pies cúbicos 64. 8. 0. Asimismo, al declivio de 17 pulg. 0.9 corresponde una velocidad de pies 9. 2. 10; los quales, multiplicados por la superficie de la seccion inferior de 7 pies quadrados, dán en pies cúbicos 64. 8. 10 que espresan la portada de la corriente en cada segundo, prescindiendo de las resistencias. Pero llevando en cuenta las resistencias, haremos (614): como 432 á 265, así la portada hallada 64. 8. 10 es á la portada efectiva que será de pies cúbicos 39. 8. 6 cada segundo.

II. Sea orizontal el fondo del canal; el intervalo entre las dos secciones sea como antes de 90 pies; la altura de la seccion superior sea de 24 pulgadas; la de la inferior de 21 pulgada; será tambien en este caso la distancia desde el principio equivalente del alveo á la seccion superior de 294 pies. Pero para sacar la caida correspondiente en el supuesto de que en dicho intervalo de 90 pies la superficie corriente se pueda tomar por un plano inclinado, hágase: como 135, diferencia de los quadrados de las dos alturas, es á 441 quadrado de la altura menor, así la diferencia de las mismas alturas, esto es 3 pulgadas, á la caida para la seccion superior, que se halla ser $9\frac{4}{5}$ pulgadas, y por consiguiente respecto de la seccion inferior será $12\frac{4}{5}$ pulgadas. Calculando qualquiera de estas dos secciones, se halla la portada de 56 pies cúbicos por

se-

segundo, prescindiendo de las resistencias. Pero atendiendo Fig. á estas, ó haciendo: 4 3 2 : 2 6 5 :: 5 6 pies cúbicos : la portada efectiva, se halla que esta es de pies cúbicos 3 4. 4. 2.

En esta especie de canales las caidas respectivas de las dos secciones se pueden sacar con mas brevedad. Respecto de la superior, basta dividir el quadrado menor 441 por la suma 45 de las dos alturas, y se sacará la caida 9 pulgadas $\frac{4}{5}$; y respecto de la inferior, divídase el quadrado 576 de la altura mayor por la misma suma 45, y saldrán 12$\frac{4}{5}$ pulgadas, y esto porque las caidas son proporcionales á las distancias del principio del alveo; y en este supuesto las mismas son proporcionales con sus diferencias.

III. Si así el fondo del canal como la superficie de la corriente fuesen sensiblemente orizontales, y la altura viva fuese de 27 pulgadas; la velocidad media se hallará á los $\frac{4}{9}$ de la altura misma, esto es, á 12 pulgadas mas abajo de la superficie del agua, y será de pies 7 . 8 . 11 por segundo, los quales multiplicados por la superficie de la seccion de 9 pies quadrados, dán en pies cúbicos 58 . 5 . 3, y atendiendo á las resistencias, se saca la portada efectiva de pies cúbicos 35 . 10 . 2 no mas.

635 Se han egecutado muchísimos esperimentos con la mira de cotejar los resultados que dá este método con los efectivos, y siempre se ha hallado entre ellos alguna diferencia, siendo el gasto teórico unas veces mayor, otras menor que el gasto esperimental ó efectivo. Pero esto no

Fig. es de estrañar, porque 1.° en la teórica no se llevaron en cuenta las casualidades bastante frecuentes que hacen mayor la dificultad de estas operaciones, y alteran alguno de sus elementos. 2.° son muy dificultosos de medir con total exactitud los tiempos y los espacios. 3.° en los cálculos se padecen descuidos inevitables, por razon de los quales una omision despreciable en el gasto de un segundo, llega á ser de muchísima consideracion si se repite muchos segundos, conforme sucede en los esperimentos que duran mucho tiempo. Pero de estas causas y otras semejantes no se pueden originar las diferencias que se notan en esperimentos hechos en cuerpos de agua de corta altura viva. Otra causa debe de haber distinta de las espresadas, que quando no sea la única, es por lo menos la principal; consiste esta causa en espresar siempre por una misma razon la diferencia que vá del gasto efectivo al gasto minorado por las resistencias; porque esta razon es tanto mayor, segun averiguó el Sr. Michelotti, que trahe los espresados esperimentos, quanto menor es la altura viva de la corriente. De estos esperimentos, y de los cálculos que acerca de ellos hizo el citado Autor, infiere que quando la altura viva pasa de un pie, es algo corta la razon de 18 á 11 (esta es la que él aplica á sus esperimentos), y tiene por mas exacta la de 432 á 265; quando las alturas son mayores, tiene por mas cabal la razon de 324 á 199. Pero á medida que las alturas vivas van siendo menores, la razon de 18 á 11 vá saliendo mayor de lo que corresponde á cada altura.

ra. Por manera que respecto de una altura de 8 pulgadas, el número 11 se acerca mucho á 10, y respecto de una altura de 6 pies, pasa un poco de $9\frac{1}{2}$. Fig.

De la medida de las aguas corrientes por canales irregulares.

636 Si el medir las aguas corrientes por canales regulares, en los quales no se hallan otras resistencias, que las inevitables del fondo y de las orillas, se mira como empresa dificultosa; crece con exceso la dificultad respecto de los canales irregulares, en los quales las resistencias varían, y se multiplican sobremanera. No obstante, aunque no podemos dar un método general, daremos otro practicable en los mas de los casos, y una aproximacion para todos.

Consideremos con esta mira una por una las irregularidades simples, manifestaremos como cada una tiene su particular remedio, y quando concurrieren varias á un tiempo se podrá sacar en virtud de esto lo que se hubiere de egecutar en cada caso particular. No trataremos esta materia con la estension que pide su importancia; pero lo que digéremos dará bastante luz sobre el asunto.

637 La primera irregularidad simple es la direccion tortuosa de la corriente. Quando esta no se pudiere ó no se quisiere remediar, por no ser absolutamente indispensable, bastará medir la distancia entre las dos secciones siguiendo la curvatura de la misma corriente.

La segunda irregularidad simple es la variacion que

Fig. padece la anchura del canal ; pero esta no puede por sí sola impedir la práctica del método, porque siempre las areas de las dos secciones nos darán la razon entre sus medias velocidades. Lo propio se debe decir aun quando las dos secciones fuesen de figura enteramente distinta.

La tercera irregularidad simple es el declivio de todo el fondo, ó parte de él ácia una orilla ; ó parte ácia una, y parte ácia otra. Pero practicando el método de las dos secciones, tampoco impide la operacion esta irregularidad ; y solo se debe atender á la irregularidad de las figuras, quando se mide el agua con el regulador, el tubo de Pitot, ó de otro modo equivalente.

La quarta es la variacion de declivio del suelo entre las dos secciones. Quando esta no se pueda remediar, con tomar en otra parte la una ó la otra de las dos secciones ó las dos, se deberá reparar si el ángulo que forma entre las dos la variacion del pendiente, puede causar alguna diferencia en la velocidad natural entre las dos secciones. Bastará las mas veces nivelar el piso del fondo, y de la superficie de la corriente, para venir en conocimiento del declivio correspondiente al trecho del canal comprendido entre las dos secciones.

La quinta irregularidad, bastante comun, es la que proviene de la arena, cascajo ó peñas ; de las concavidades hechas en la parte mas blanda del fondo ó de las orillas. Debe proceder con sumo cuidado el que se empeña en remediar esta especie de irregularidad, si quiere

pun-

puntos en que fundar con seguridad sus cálculos. Fig.

Sabiendo, pues, cómo se remedia cada una de estas irregularidades simples, será mas facil discurrir algun modo de remediar las mas complicadas. Pero en los mas de los casos en que es menester valuar con alguna exactitud el cuerpo de agua que lleva una grande corriente irregular, se pueden escusar, ó por lo menos remediar en gran parte las irregularidades mas considerables. Porque la precision solo se requiere por lo regular en los canales artificiales, en los quales siempre se halla algun trecho regular de suyo, ó que con alguna maña se puede reducir á que lo sea, con lo que se facilita ó asegura la operacion de la medida.

Despues de consideradas con cuidado todas las circunstancias, se medirán dos secciones en el trecho de canal que mas hiciere al caso, la distancia que entre ellas hubiere, y el declivio así del fondo como de la superficie en dicho trecho. Las areas de las secciones siempre darán la razon entre sus medias celeridades modificadas por las resistencias, y diciendo: la diferencia de los quadrados de las dos secciones es al quadrado de la menor, como la distancia entre las dos secciones á otra, se hallará la distancia de la seccion mayor ó superior al principio equivalente del alveo; y despues de averiguado por medio de la nivelacion el declivio del fondo entre las dos secciones, con una simple proporcion se sacará, como antes (630), su altura ó caida correspondiente á cada una de las dos secciones.

Si

Fig. 638 Si el fondo fuese orizontal, y fuesen por lo mismo perpendiculares respecto de él las alturas vivas, y la superficie de la corriente entre las dos secciones fuese sensiblemente plana, la caida correspondiente á cada seccion se hallará por un método parecido al de antes (634). Respecto de la seccion superior, se dividirá el producto del quadrado de la altura viva de la seccion inferior, multiplicado por la latitud de la misma seccion, aunque sea su latitud media, por la suma de las dos secciones, y el cociente será la caida correspondiente á la seccion superior; por lo que toca á la seccion inferior, se dividirá el producto del quadrado de la altura viva de la seccion superior multiplicado por la latitud de la misma, aunque sea su latitud media, por la misma suma de las dos secciones, el cociente será la caida correspondiente á la seccion inferior.

Por manera, que si llamamos A la altura viva de la seccion superior; B, su latitud; a, la altura viva de la seccion inferior; b, su latitud; la caida correspondiente á la seccion superior será $= \frac{ba^2}{AB + ab}$, y la caida correspondiente á la seccion inferior será $= \frac{BA^2}{AB + ab}$. Todo esto debe entenderse en el supuesto de que la superficie corriente entre las dos secciones se considere como un plano inclinado.

Esta regla se puede demostrar tambien sin apelar á lo dicho (630). Porque si llamamos a la altura viva de una seccion; b, la altura viva de otra seccion de igual latitud y cuerpo de agua, serán tambien aquí las velocidades recíprocas de las alturas a, b, y su diferencia $a - b$

se

se podrá tomar por la intermedia, ó por la diferencia de Fig.
las dos abscisas correspondientes á dos ordenadas de la parábola, de las quales la razon es conocida. Haciendo, pues, para la primera seccion $a^2 - b^2 : b^2 :: a - b : \frac{ab^2 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{b^2}{a + b}$, esta será su caida. Asimismo, para la segunda seccion se hará $a^2 - b^2 : a^2 :: a - b : \frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2} = \frac{a^2}{a + b}$, esta será su caida independientemente de la distancia que hubiere entre ellas, y de la distancia al principio del alveo.

639 Si la seccion primera ó superior fuese mayor que la segunda é inferior, esto será señal cierta de movimiento retardado y de reboso, y el exceso de esta á aquella dará á conocer la proporcion del atraso de la velocidad respecto de la primera seccion, el qual podrá provenir ó del declivio del fondo, ó de angostarse sobrado el alveo, ó de algun obstáculo que se oponga al curso libre del agua puesto mas abajo de la seccion. Como quiera, practicando lo mismo que antes, no se hallará el principio equivalente del alveo, pero sí la estension del reboso, y quánta caida le falta á la seccion inferior, para ser igual respecto de la celeridad con la superior, y se podrá con esto considerar como orizontal el trecho del canal que coge entre las dos secciones.

Si las areas de las dos secciones se hallan iguales, será cierto que sus velocidades medias son iguales; por consiguiente se podrá considerar como uniforme el movimiento entre las dos secciones, y tendrá aquí su aplicacion lo que dejamos dicho (631).

Si

Fig. 640 Si por ningun camino fuese posible medír dos secciones, conforme manda la regla, y fuese preciso medir una sola de la qual tampoco se pueda averiguar la correspondiente caida; en este caso será indispensable valerse de algun instrumento; y el mas acomodado y seguro es sin duda alguna el tubo de Pitot, que hemos de mirar como el mejor recurso para los casos que dejan burlada nuestra industria, no perdonando diligencia ni cuidado para precaver la instabilidad de sus vibraciones. Tambien se podrá hacer uso del quadrante, no teniendo á mano otro instrumento, y teniendo presentes las precauciones especificadas (608). Porque es muy facil equivocarse en el uso de este instrumento, particularmente si se hubiesen de averiguar las velocidades efectivas sin el socorro de algun esperimento previo y seguro.

Ultimamente, téngase presente que practicando alguno de los métodos declarados hasta aquí, siempre se deberán reducir ó las cantidades ó las velocidades medias, ó las secciones á la razon de las resistencias respecto de las diferentes alturas vivas, esto es á la razon de 324 á 199 en las alturas máximas, y á la de 432 á 265 en las que pasaren de un pie, y en las menores á la razon entre 18 y aquel número menor de 11 que le hemos señalado.

De la Percusion de los fluidos.

641 Quando un fluido en movimiento encuentra un cuerpo ó un obstáculo qualquiera, impele por precision dicho.

cho cuerpo ú obstáculo, con una fuerza determinada; por- Fig.
que las partículas fluidas son otros tantos cuerpecillos, los quales multiplicados por su velocidad componen una cantidad determinada de movimiento. Si en vez de suponer que el fluido se mueve, le suponemos en reposo, y que un cuerpo choque con él con una velocidad determinada, la fuerza con que el fluido resistirá al cuerpo propuesto, será igual á la fuerza con la qual el fluido movido con la velocidad del cuerpo impelería el mismo cuerpo supuesto en reposo. En esto no hay la menor duda. Por consiguiente la percusion y resistencia de los fluidos siguen unas mismas leyes, y se miden de un mismo modo.

642 Hemos manifestado (IV. 10) la diferencia que hay entre las fuerzas muertas, y las fuerza vivas. Las primeras son, segun digimos, meras presiones que no causan ninguna velocidad actual y finita, y no la causarian sino despues de obrar un tiempo finito: las otras que comunmente se llaman fuerzas de percusion, causan una velocidad finita y actual, y se pueden considerar como sumas de presiones acumuladas. Es evidente que qualquiera fuerza de presion se puede contrarestar ó medir con un peso; porque un peso no es otra cosa que una masa en quien obra la pesantez, la qual es tambien una fuerza de presion. Por lo que mira á las fuerzas de percusion, si suponemos que obran su efecto en un instante indivisible, serán infinitas respecto de las fuerzas de presion, y por lo mismo no se podrán medir con peso alguno. Pero no se concibe como la fuer-

Fig. za de un cuerpo en movimiento, que es una cantidad finita, puede en un instante indivisible causar un efecto finito, esto es, comunicar á otro cuerpo una cantidad determinada de movimiento. Toda comunicacion de movimiento se hace en un tiempo finito, aunque puede ser tan corto que no percibamos su duracion. Podemos, pues, mirar en general las fuerzas de percusion como que obran por grados del mismo modo que las fuerzas de presion, y como que obran su efecto en un tiempo finito estremadamente corto. En este supuesto se pueden medir con pesos; porque obrando la gravedad, un tiempo finito, en un cuerpo, causa una fuerza viva, capaz por lo mismo de equilibrarse con otra fuerza viva. Síguese de aquí que quando un fluido choca con un cuerpo, su impulso siempre se puede reducir á cierto peso.

643 Es sumamente dificultoso determinar, y ya lo dimos á entender (IV. 346) las leyes de la percusion de los fluidos por un término que admita un rigor escrupuloso, y tenga sus aplicaciones á casos prácticos. No se ha podido hallar todavia acerca de este asunto una teórica que satisfaga plenamente. En la que se sigue por lo comun, y tiene la ventaja de ser muy sencilla, se supone que el fluido se compone cada instante, en la direccion de su movimiento, de una infinidad de filetes paralelos cada uno de los quales dá su golpe, sin estorvarse unos á otros, cuyo supuesto no es para admitido, porque no se puede verificar hablando con rigor, y encamina en algunos casos á resultados muy distantes de la verdad. No obstante, dos moti-

tivos nos obligan á declarar aquí esta teórica, á pesar de su imperfeccion. 1.° porque facilita la inteligencia de varias obras de arquitectura naval, cuyos autores la tomaron por fundamento de sus investigaciones. 2.° porque se puede aplicar, sin recelo de equivocacion muy sustancial, para el cálculo de las máquinas movidas por medio de ruedas, de corrientes de agua ó ayre; cuyo asunto es muy importante, y llama aquí toda nuestra atencion. Despues traheremos esperimentos que manifestarán en qué casos se puede admitir ó se debe desechar absolutamente. Fig.

Teórica ordinaria de la percusion de los fluidos.

644 *Quando un mismo fluido* MXZN, *cuyas partes se mueven todas con la misma celeridad, dá perpendicularmente en los dos planos* AB, AR, *las fuerzas de los choques son entre sí como dichos planos.* 152.

Porque suponiendo que todas las moléculas fluidas se mueven en las direcciones *IK*, *OR* &c. perpendiculares á los dos planos propuestos, el impulso contra el plano *AB*, es al impulso contra el plano *AR*, como el producto del número de moléculas que dán en *AB*, por su velocidad, es al producto del número de moléculas que dán en *AR*, por su velocidad. Pero las masas que dán en tiempos iguales en los planos *AB*, *AR* son prismas cuyas bases son dichos planos, y la altura comun es la velocidad del fluido. Luego la razon entre el impulso en el plano *AB*, y el impulso en el plano *AR* es con evidencia la misma que la ra-

Fig. razon entre el plano AB, y el plano AR.

152. 645 *Si dos fluidos de una misma especie* MXZN,
153. EGHF, *movidos con velocidades diferentes, dieren perpendicularmente en los dos planos* AB, CD *en reposo, las fuerzas de los choques serán entre sí como los productos de los planos por los quadrados de las velocidades de los fluidos.*

Porque si suponemos que sea

El impulso en AB .... $= F$

El impulso en CD .... $= f$

La masa fluida que choca con AB .... $= M$

Su velocidad que es la del fluido $MXZN$ $= V$

La masa fluida que choca con CD .... $= m$

Su velocidad que es la del fluido $EGHF$ $= u$;

tendremos $F : f :: MV : mu$. Pero yá que los fluidos son de una misma especie, las masas M y m serán entre sí como sus volúmenes (IV. 31), y sus volúmenes son como los productos de los planos AB, CD que les sirven de base, multiplicados por las velocidades de los fluidos que representan sus alturas. Así, tendremos $M : m :: AB \times V : CD \times u$; y $MV : mu :: AB \times V^2 : CD \times u^2$. Luego tambien $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$.

646 Conviene reparar que si los fluidos no fuesen de la misma especie, la razon de las densidades debería entrar en la razon de las masas que chocan á un mismo tiempo con los planos AB, CD. Entonces *los choques estarian en razon compuesta de los planos, de las densidades de los fluidos y de los quadrados de las velocidades de los mismos flui-*

fluidos. Esta prevencíon se debe tener muy presente quando se trata de comparar el choque de un fluido con el de otro fluido de diferente densidad; pongo por caso el choque del agua con el del ayre. Pero aquí y en los artículos siguientes, supongo, para abreviar, que los fluidos son de la misma especie ó de igual densidad. Fig.

647 Tambien se debe reparar que discurrimos en el supuesto de que todas las moléculas de un mismo fluido siempre se muevan con la misma velocidad. Si se moviesen con velocidades diferentes, se debería tomar la velocidad media, y mirarla como la velocidad del fluido. Así, en la proporcion $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$ (645) las letras V y u representarian las velocidades medias de los dos fluidos.

648 Si los planos *AB*, *CD*, en vez de estar en reposo en el instante que los fluidos les dán el impulso, conforme hemos supuesto, se moviesen uniforme y paralelamente á las direcciones de los fluidos, sería igualmente facil de sacar la razon de los impulsos contra dichos planos. Porque supongamos que en un tiempo dado, el plano *AB*, en virtud de su velocidad primitiva y uniforme, llegase á *ab*; y que el plano *CD*, en virtud de su velocidad primitiva y uniforme, llegase á *cd*; de suerte que *KT*, *PQ* representen dichas dos velocidades primitivas. Sean *VT* y *LQ* las velocidades contemporaneas de los dos fluidos. Es patente que los impulsos de los fluidos contra los planos *AB*, *CD* serán los mismos que si los planos estuviesen en repo-

Fig. so, y los fluidos en vez de moverse con las velocidades VT, LQ se moviesen solamente con las velocidades VK, LP, pues los planos se eximen del choque con las velocidades KT, PQ. Luego si llamamos F y f los impulsos; V, la velocidad VT; v, la velocidad KT; u, la velocidad LQ; u', la velocidad PQ, tendremos $F : f :: AB \times (V - v)^2 : CD \times (u - u')^2$.

Se echa de ver igualmente que si los planos, en vez de huir directamente de los fluidos, fueran ácia ellos con las velocidades v, u', tendríamos $F : f :: AB \times (V + v)^2 : CD \times (u + u')^2$. Así, juntando estos dos casos, tendremos $F : f :: AB \times (V \mp v)^2 : CD \times (u \mp u')^2$.

649 Puede suceder que el uno de los planos, pongo por caso, el plano AB esté en reposo; entonces $v = 0$, y la proporcion será $F : f :: AB \times V^2 : CD \times (u \mp u')^2$. De donde se saca $f = F \times \frac{CD \times (u \mp u')^2}{AB \times V^2}$, cuya fórmula servirá para comparar el impulso perpendicular contra un plano que se mueve, con el impulso perpendicular contra un plano en reposo.

152. 650 *Si el fluido* MXZN *choca perpendicularmente con*
154. *el plano* AB *en reposo, y el fluido* EGHF *choca oblicuamente con el plano* CD *tambien en reposo; el impulso en el plano* AB *será al impulso que resulta perpendicularmente en el plano* CD, *como el producto del plano* AB *por el quadrado de la velocidad del fluido* MXZN, *y por el quadrado del seno total, es al producto del plano* CD *por el quadrado de la velocidad del fluido* EGHF, *y por el quadrado del seno del án-*

gu-

gulo RCD *de incidencia del fluido* EGHF *sobre el plano* CD. Fig.

Porque si llamamos

El impulso en *AB* .... F
El que resulta perpendicularmente en *CD*.. f
La velocidad del fluido *MXZN* V
La velocidad del fluido *EGHF*................ u
La masa que choca con *AB*...................... M
La masa que choca con *CD*...................... m
Su velocidad perpendicular á *CD*........... u'
El seno total.. R
El seno del ángulo de incidencia *RCD*..... p;

tendremos desde luego $F : f :: MV : mu'$. Pero si tiramos *DR* perpendicular á *CR*, ó á la direccion del fluido, es evidente que el número de las moléculas que chocan con *DC* es el mismo que el número de las moléculas que chocan con *DR*. Así, los prismas fluidos que chocan en tiempos iguales con los planos *AB*, *CD*, son entre sí como sus bases *AB*, *DR*, multiplicadas por las velocidades de los fluidos que son sus alturas. Tenemos, pues, $M : m :: AB \times V : DR \times u$; ó (con reparar que $DR = CD \times \frac{p}{R}$) $M : m :: AB \times V : CD \times \frac{p}{R} \times u :: AB \times V \times R : CD \times u \times p$. A mas de esto, si en la direccion de un filete qualquiera *xn* del fluido *EGHF*, se toma la parte *ny* para representar la velocidad de dicho fluido, y se construye el paralelogramo rectángulo *ntyr*, cuyo lado *nt* es perpendicular, y el lado *nr* paralelo á *DC*, es evidente que de las dos velocidades *nt*, *nr*, en las quales la velocidad *ny* se resuelve, sola la prime-

 ra

Fig. ra contribuye para el choque, y la segunda no se debe llevar en cuenta. Comparemos la velocidad nt ó u' con la velocidad u del fluido $EGHF$, tendremos $u' : u :: ry : ny :: p : R$, y por consiguiente $u' = u \times \frac{p}{R}$. Tendremos, pues, $MV : mu' :: AB \times V^2 \times R : \frac{CD \times u^2 \times p^2}{R} :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$. Luego finalmente, $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$.

Servirá esta proporcion para comparar la percusion oblicua con la percusion perpendicular, estando en reposo los dos planos chocados en el instante de los choques.

651 Quando las velocidades V y u son iguales, tenemos simplemente $F : f :: AB \times R^2 : CD \times p^2$, cuya proporcion servirá para comparar el impulso perpendicular de un fluido en un plano, con el impulso del mismo fluido ó de un fluido semejante en otro plano chocado oblicuamente.

652 De aquí tambien se saca un método para comparar unas con otras las percusiones oblicuas, estando siempre en reposo los planos chocados; porque si usamos las mismas denominaciones de antes (650), y llamamos A la superficie del plano AB; B, la del plano CD; si suponemos despues otro tercero plano C con quien otro tercer fluido choque oblicuamente con la velocidad v, y llamamos f' la fuerza que resulta perpendicularmente contra este plano; q, el seno del ángulo en el qual es chocado; tendremos las dos proporciones siguientes:

$$F : f :: A \times V^2 \times R^2 : B \times u^2 \times p^2,$$
$$f' : F :: C \times v^2 \times q^2 : A \times V^2 \times R^2,$$

las quales, despues de multiplicadas ordenadamente, dán f':

f

$f :: C \times v^2 \times q^2 : B \times u^2 \times p^2.$ De donde se infiere que *las fuerzas* f' *y* f *están entre sí en razon compuesta de los planos, de los quadrados de las velocidades, y de los quadrados de los senos de los ángulos de incidencia.* Fig.

653 Supongamos ahora que estando siempre en reposo el plano *AB*, en el instante que el fluido *MXZN* le dá perpendicularmente, el plano *CD* se mueva paralelamente á sí mismo en una direccion qualquiera *Cc* ó *Dd*, en el instante que le dá oblicuamente el fluido *EGHF*. Tomemos en la direccion de este fluido la recta *LQ* para que represente su velocidad, y resolvamosla en otras dos velocidades *LI*, *LK*, de las quales la primera es la misma que la *Cc* ó *Dd* del plano *CD*. Es evidente que el fluido obra en el plano *CD* con sola la segunda velocidad *LK*, y que el choque es el mismo que si el plano *CD* estando en reposo, el fluido viniera á chocar con él en la direccion *RLK*, con la velocidad *LK*. Luego si llamamos v esta velocidad; m, el seno del ángulo *RLD* ó *KLC*; f, la fuerza que resulta perpendicularmente contra el plano *CD*; y si á mas de esto, llamamos como antes (645), F el impulso perpendicular en el plano *AB*; V, la velocidad del fluido *MXZN*; R, el seno total; tendremos $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times v^2 \times m^2.$ 152. 155.

654 Es facil de hallar la espresíon de la velocidad v, y del seno m, por medio de la velocidad *LQ*, de la velocidad *Cc*, del seno del ángulo *CLQ* que forma la direccion verdadera del fluido con el plano *CD*, y del seno del ángulo *QLI*

Fig. que forma la direccion del fluido con la del movimiento primitivo del plano CD. Porque bagemos desde el punto K la KT perpendicular á LQ, y supongamos la velocidad $LQ = u$, la velocidad LI ó $KQ = u'$, el seno del ángulo KQT ó $QLI = n$, su coseno $= p$; el seno del ángulo $QLC = q$; su coseno $= r$. Tendremos $KT = \frac{nu'}{R}$, $QT = \frac{pu'}{R}$, $LT = u - \frac{pu'}{R}$. A mas de esto, como el ángulo KLC es la diferencia de los dos ángulos QLC, QLK, tendremos, por lo probado (I. 165), $m = q \times \frac{LT}{LK} - r \times \frac{KT}{LK} = \frac{q}{v}\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{r}{v} \times \frac{nu'}{R}$. Luego $m^2v^2 = \left[q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right]^2$. Substituyendo este valor de m^2v^2 en la proporcion de antes (653), saldrá $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times \left[q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right]^2$. Estará, pues, averiguada la razon entre la percusion perpendicular en un plano inmobil, y la percusion oblicua en un plano que se mueve paralelamente á sí mismo.

655 Despues de manifestado como se deben comparar unas con otras las diferentes especies de percusiones de los fluidos, nos falta determinar el valor absoluto de una de ellas para inferir el de todas las demás. Pero como la percusion perpendicular en un plano inmobil, es la mas sencilla de todas, es natural que la tomemos por unidad fundamental. Se saca de la tabla siguiente.

In-

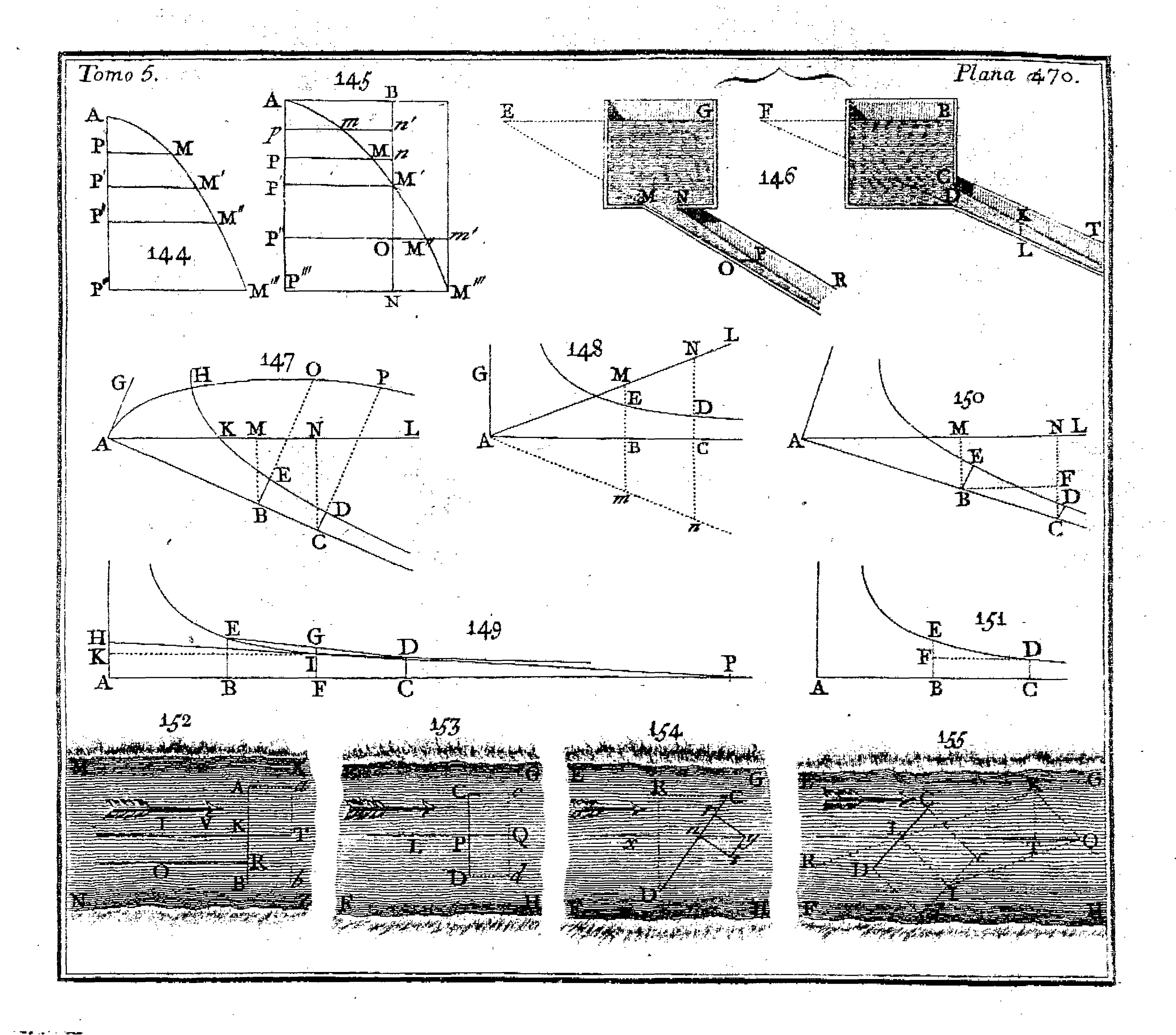

144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155

Fig.

Impulsos del agua en una superficie plana de 1 pie en quadro chocada perpendicularmente.

Velocidad en 1.″	Impulsos.		Velocidad en 1.″	Impulsos.	
Pies.	Lib.	Onz.	Pies.	Lib.	Onz.
1	1	3	13	203	0
2	4	13	14	235	0
3	10	12	15	270	0
4	19	3	16	300	0
5	30	0	17	334	0
6	43	0	18	389	0
7	59	0	19	434	0
8	75	0	20	480	0
9	97	0	21	529	0
10	120	0	22	580	0
11	145	0	23	635	0
12	172	0	24	688	0

Es patente que por medio de esta tabla y de la teórica antecedente, se podrá determinar el impulso del agua en una superficie plana *dada*, inmobil ó mobil, con tal que se conozca la velocidad del agua, y la de la superficie en el caso de que esta se mueva. Por lo que mira á los impulsos de los demás fluidos, tambien se determinarán, con tal que se conozca la razon entre las densidades de dichos fluidos, y la del agua. Por egemplo, si suponemos que la densi-

Fig. sidad del ayre sea $\frac{1}{850}$ de la del agua, dividiendo cada uno de los impulsos de la tabla precedente por 850, sacaremos los impulsos correspondientes del ayre.

Con la mira de manifestar los usos de la teórica, la aplicaremos á algunos casos particulares.

156. 656 Pregunta I. *Sea un triángulo isósceles* ACB *en reposo, con el qual choque un fluido cuya direccion es perpendicular á su base* AB; *se pregunta, ¿qué razon hay entre el impulso que recibirá dicho triángulo paralelamente á su altura CD, y el impulso directo y perpendicular que recibiría su base* AB?

Llamemos F el impulso directo en AD ó DB; f, el impulso que resulta perpendicularmente en AC ó CB, y tendremos (651) $F : f :: AD\,(\text{sen } tot)^2 : AC \times (\text{sen } ACD)^2 :: AD \times (AC)^2 : AC \times (AD)^2 :: AC : AD$. Luego $f = \frac{F \times AD}{AC}$. Consideremos ahora que los impulsos en AC y CB se destruyen en parte; porque si tomamos dos filetes correspondientes OR, or, y representan los impulsos perpendiculares, en los puntos R y r, las rectas RF, rf iguales y perpendiculares á los lados AC, CB del triángulo, y construimos los paralelogramos rectángulos $ERHF$, $erhf$, cuyos lados RH, rh sean paralelos á AB, y los lados RE, re paralelos á CD; es evidente que de las quatro fuerzas RH, RE, rh, re, en que las dos fuerzas RF, rf se resuelven, las dos RH, rh se destruirán mutuamente, y no quedarán mas que las dos fuerzas RE, re para impeler el triángulo paralelamente á CD. Fuera de esto, si llama-

mamos f' la fuerza RE ó re, tendremos $f : f' :: RF : RE$ Fig.
$:: AC : AD$, y por consiguiente $f' = \frac{f \times AD}{AC}$. Substituyendo en lugar de f su valor $\frac{F \times AD}{AC}$, tendremos $f' = \frac{F \times (AD)^2}{(AC)^2}$. Luego $f' : F :: (AD)^2 : (AC)^2$, y $2f' : 2F :: (AD)^2 : (AC)^2$, cuya proporcion nos está diciendo que el *impulso que el triángulo recibirá paralelamente á su altura*, *es al impulso directo que recibiría su base, como el quadrado de la semibase es al quadrado del uno de los lados.* Conociendo, pues, la segunda de estas dos fuerzas, se conocerá tambien la primera.

657 Luego, quando el triángulo isósceles ACB es rectángulo, el impulso que recibe paralelamente á su altura no es mas que la mitad del impulso directo que recibiría su base. Porque entonces el triángulo rectángulo ADC es isósceles, y se verifica que $(AD)^2 : (AC)^2 :: 1 : 2$.

658 Síguese tambien de aquí que si un quadrado 157.
$ACBM$ recibiere un impulso en la direccion de su diagonal CM, y despues otro impulso perpendicularmente al uno de sus lados AC, el primer impulso será al segundo como 1 á $\sqrt{2}$, ó como 7 á 10 con poca diferencia. Porque en el primer caso, solo el triángulo ACB recibe el choque, la otra mitad AMB del quadrado no le esperimenta; y en el segundo, solo el lado AC es chocado. Luego con llamar M el primer impulso; A, el segundo, y á mas de esto B, el impulso perpendicular que recibiría AB, sacaremos las dos proporciones siguientes.

$$M : B :: 1 : 2, \ (657),$$

$$B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1, \ (644),$$

que

Fig. que multiplicadas ordenadamente dán $M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$.

659 Pregunta II. *Supongamos que la semicircunfe-*
158. *rencia* AQB *sea chocada de un fluido cuya direccion es perpendicular al diámetro* AB *ó paralela al radio* QC, *¿qué razon ha de haber entre el impulso que recibirá dicha semicircunferencia paralelamente á* QC, *y el impulso directo y perpendicular que recibiría el diámetro* AB?

Despues de dividida la semicircunferencia AQB en una infinidad de elementos Ff, Ll &c. con las rectas FL, fl paralelas al diámetro AB; y tiradas las ordenadas FS, fs, LT, lt &c; si llamamos F el choque directo que recibiría Ff ó Ss; f', el choque que recibe Ff paralelamente á QC, tendremos (656) $f' = \frac{F \times (FR)^2}{(Ff)^2}$. Tírese el radio CF. Los triángulos semejantes FRf, FSC darán $FR : Ff :: FS : CF$, y por consiguiente $\frac{(FR)^2}{(Ff)^2} = \frac{(FS)^2}{(CF)^2}$. Luego $f' = \frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$. Así, para averiguar el impulso total que recibe la semicircunferencia paralelamente á QC, solo falta hallar la suma de todas las cantidades $\frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$ ó $\frac{Ss \times (FS)^2}{(CF)^2}$, representando el impulso directo contra FR ó Ss esta misma linea. Pero si hacemos gyrar el semicírculo ABQ al rededor del diámetro AB, engendrará una esfera cuyo elemento será (III. 597) $\frac{n}{1} \times (FS)^2 \times Ss$, siendo $\frac{n}{1}$ la razon entre la circunferencia y el diámetro. Por consiguiente el impulso total que se pide está con el sólido de la esfera, en la razon constante de $\frac{1}{(CF^2)}$ á $\frac{n}{1}$. Pero el sólido de la esfera $= n \times (CF)^2 \times \frac{2}{3} AB$ (II. 234). Luego el impulso que

se

se busca $= \frac{2}{3} AB$; quiero decir, que representando la linea AB el impulso contra esta misma linea, los dos tercios de AB representarán el impulso que recibe la semicircunferencia paralelamente á QC. Luego estos dos impulsos están entre sí en la razon de 3 á 2; y en conociendo el uno, se conocerá tambien el otro. Fig.

660 Esto manifiesta que el impulso que recibe un cilindro vertical puesto en medio de un rio, es los dos tercios del que recibiría el paralelipípedo rectángulo circunscripto al mismo cilindro, y colocado de modo que una de sus caras esperimentase el choque directo del fluido. Porque el semicilindro anterior, y la cara correspondiente del paralelipípedo circunscripto, son las únicas partes con que choca el fluido, y resguardan de su impulso las demás partes.

661 Pregunta III. *Supongamos ahora que* AQB *represente una media esfera engendrada por la revolucion del quadrante de círculo* AQC *al rededor del radio* QC, *y que esperimente el choque de un fluido que le dé paralelamente á* QC; *¿qué razon habrá entre el impulso que obrare para hacerla andar en la misma direccion* QC, *y el impulso perpendicular que recibiría el círculo máximo engendrado por la revolucion del radio* CA?

Es evidente (659) que el impulso que recibe paralelamente á QC la zona esférica que traza el arco Ff, es al impulso perpendicular que recibiría la zona circular correspondiente, trazada por el elemento Ss, como $\frac{Ss \times (FS)^2}{(CF)^2}$ es á Ss, ó como $(FS)^2$ es á $(CF)^2$. Pero si tiramos la recta ab

igual

Fig. igual y paralela á AB; trazamos una parábola aCb, cuyo vértice esté en C, y sea aQ ó bQ su última ordenada; prolongamos SF hasta P, y tiramos EH perpendicular á CQ; la propiedad de la parábola dará $(EH)^2 = CH \times CQ$, ó $(CS)^2 = SE \times SP$, ó $(CF)^2 - (FS)^2 = (SP - EP) \times SP$, ó $(FS)^2 = EP \times SP$. Luego $(FS)^2$ es á $(CF)^2$, como $EP \times SP$ es á $(CF)^2$ ó $(SP)^2$, esto es, como EP es á SP. Luego el impulso que la suma de las zonas esféricas ó la media esfera recibe paralelamente á QC, es al impulso perpendicular que recibiría la suma de las zonas circulares, ó la area del círculo engendrado por la revolucion de AC, como el sólido originado de la revolucion de todas las lineas EP al rededor de CQ, es al sólido engendrado por la revolucion de todas las lineas PS al rededor de QC; esto es, como el paraboloide engendrado por la revolucion de la media parábola CQa al rededor del ege CQ, es al cilindro engendrado por la revolucion del rectángulo $CQaA$ al rededor del mismo ege. Pero el paraboloide no es mas que la mitad del cilindro; porque considerando el paraboloide como formado de una infinidad de círculos trazados por las ordenadas EH, se echará de ver que suponiendo el ege CQ dividido en una infinidad de partes iguales, dichos círculos que son entre sí como las abscisas correspondientes, componen una progresion arismética, cuyo número de terminos es la altura CQ, el primer término es cero, y el último es el círculo que traza aQ ó AC. De donde se sigue que el paraboloide es igual al producto del es-

pre-

presado círculo por la mitad de la altura CQ, siendo así que el cilindro es igual al producto del mismo círculo por toda la altura CQ. Luego finalmente el *impulso que recibe paralelamente á* QC *la media esfera* AQB, *no es mas que la mitad del que recibiría perpendicularmente el círculo máximo que le sirve de base.* Fig.

6 6 2 Es patente que el otro emisferio no recibe impulso alguno del fluido, y que por consiguiente lo mismo es poner al choque de un fluido una esfera entera que una media esfera no mas, con tal que en este último caso el fluido que viene á dar en la superficie convexa del emisferio, tenga una direccion perpendicular al círculo máximo que le sirve de base.

6 6 3 Pregunta IV. *El fluido* EGHF *vá á dar oblicuamente en el plano* CD, *el qual está precisado de alguna causa esterior á moverse paralelamente á sí mismo en la direccion dada* Cc; *se pregunta ¿en qué ángulo se ha de hacer el choque, para que el fluido dé la mayor cantidad posible de movimiento al plano* CD *en la misma direccion* Cc? 159.

Represente la recta LQ la velocidad del fluido, y resolvamos esta velocidad en otras dos, tales que la primera LI sea la misma que la del plano CD, y por consiguiente no obra en él efecto alguno; la segunda sea LK, y es la única que contribuye para mover el plano. En virtud de la misma velocidad LK, resultará perpendicularmente á CD (653) un impulso proporcional á $CD \times (LK)^2 \times (\text{sen } MLK)^2$. Si la LA perpendicular á CD representa esta

fuer-

Fig. fuerza, y la resolvemos en otras dos fuerzas, la una *LH* paralela á la direccion dada *Cc*, la otra *LZ* perpendicular á la misma direccion; es evidente que por no poderse mover el plano sino en la direccion *Cc*, la fuerza *LH* es la única que deba ser atendida. A mas de esto, se echa de ver que tendremos fuerza $LH =$ fuerza $LA \times \frac{\text{sen}\, LAH}{\text{sen}\, tot}$; ó si no, prolongando *HL* indefinitamente ácia *N*, considerando que el ángulo $HAL =$ el ángulo *MLN*, y substituyendo en lugar de fuerza *LA* su valor, será fuerza $LH = CD \times (LK)^2 \times (\text{sen}\, MLK)^2 \times \frac{\text{sen}\, MLN}{\text{sen}\, tot}$.

Esta fuerza debe ser, por las condiciones de la cuestion, la mayor que sea posible, ó un *máximo*. Tómese en la *LM* la parte arbitraria *LM* por seno total, y desde el punto *M* bágense las perpendiculares *MB*, *MN* á las rectas *LK*, *LN*. Es evidente que *MB* será el seno del ángulo *MLK*, y *MN* el seno del ángulo *MLN*. Luego podremos ver á la fuerza *LH* esta espresion $\frac{CD \times (LK)^2 \times (MB)^2 \times MN}{LM}$. En esta espresion, las cantidades *CD*, *LK*, *LM* son dadas, y siempre constantes, sea el que fuere el ángulo que forma el plano *CD* con la direccion *OL* del fluido. Porque la longitud del plano *CD* es dada inmediatamente; la velocidad *LQ* del fluido, la direccion y la cantidad de la velocidad inicial *Cc* del plano *CD*, son dadas, y esto dá á conocer la posicion y cantidad de *LK*; finalmente *LM* se tomó á arbitrio. Luego por causa de la posicion fija y conocida de las rectas *LK*, *LN*, las únicas cantidades que pueden variar en la espresion del *máximo* son las rectas *MB* y *MN*; y se

echa

echa de ver que la cuestion propuesta se reduce á dividir el ángulo dado *KLN* en otros dos *KLM*, *MLN* por medio de la recta *LM*, de modo que tirando desde un punto *M*, tomado á arbitrio en dicha linea, las perpendiculares *MB*, *MN* á *LK*, y á *LN*, el producto $(MB)^2 \times MN$ sea un *máximo* entre todos sus semejantes. Fig.

664 Para resolver esta cuestion, trazaremos dentro del ángulo dado *BLN*, con el radio *LM* el arco *KMX*; y tendremos presente que como una cantidad no llega á ser un máximo, sino porque crece hasta dicho punto, y despues mengua, mas acá y mas allá del punto *M* de *máximo* ha de haber dos puntos infinitamente próximos *m* y *f*, tales que si tiramos las perpendiculares *mb*, *mn*, *fg*, *fh* á las rectas *LB*, *LN*, los productos $(mb)^2 \times mn$, y $(fg)^2 \times fh$ son iguales entre sí, ó tendremos $(mb)^2 \times mn = (fg)^2 \times fh$. Pero si desde los puntos *m* y *f* bajamos las perpendiculares *mu*, *fy* á las rectas *fg*, *mn*, tendremos $fg = mb + fu$, y $fh = mn - my$. Luego la equacion precedente es la misma que $(mb)^2 \times mn = (mb + fu)^2 \times (mn - my)$, ó $2mb \times fu \times mn + (fu)^2 \times mn - (mb)^2 \times my - 2mb \times fu \times my - (fu)^2 \times my = 0$; y como las lineas *fu*, *my* son infinitamente pequeñas respecto de *mb* y *mn*, se sigue que los términos $(fu)^2 \times mn$, $-2mb \times fu \times my - (fu)^2 \times my$ son infinitamente pequeños respecto de los demás, y se pueden desechar. Así, la equacion se reduce á $2mb \times fu \times mn - (mb)^2 \times my = 0$, ó $2fu \times mn = mb \times my$. De donde se saca $fu : my :: mb : 2mn$. Tírese el radio 166.

Lm;

Fig. *Lm*; los dos triángulos semejantes *fum*, *Lbm*, y los dos triángulos semejantes *myf*, *Lnm* dán las dos proporciones siguientes $fu : fm :: Lb : Lm$, $fm : my :: Lm : Ln$, y multiplicándolas ordenadamente saldrá $fu : my :: Lb : Ln$. Luego tendremos $mb : 2mn :: Lb : Ln$, ó, con substituir en lugar de las lineas *mb*, *mn*, *Lb*, *Ln* las lineas *MB*, *MN*, *LB*, *LN* que discrepan de ellas infinitamente poco; tendremos $MB : 2MN :: LB : LN$, ó $MB : LB :: 2MN : LN$. Es, pues, tal la propiedad que caracteriza el punto *M*, *que el seno del ángulo* MLB *es á su coseno, como el duplo del seno del otro ángulo* MLN *es á su coseno.*

665 Supongamos el ángulo $KLX = m$, el ángulo $KLM = x$, y por consiguiente el ángulo $MLX = m - x$, el seno total $ML = 1$. Tendremos por la propiedad de que acabamos de hablar, $\text{sen}\, x \,.\, \cos(m-x) = 2 \cos x \,.\, \text{sen}(m-x)$. Pero (I. *656*) $\cos(m-x) = \cos m \,.\, \cos x + \text{sen}\, m \,.\, \text{sen}\, x$, (I. *655*) $\text{sen}(m-x) = \text{sen}\, m \,.\, \cos x - \cos m \,.\, \text{sen}\, x$, (II. *369*) $\text{sen}\, x \,.\, \cos x = \frac{\text{sen}\, 2x}{2}$, $2(\cos x)^2 - (\text{sen}\, x)^2 = \frac{1+3\cos 2x}{2}$ (II. *398* y *397*). Por consiguiente, despues de egecutadas todas las reducciones, la equacion se reducirá á $\frac{\text{sen}\, 2x}{\frac{1}{3} + \cos 2x} = \frac{\text{sen}\, m}{\cos m}$. De aquí se saca la construccion siguiente.

666 Prolongaremos el radio *KL* una cantidad $LR = \frac{KL}{3}$, tiraremos paralelamente á *LX* la recta *RV* que encuentre en *V* el arco *KMX* prolongado; tiraremos el radio *VL*. Si dividimos en dos partes iguales el ángulo *VLK* con

la recta LM, el punto M será el punto que se busca. Porque con bajar desde los puntos X y V las perpendiculares XE, VH al radio KL, los triángulos semejantes XEL, VHR, darán $\frac{VH}{RH} = \frac{XE}{LE}$, ó $\frac{VH}{RH} = \frac{\text{sen}\, m}{\cos m}$, ó con hacer el ángulo $KLV = 2x = 2KLM$, $\frac{\text{sen}\, 2x}{\frac{1}{3} + \cos 2x} = \frac{\text{sen}\, m}{\cos m}$. Fig.

667 Quando en el instante que el fluido choca con el plano CD, este plano está en reposo, obrando el fluido para moverle en la direccion dada Cc; la velocidad inicial LI del plano $= 0$; la velocidad LK se confunde con la velocidad del fluido; y la construccion precedente se queda la misma, sin mas diferencia que la de substituir el ángulo QLM en lugar del ángulo KLM. De aquí se saca la determinacion del ángulo mas ventajoso que debe formar la direccion del ayre con el ala de un molino de viento, quando esta ala está en reposo en el instante que la dá el fluido, ó quando la velocidad del viento se puede considerar como infinita respecto de la del ala. Porque se sabe que la jaula de un molino de viento ordinario descansa sobre un ege vertical, tan mobil que el arbol orizontal en donde están las alas, siempre se coloca en la direccion del viento, suponiéndola orizontal. Una ala qualquiera se debe mirar como un rectángulo vertical, colocado oblicuamente respecto del arbol, á fin de que el impulso del ayre se pueda resolver en dos fuerzas, la una paralela al arbol, que se pierde, la otra puesta en un plano perpendicular al arbol, que mueve la máquina. Se echa, pues, de ver que para 159.

Fig. determinar la posicion mas ventajosa del ala en la hypótesi propuesta, no solo se debe hacer $LI = 0$, sino que tambien se debe suponer Cc perpendicular á la direccion OL del fluido. Entonces se saca que el ángulo QLM es de $54^{\circ}\ 44'$.

668 La hypótesi general de tener el plano CD una velocidad inicial y finita LI quando le dá el fluido, puede servir para que formemos juicio de la situacion mas ventajosa de las alas de un molino que anda con una velocidad comparable con la del viento, conforme sucede siempre en la práctica. Se halla que en este caso la direccion del viento debe formar con el ala un ángulo que pase de $54^{\circ}\ 44'$. Pero para resolver rigurosamente esta cuestion, se debe atender á que por hallarse los diferentes puntos de una misma ala á diferentes distancias del ege del arbol, tienen distintas velocidades de rotacion que se deben llevar en cuenta en la resolucion. A mas de esto, es de advertir que puede ser tal la velocidad del ala que impeliendo el viento su estremo inferior, su estremo superior impela al contrario al ayre; esto pide que se tome entonces la diferencia, y no la suma de los impulsos. Todas estas consideraciones hacen mas complicada la cuestion, y empeñan en un cálculo larguísimo.

Esperimentos y reflexiones acerca de la percusion de los fluidos.

669 La teórica de la percusion de los fluidos que acabamos de declarar se funda en principios muy sencillos y faciles de aplicar á la práctica. Pero, segun hemos insinua-

do

do (643), padece algunas dificultades. Supone esta teórica que todas las moléculas chocan con los cuerpos que encuentran, del mismo modo que si dichas moléculas fuesen cuerpos aislados y libres. Pero para que el choque se hiciese así, sería menester que cada molécula despues de dar su golpe, se aniquilase para dar lugar á la molécula siguiente de dar tambien el suyo. Es evidente que la superficie chocada no recibe inmediatamente, y con toda su intensidad el impulso de cada partícula. Las partículas centrales son chocadas por las que las siguen, y es preciso que la columna se ensanche hasta cierta distancia de la superficie chocada para dar al fluido lugar de escaparse, y dejar libre el camino al que vá llegando continuamente. Síguese de aquí que la percusion de un fluido contra un plano no se debe calcular como si este plano padeciera con efecto el choque de todos los filetes fluidos y paralelos que le corresponden. Pero tal vez los choques se desnaturalizan de un mismo modo, y los choques efectivos siguen la misma ley, por lo menos con corta diferencia, que los choques naturales y teóricos. Vamos á preguntárselo á la esperiencia, é indagaremos quatro cosas: 1.° Qual es la medida de la percusion perpendicular. 2.° Si las percusiones perpendiculares con una misma velocidad, son proporcionales á las superficies chocadas. 3.° Si las percusiones perpendiculares en superficies iguales son proporcionales á los quadrados de las velocidades. 4.° Finalmente, si las diferentes especies de percusiones son (siendo igual todo lo demás) proporciona- Fig.

Fig. les á los quadrados de los senos de los ángulos de incidencia.

670 Las figuras representan las balanzas con que he medido el choque del agua. La cruz *AB* tenia $3\frac{1}{2}$ pies de largo, y en la parte de arriba tenia un filo para que no
161. se le quedase agua ninguna. En el uno de sus estremos llevaba
162. una plancha de cobre *efgh*, muy llana y bruñida, cuya su-
163. perficie superior prolongada pasaba por el ege del movimiento de las balanzas, y cuyo centro *A* correspondia al ege *TA* del tubito aditicio y vertical *PQqp* por donde salia el agua para darla; dicha plancha tenia $2\frac{1}{2}$ pulg. de diámetro. Para fijar la posicion exacta del punto *A*, se pusieron en los puntos *e*, *f*, *g*, *h* quatro puntas de aguja, las quales comparadas con unos puntos puestos en la basa *pq* del tubo *PQqp*, servian para dividir exactamente el mismo tubo en dos partes iguales, en direcciones diferentes. La espiga de las balanzas corria por dentro de un cañon; y por medio de un tornillo se la podia subir y bajar á arbitrio, y darla vueltas orizontalmente. El semicírculo graduado *MON* llevaba un plomo que servia para señalar si las balanzas estaban en situacion orizontal ó inclinada á arbitrio. En cada esperimento se ponia en *S* un peso para contrarrestar el peso del agua.

671 Esperimentos I, II, III, IV. La altura cons-
161. tante *TA* del agua en el depósito mas arriba del centro *A*
163. de la plancha, era de 4 pies. Se dejó una pulgada de intervalo entre el centro *A* de la misma plancha, y el estremo del tubo para que saliese el agua con desahogo. En

to-

todos los casos salia á caño lleno. Sentado esto, Fig.

I. Siendo de 10 lineas el diámetro *pq* del tubo, el peso *S* que hacia equilibrio con el choque perpendicular del agua, era de 1 libra 5 onzas 7 dragmas 8 granos, esto es, de 12608 granos en todo.

II. Siendo siempre de 10 lineas el diámetro *pq*, el peso *S* que hacia equilibrio con el choque oblicuo del agua en un ángulo *TAB* de 60°, era de 1 libra 5 onzas 2 dragmas 8 granos, esto es, de 12248 granos en todo.

III. Siendo de 6 lineas el diámetro *pq*, el peso *S* que hacia equilibrio con el choque perpendicular del agua, era de 7 onzas 6 dragmas 20 granos, esto es, de 4484 granos en todo.

IV. Siendo de 6 lineas el diámetro *pq*, el peso *S* que hacia equilibrio con el choque oblicuo del agua en un ángulo *TAB* de 60 grados, era de 2 onzas 3 dragmas 67 granos, esto es, de 4315 granos en todo.

672. Esperimentos V, VI, VII, VIII. La altura constante *TA* del agua en el depósito mas arriba del centro *A* de la plancha era de 2 pies. Siempre se dejó 1 pulgada de distancia entre el centro *A* de la misma plancha, y el estremo del caño, y el agua salia á caño lleno.

I. Siendo de 10 lineas el diámetro *pq* del tubo, el peso *S* que hacia equilibrio con el choque perpendicular del agua, era de 10 onzas 7 dragmas 42 granos, esto es 161.
de 6306 granos en todo.

II. Siendo siempre de 10 lineas el diámetro *pq*, el 163.

Fig. peso S que hacia equilibrio con el choque oblícuo del agua en un ángulo TAB de 60 grados, era de 10 onzas 5 dragmas 5 granos, esto es, de 6125 granos en todo.

III. Siendo de 6 lineas el diámetro pq, el peso S que
161. hacia equilibrio con el choque perpendicular del agua, era de 3 onzas 7 dragmas 11 granos, esto es, de 2243 granos en todo.

IV. Siendo siempre de 6 lineas el diámetro pq, el
163. peso S que hacia equilibrio con el choque oblicuo del agua en un ángulo TAB de 60 grados, era de 3 onzas 5 dragmas 70 granos, esto es, de 2158 granos en todo.

673 Reflexiones. Algunos Autores pretenden que quando un fluido choca perpendicularmente con un plano, la fuerza del choque es igual al peso de una columna del mismo fluido, cuya base fuese el orificio ó la superficie chocada, y la altura fuese la altura correspondiente á la velocidad del agua. Segun otros, dicha fuerza es dupla. Veamos por medio de los esperimentos I, III, V, VII, quál de estas dos opiniones vá mas fundada. Suponemos que el pie cúbico de agua pesa 70 libras. Ya que en nuestros esperimentos el agua sale por tubos aditicios cuyas paredes sigue, la altura correspondiente á su velocidad no es (286) mas que los $\frac{2}{3}$ de la altura del agua en el depósito mas arriba del centro de la plancha. En virtud de estos datos salen los pesos de las columnas cilíndricas de agua que hemos de considerar quales ván aquí apuntados.

Diá-

Diám. de la col.	Alt. de la col.	Peso	Fig.
10 lin.	$\frac{8}{3}$ pies.	6518 granos.	
6	$\frac{8}{3}$	2346	
10	$\frac{4}{3}$	3259	
6	$\frac{4}{3}$	1173	

Sentado esto, si comparamos estos pesos con los que miden la percusion en los quatro esperimentos citados, echaremos de ver que la primera opinion acerca de la medida de la percusion de los fluidos es enteramente falsa, y que la segunda no se aparta mucho de la verdad. Sin embargo parece que en esta opinion se supone la fuerza todavia algo mayor de lo que es en realidad.

Reparé que quando la plancha *efgh* tocaba el orificio *pq*, la percusion era notablemente menor (todo lo demás siendo igual), que quando habia entre el orificio y la plancha algun intervalo que permitia al agua adquirir toda la plenitud de velocidad de que es capaz. En el primer caso, falta poco para que la percusion perpendicular sea igual al peso de una columna cuya base fuese el orificio, y la altura fuese la del agua mas arriba del mismo orificio. Quizá los Autores de la primera opinion hicieron de este modo los esperimentos en que la fundaron.

674. De la comparacion del esperimento I con el esperimento III, y del esperimento V con el esperimento VII, parece seguirse que siendo iguales las velocidades, las percusiones perpendiculares son sensiblemente proporcionales á

Fig. las superficies chocadas. Con efecto, siendo iguales las velocidades, las moléculas son igualmente desviadas de sus direcciones; y los golpes que darian naturalmente, si estuviesen libres, deben ser alterados igualmente con corta diferencia en ambos casos. Sin embargo, conviene reparar que, segun parece, el impulso crece ó mengua en mayor razon que la superficie, sea porque el desvio de las moléculas es mayor, y disminuye mas á proporcion el choque, en una superficie menor que en otra mayor, sea porque la velocidad del fluido mengua algun tanto por razon del rozamiento, quando mengua el orificio, sea finalmente por razon de estas dos causas juntas. No me parece que pueda ocasionar equivocaciones de algun momento en la práctica el suponer, conforme requiere la teórica (644), que dada la velocidad del fluido, el choque perpendicular del agua contra un plano es proporcional á la superficie chocada.

675 Por la comparacion del esperimento I con el esperimento V, y del esperimento III con el esperimento VII, se echa de ver que las percusiones perpendiculares contra una misma superficie son entre sí, con cortísima diferencia, como las alturas mas arriba de los centros de percusion; ó, lo que viene á ser lo mismo, como los quadrados de las velocidades de los fluidos. Por consiguiente la esperiencia y la teórica concuerdan notablemente en este punto (645).

676. Quando el agua dá oblicuamente en la plancha

cha como en los esperimentos II, IV, VI, VIII, resulta de Fig.
este choque, segun la teórica (651), una fuerza perpendicular á la plancha, cuya espresion es $F \times \frac{B \times p^2}{A \times R^2}$, llamando R el seno total; p, el seno del ángulo TAB; A, la parte de la plancha, que corresponde al orificio pq, quando las balanzas están orizontales; F, el impulso que dicha superficie recibe entonces; B, la parte de la plancha que el agua viene á cubrir oblicuamente. Esta fuerza tiene por brazo de palanca el brazo CA de las balanzas, siendo así que el peso S que hace equilibrio con ella, tiene por brazo de palanca la perpendicular CL tirada desde el centro C á su direccion. Tendremos, pues, $F \times \frac{B \times p^2}{A \times R^2} \times CA = S \times CL$. Pero $CL = CB \times \frac{p}{R} = CA \times \frac{p}{R}$; y por la doctrina de las proyecciones, $B = A \times \frac{R}{p}$. Substituyendo estos valores en la equacion precedente, sacaremos $S = F$. Así, segun la teórica, siempre se necesitaría el mismo peso S para hacer equilibrio con el choque del agua, estuviesen orizontales las balanzas, ó inclinadas al orizonte en un ángulo qualquiera. Pero los quatro esperimentos citados contradicen este resultado; pues quánto mas mengua el ángulo TAB, tanto mas mengua el peso S. Inferamos, pues, que respecto del modo con que los senos de los ángulos de incidencia entran en las espresiones de los choques perpendiculares y oblicuos comparados unos con otros, la teórica no concuerda con la esperiencia.

Es de advertir que una de las causas porque la percusion perpendicular es respecto de la percusion oblicua, con-

for-

Fig. forme enseña la esperiencia, mayor de lo que debería ser segun la teórica; es que en el choque perpendicular las moléculas, despues de dar su golpe, tienen menos libertad para escaparse que en el choque oblicuo; y que con esto se forma sobre la plancha, en el primer caso, un montoncito de agua que con su peso aumenta un tantico la percusion.

677 Síguese de las investigaciones precedentes, que las percusiones perpendiculares de los fluidos en superficies planas siguen entre sí, con corta diferencia, las proporciones que la teórica determina; pero que no sucede lo mismo respecto de las percusiones oblicuas en superficies planas, ni tampoco por consiguiente respecto de las percusiones en superficies curvas que se pueden considerar como un conjunto de superficies planas que esperimentan el choque del fluido con diferentes oblicuidades.

Bien podrá ser que alguno tenga por insuficientes los esperimentos referidos para decidir los puntos á que se refieren, porque se han hecho en pequeño. Lo confesamos, pero tambien se nos debe conceder que estos esperimentos son muy dificultosos de hacer en grande con una precision suficiente; que los nuestros tienen la circunstancia de ser directos; que para egecutarlos, no se ha hecho uso de ningun movimiento de rotacion; que en ellos se ha medido inmediatamente la percusion sin tener que rebajar ningun rozamiento, ni otra resistencia; y que finalmente admiten mucha precision que estoy seguro de que no les ha faltado.

Del

Fig.

Del modo mas acertado de aprovechar la accion de un fluido para mover una máquina.

678 Llamamos indistintamente *Máquina Hydráulica* toda máquina que sirve para levantar agua á una altura determinada, ó que se mueve mediante el impulso de una corriente. Los agentes que causan ó mantienen el movimiento en el primer caso, pueden ser los que se quisieren. Muchas veces una máquina cuyo destino es levantar agua se mueve al mismo tiempo con el impulso de una corriente. Entonces es dos veces hydráulica. Los efectos de todas estas máquinas se determinan, como los de las demás, por las leyes de la Mecánica.

679 No repetiremos aquí estas leyes por haberlas dado á conocer con bastante individualidad en el tomo antecedente; pero consideraremos que la fuerza motriz siempre tiene una razon determinable por la forma y el modo de obrar de la máquina, con el efecto real y util que la misma máquina produce respecto de las miras con que se construyó. Esta fuerza y su efecto le pueden representar pesos conocidos, animados de velocidades conocidas. Sean, pues, P el primer peso; V, su velocidad; Q, el segundo peso; v, su velocidad. Es evidente desde luego que el efecto $Q.v$ jamás puede ser mayor que la causa $P.V$. Ván, pues, muy equivocados algunos maquinistas que se persuaden á que pueden aumentar el producto de la fuerza motriz con palancas, ruedas, ó por otros medios equivalentes. Las palancas

no

Fig. no tienen por sí virtud ninguna activa; solo pueden servir para modificar de diferentes modos los dos factores P y V, cuyo producto compone la fuerza motriz. Si se aumenta el peso motor P, se disminuye la velocidad V en la misma razon; y recíprocamente si se aumenta V, se disminuye P en la misma razon. El efecto $Q \cdot v$ sería igual á toda la causa $P \cdot V$, si parte de ella no se consumiera en superar el rozamiento, ó en causar en la máquina movimientos estraños é inutiles respecto del que se necesita. Tenemos, pues, en la práctica $P \cdot V > Q \cdot v$. La mejor máquina será aquella que, en virtud de su construccion y el movimiento de sus partes, haga que la cantidad $Q \cdot v$ se aproxime lo mas que se pueda á $P \cdot V$. Si se considera $Q \cdot v$ como el efecto total de la máquina, ó si se incluye en esta cantidad, no solo el efecto util, sino tambien los que se originan de las resistencias, tendremos en todos los casos $Q \cdot v = P \cdot V$.

680 No es mi ánimo averiguar aquí el efecto de ninguna máquina hydráulica en particular: propóngome tratar un asunto mas general; indagaremos el mejor modo de aprovechar la fuerza del agua, como principio motor de una máquina. Pero de quantos medios hay para mover una máquina por medio del impulso de una corriente, ninguno es mas simple, mas acomodado, ni mas libre de inconvenientes que el que consiste en armar la máquina de muchas ruedas que reciban el impulso de una corriente de agua, y se le comuniquen. Nos ceñiremos, pues, á determinar el efecto que puede producir

cir una rueda hydráulica, sea que la mueva el impulso del Fig.
agua ó su peso; y nos empeñaremos en darla la forma y las dimensiones mas conducentes para economizar la fuerza motriz. Trataremos este importante asunto con novedad á muchos respectos; y si impugnamos algunos Autores será con la mira no mas de hacer patente la verdad.

Teórica del movimiento de las ruedas que mueve el impulso del agua.

681 La teórica ordinaria de la percusion de los fluidos padece, segun hemos visto, muchas dificultades. No obstante la seguiremos aquí, porque los choques que se deben considerar no son por lo regular muy oblicuos, y porque dicha teórica solo se vá apartando mas y mas de la verdad quando vá siendo mas oblicua la direccion de los choques. Por otra parte traheremos esperimentos que ratificarán los resultados que dá, y determinarán el juicio mas ó menos ventajoso que de ella se debe formar.

682 Para que una rueda *AHLK* dé vueltas en virtud del impulso de un fluido, es preciso que lleve en la circunferencia unas alas *AB*, *DE*, *KS* &c. en las quales vaya dando el fluido succesivamente. Estas alas son por lo comun rectángulos dirigidos al centro *C* de la rueda, y entonces las rectas *AB*, *DE*, *KS* &c. representan las *alturas* de las alas, y sus *latitudes* las representan los demás lados de los rectángulos, perpendiculares al plano de la rueda. Digo *por lo comun*; porque en algunas ruedas no se di- 164

ri-

Fig. rigen las alas al centro, ni tienen la forma rectangular, conforme diremos á su tiempo.

683 Qualquiera se hará cargo de que la fuerza que puede hacer una rueda movida del agua, pende de la posicion de sus alas, de su número, de su magnitud, y de la proporcion que hay entre su velocidad y la de la corriente. Veamos, pues, cómo concurren para su formacion todos estos elementos, con el fin de averiguar la combinacion que la puede dar toda la intensidad posible.

164. 684 Sea *XYTZ* una corriente orizontal, cuyos puntos se mueven todos con una misma velocidad, que hace dar vueltas á la rueda vertical *AHLK* armada con alas rectangulares *AB*, *DE*, *KS* &c. todas dirigidas ácia el centro *C*. Supongamos que dando vueltas esta rueda, levante un peso *Q*, atado al estremo de una cuerda *Qghf* que pasa por la polea de retorno *g*, y se arrolla al rededor del cilindro ó tambor *fbd*. En los primeros instantes del choque del agua, el movimiento del peso *Q* se acelera; pero al cabo de tres ó quatro vueltas llega á la uniformidad, y se mantiene siempre despues en el mismo estado. Entonces el impulso del fluido está cada instante en equilibrio con el peso *Q*, y con la resistencia del rozamiento. Se echa, pues, de ver que si representa v la velocidad uniforme del peso *Q*, el producto Qv representará el efecto real de la máquina, despues de rebajadas las resistencias que consumen continuamente parte de la fuerza motriz.

685 Se ha disputado mucho tiempo sobre si una rueda

tie-

tiene mas fuerza para dar vueltas quando es chocada perpendicularmente, que quando lo es oblicuamente. Para saber lo que hay de cierto en este punto, supongamos que el ala *AB* esté en la vertical, y que por consiguiente el ala siguiente *DE* esté inclinada á la corriente. Tomaremos en *AB* los dos puntos infinitamente próximos *R*, *r*, tiraremos despues las orizontales *RM*, *rm* que determinan en la *DE* el elemento *Mm* correspondiente á *Rr*. Comparemos el momento del impulso que recibiría el elemento *Rr* si fuera chocado libremente, ó si el ala *DE* que le tapa fuese aniquilada, con el momento del impulso que resulta perpendicularmente contra el elemento *Mm*. El choque contra cada punto de *Rr* es mayor que el choque contra cada punto de *Mm*. Pero por otra parte $Rr < Mm$, y el brazo de palanca *CR* de *Rr*, es menor que el brazo de palanca *CM* de *Mm*. La valuacion cabal de los dos momentos de que se trata puede sola decidir qual de los dos es mayor. Fig.

686 Supongamos que *Mx* represente el espacio que anda en un instante el fluido, y que *Rt*, *My* representen los espacios andados en el mismo tiempo por los puntos *R*, *M* de las alas *AB*, *DE*. Si tomamos *CM* por seno total, y llamamos *V* la velocidad *Mx* del fluido; *u*, la velocidad *Rt* del punto *R*, el impulso contra *Rr* será (653) $Rr \times (V - u)^2 \times (CM)^2$; y el momento de este impulso respecto del centro *C* de la rueda, será $Rr \times (V - u)^2 \times (CM)^2 \times CR$. Para determinar el momento del impulso contra *Mm*, resolveremos la velocidad *Mx* del fluido en otras dos *My*,

Mz,

Fig. Mz, de las quales la primera es la misma que la del punto M, y no causa por consiguiente efecto alguno en el elemento Mm, la segunda es la única á que se debe atender. En virtud de esta última velocidad, resulta (653) perpendicularmente contra Mm un impulso cuya espresion es $Mm \times (Mz)^2 \times (\text{sen}\, DMz)^2$, y cuyo momento respecto del centro C es por consiguiente $Mm \times (Mz)^2 \times (\text{sen}\, DMz)^2 \times CM$. Pero ya que My es perpendicular á CM, y xzn es paralela á My, es evidente que el triángulo Mnx es rectángulo en n, y semejante al triángulo MRC. Tendremos, pues, $CM : CR :: Mx : xn = Mx \times \frac{CR}{CM} = V \times \frac{CR}{CM}$; y por ser $zx = My = Rt \times \frac{CM}{CR} = u \times \frac{CM}{CR}$, tendremos $nz = nx - zx = V \times \frac{CR}{CM} - u \times \frac{CM}{CR} = \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CR)^2}\right) \times \frac{CR}{CM}$. Luego por ser sen $DMz = nz \times \frac{CM}{Mz}$ (siendo siempre CM el seno total); el momento $Mm \times (Mz)^2 \times (\text{sen}\, DMz)^2 \times CM$ será $Mm \times \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CR)^2}\right)^2 \times (CR)^2 \times CM$. Así, el momento del impulso contra Rr es al momento del impulso contra Mm, como $Rr \times (V - u)^2 \times (CM)^2 \times CR$ es á $Mm \times \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CR)^2}\right)^2 \times (CR)^2 \times CM$; ó como $Rr \times (V - u)^2 \times CM$ es á $Mm \times \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CR)^2}\right)^2 \times CR$. Pero por razon de las paralelas MR, mr, tenemos $Rr : Mm :: CR : CM$, y por consiguiente $Rr \times CM = Mm \times CR$. Luego el primer momento es al segundo, como $(V - u)^2$ es á $\left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CR)^2}\right)^2$. Pero siempre $\frac{(CM)^2}{(CR)^2} > 1$, y por consiguiente $V - u > V - u \times \frac{(CM)^2}{(CR)^2}$. Luego finalmente el primer momento es siempre mayor que el segundo. Como se debe discurrir del mismo modo respecto de todos los demás elementos cor-

res-

respondientes de que se componen las partes finitas *AO*, *VE* Fig.
de las dos alas *AB*, *DE*, hemos de inferir que el momento del impulso contra el ala vertical es mayor que el momento del impulso contra el ala inclinada á la corriente, y que por lo mismo la primera ala es mejor en orden á esto que la segunda.

687 Quando las alas están en reposo en el instante que choca con ellas el fluido, es $u = 0$; y el momento del impulso contra cada elemento *Rr* llega á ser igual con el momento del impulso contra cada elemento correspondiente *Mm*. Es, pues, entonces igual que el fluido dé en la parte *AO* del ala vertical, ó en la parte correspondiente del ala inclinada. Pero como la parte *OB* del ala vertical es tambien impelida del fluido, se sigue que aun en este caso tiene mas cuenta el que el ala impelida esté en situacion vertical, que no el que esté inclinada á la corriente.

688 Yá que en el caso de estar la rueda en reposo quando la dá el fluido, el momento del impulso contra la parte *VE* del ala inclinada, es igual al momento del impulso contra la parte *AO* del ala vertical (687); síguese que entonces quanto mas se multiplicare el número de las alas, tanta mas fuerza comunicará el fluido á la rueda. Porque con aumentar el número de las alas, se minora el ángulo *ECB* comprehendido entre dos alas consecutivas, y se aumenta por consiguiente el momento del impulso que recibe la rueda quando las alas están, respecto del choque, en la situacion menos favorable, conforme sucede quando la vertical divi-

Fig. de en dos partes iguales el ángulo compreendido entre dos alas contiguas. Como la ley de continuidad se guarda constantemente en los diferentes estados de incremento ó decremento en que pueden hallarse las cantidades de una misma especie, inferamos tambien que si una rueda dá vueltas con una velocidad muy lenta respecto de la del fluido, se aumentará su fuerza con darla un número crecido de alas.

689 Acerca de esto tenemos que apear una dificultad. Suponiendo la rueda inmobil en el instante del choque, es evidente que, hablando con rigor geométrico, el número mas ventajoso de alas debe ser *infinito*. Pero, dirán, si el número de las alas llega á ser infinito, sus estremos formarán una circunferencia de círculo *FBGO*; y dirigiéndo-
165. se al centro *C* el impulso que resultará perpendicularmente contra cada elemento *KN* del arco *FBG*, no se dirigirá á causar movimiento alguno de rotacion; de donde parece resultar que muy lejos de que reciba entonces la rueda el mayor movimiento posible de impulso, no recibirá ninguno.

Pero es de reparar que en nuestro cálculo miramos las alas como una serie de planos distintamente inclinados, todos dirigidos al centro, y chocados del fluido con diferentes oblicuidades; que por consiguiente si nos apartamos de esta hypótesi, se dá por el pie á las consecuencias que de ella resultan. Pero el supuesto de ser *FBG* un arco de círculo continuo y compuesto de elementos *KN*, los quales, lejos de dirigirse ácia el centro *C*, son perpendiculares á los radios *CK*, es de todo punto contrario al antecedente.

oN

No es, pues, de estrañar que no concuerden los resultados de los dos casos. Fig.

Sin embargo, inferiremos de aquí que como los filetes de agua se componen de moléculas físicas, ó que tienen tamaños finitos, y que á mas de esto dichos filetes se estorvan unos á otros en sus movimientos, los estremos de las alas deben dejar entre sí algun intervalo que dé lugar al fluído de esplayar su accion quanto es posible. El número de alas que conviene darle á una rueda en reposo, y con mas razon á una rueda en movimiento, para que la comunique el fluido la fuerza mayor que se pueda, es siempre finito y limitado. A todo esto se debe añadir que con aumentar el número de las alas, se hace mas pesada la rueda, y por lo mismo mayor el rozamiento que padece.

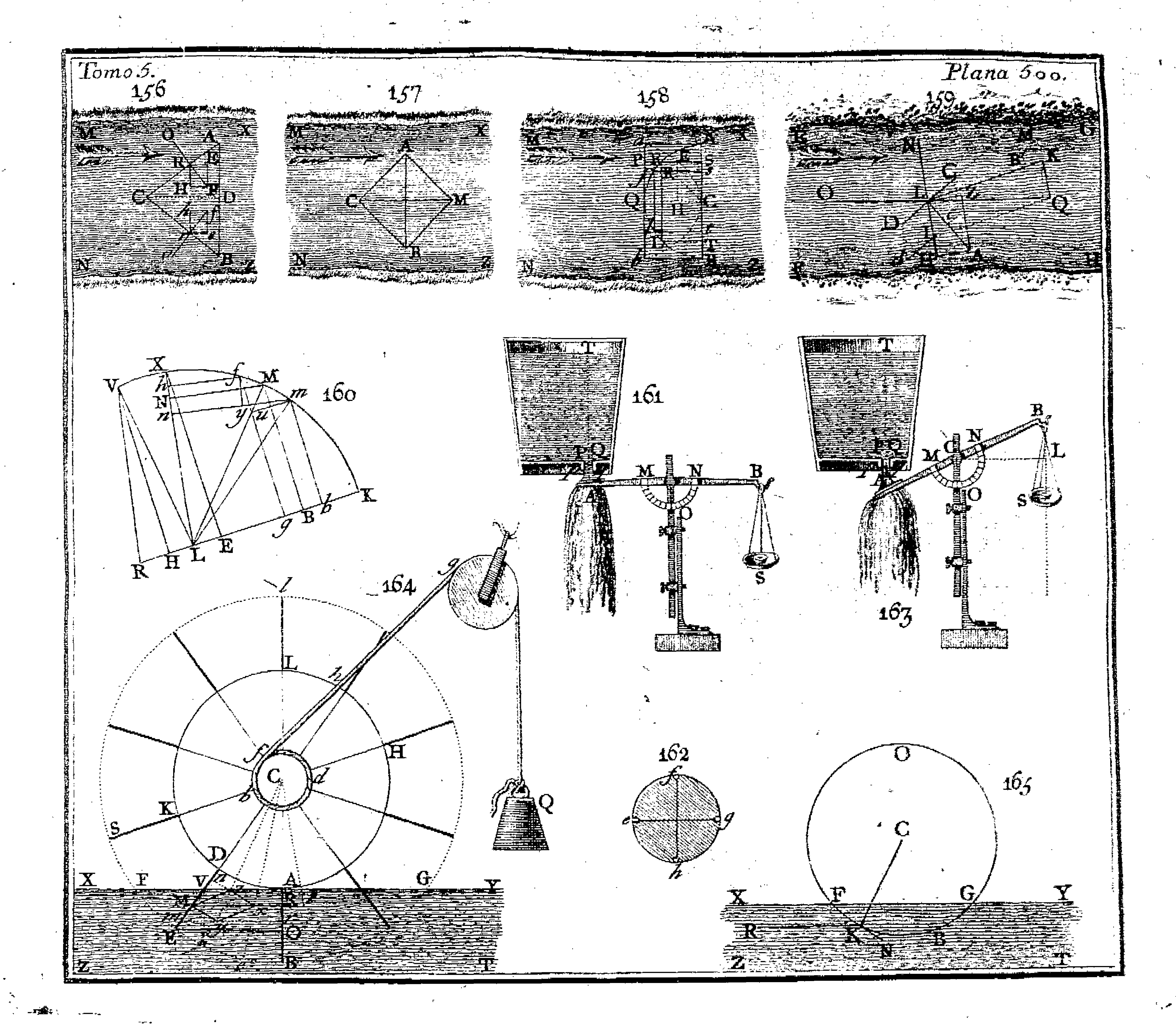
690 Despues que el movimiento de la rueda llega á ser uniforme y permanente, su velocidad es por lo regular muy comparable con la del fluido; es su mitad, su tercio, su quarto &c. Entonces es dificultoso determinar, para un instante qualquiera, el momento del impulso del agua contra todas las alas á un tiempo, é inferir de aquí el número de alas mas ventajoso. La resolucion geométrica de esta cuestion pide un aparato de cálculo que no cabe en este lugar, por lo qual la resolveremos como á tientas, y bastará esta resolucion para las ocurrencias de la práctica.

Despues de fijado el radio de la rueda, lo que las alas han de estar metidas dentro del agua, y la velocidad que se le quiere dar á un punto dado de la rueda, respecto de

Fig. la del fluido, se concebirá que lleva succesivamente la rueda diferentes números de alas; y se determinarán respecto de diferentes situaciones de la rueda, los momentos del impulso del agua contra todas las partes de dichas alas que están metidas á un tiempo en el fluido. El número de alas que diese el momento *medio* máximo de impulso, será el mas ventajoso. Bastará considerar en esta investigacion tres
164. posiciones de la rueda, aquella en que el ala *AB* está en la vertical, aquella en que el ángulo *BCe* mitad del ángulo *BCE* que forman dos alas inmediatas, está dividido en dos partes iguales por la vertical, y aquella en que la recta *Ce* está en la vertical. Así, suponiendo la velocidad del punto *B* de la circunferencia esterior *FBGl* igual al tercio de la del fluido, la introduccion *AB* de la rueda en el fluido igual á la quinta parte del radio *CB*, y por consiguiente el arco *FBG* de unos 72 grados, se ha hallado que conviene darle 36 alas á la rueda. Si suponemos que sea siempre la misma la velocidad del punto *B*, se necesitarán mas ó menos de 36 alas, conforme el arco *FBG* no llegare ó pasare de 72 grados. Estos cálculos son prolijos y penosos; lo mas sencillo y breve es apelar á la esperiencia para resolver esta cuestion.

691 Estando la rueda siempre vertical y armada de alas rectangulares, como en la fig. 176, hay ocasiones en que en vez de dirigir las alas ácia el centro, se las inclina respecto del radio. En esta disposicion se pierde parte del impulso del agua que entonces dá muy oblicuamente; pero hay casos

en



Tomo 5.
Plana 500.
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165

en que esta pérdida se halla resarcida con ventaja por medio Fig.
del peso del agua que se escurre por las alas, y las comprime, conforme nos lo manifestará despues la esperiencia. La cuestion se podria resolver por la teórica, pero pide cálculos bastante prolijos, y algo hypotéticos; por esto los omitimos.

692 Volvamos á la hypótesi de estar las ruedas dirigidas al centro, é indaguemos qué razon debe haber entre su altura y su latitud.

Es evidente que dado el radio esterior *CB* de la rueda y la velocidad del fluido, el momento del impulso del agua contra la superficie *dada* de una ala será tanto mayor quanto mayor fuere el brazo de palanca con el qual obrare este impulso. Pero este brazo de palanca crece á medida que se aumenta la latitud del ala, y se disminuye en consecuencia la altura proporcionalmente, para mantener siempre una misma superficie. Si tuviéramos, pues, agua á arbitrio, y guardase esta siempre su velocidad, se debería aumentar infinitamente la latitud, y hacer la altura infinitamente pequeña. En virtud de este principio, tiene cuenta dar mucha latitud á las alas de una rueda que se mete en un rio. Pero por lo tocante á las ruedas que se mueven dentro de corrientes, cuya agua es preciso economizar, y gastarla lo mas útilmente que se pueda, pide la materia algunas consideraciones mas.

693 Sea *ABKD* la cara vertical de un depósito, en 166.
la qual se ha hecho el orificio rectangular *MNOP*. Supongamos que *AB* represente el nivel del agua; que al orificio

Fig. *MNOP* se le haya acomodado un canal rectangular que lleva el agua á las alas de una rueda. Como es preciso que las alas de la rueda estén algo despejadas dentro del canal para que no rocen con su suelo y sus paredes, podemos imaginar que la parte de una ala que recibe el impulso perpendicular del agua, es representada por el rectángulo *mnop* cuyos lados *mp*, *no*, *op* son paralelos respectivamente con los lados *MP*, *NO*, *OP*, y distan de ellos una cantidad dada. Así, solo el agua que sale por el orificio *mnop* sirve para mover el ala; la que sale por los huecos rectangulares *Mp*, *No*, *Oz*, se pierde. Figurémonos ahora que el ala *mnop* se transforme en otra tambien rectangular *efgh* de igual superficie, cuya longitud y latitud son dadas; y que de resultas de esto el agugero *MNOP* se transforme en otro *EFGH*, tal que las partes *Ee*, *Ff*, *Hi* de la nueva ala sean respectivamente las mismas que las *Mm*, *Nn*, *Pz* de la primera. Suponiendo limitada y *dada* la cantidad de agua que el depósito puede dar, es evidente que el nivel primitivo bajará, pongo por caso hasta *ab*. Resta saber si en virtud de esta bajada el momento del impulso del agua contra el ala menguará. La razon que tenemos para formar esta duda, es que se desperdicia tanta mas agua, quanto mayor es la base *GH* del hueco rectangular *Gi*; porque la carga de agua que le corresponde es mayor que la que corresponde á los huecos laterales *Fg*, *Eh*, *Mp*, *No*. Nos contentaremos con indicar el modo siguiente de valuar en cada caso particular, el efecto de la transformacion propuesta.

Tí-

694 Tírese la vertical TR que divide cada uno de Fig.
los dos orificios $MNOP$, $EFGH$ en dos partes de todo punto iguales y semejantes.

Sea TS .... $= h$
Sm .... $= b$
Sr .... $= c$
Mm .... $= d$
rR .... $= e$
tV .... $= h'$
Ve .... $= p$
Vr .... $= q$
El tiempo de la evacuacion .... $= t$
El tiempo que gasta un grave en caer de la altura dada a .... $= t'$;

tendremos $TR = h + c + e$, cuya cantidad llamaremos H, para abreviar; $SM = b + d = f$; $tR = h' + q + e$; $VE = p + d$. Como el ala *efgh* debe ser igual al ala *mnop*, tendremos desde luego la equacion $pq = bc$. A mas de esto (149) $\frac{4tf\sqrt{a}.(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}})}{3t'}$ es la espresion del gasto que hace el orificio $SMPR$ en el tiempo t, y $\frac{4t(p+d)\sqrt{a}\left[(h'+q+e)^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}\right]}{3t'}$ es el gasto que hace el orificio $VEHR$; si igualamos uno con otro estos dos gastos, sacaremos esta segunda equacion $f(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) = (p+d)\left[(h'+q+e)^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}\right]$.

Fig. De donde resulta que en conociendo una de las tres cantidades b', p, q, las únicas que pueden ser incógnitas, se logrará conocerlas todas tres. Quando p ó q es dada, y es por consiguiente b' una incógnita, la equacion final es del quarto grado. Si fuese dada b', se hallará p ó q por medio de una equacion del quinto grado. Todas estas equaciones se resolverán en la práctica por los métodos de aproximacion.

695 Despues de determinadas por las operaciones que acabamos de indicar, las lineas tV, Vr, Ve, será facil de comparar el momento del impulso del agua contra el ala *mnop*, con el momento del impulso contra el ala *efgh*, y de decidir qual de las dos alas es mas ventajosa. Porque sea X el centro de impresion del ala *mnop*, esto es, el punto al qual corresponderia la altura media del fluido, si el fluido saliese por el orificio *mnop*; Z, el centro de impresion del ala *efgh*, cuyo punto se determina por la misma ley que X. Supongamos á mas de esto que C sea el centro de la rueda; Cr, su radio esterior; y para mayor desembarazo imaginemos que cada ala está en reposo en el instante que la dá el fluido. Ahora bien, yá que el impulso perpendicular en una superficie plana es como el producto de dicha superficie por el quadrado de la velocidad del fluido; ó lo que viene á ser lo mismo, como el producto de la superficie por la altura media del fluido; el momento del impulso del agua contra el ala *mnop* será $mnop \times TX \times CX$, y el momento del impulso contra el ala *efgh* será $efgh \times tZ \times CZ$. Así conoce-

re-

remos la razon entre estos dos momentos, cuya razon nos proporcionará decidir si se gana alguna fuerza mas con transformar el ala *mnop* en el ala *efgh*. Fig.

696 Indaguemos ahora la velocidad que debe adquirir la rueda respecto de la del fluido, para que la máquina obre el efecto máximo de que es capaz.

El efecto de la máquina es la cantidad de movimiento que comunica al peso Q que levanta uniformemente. Prescindimos de las resistencias, ó por lo menos lás incluímos en el peso Q. Si en el supuesto de ser dado este peso, su velocidad v fuese muy corta, la cantidad de movimiento $Q \cdot v$ será muy corta. Si al contrario siendo dada v, fuese Q muy pequeño, la cantidad de movimiento será todavia muy corta. Así, para que una máquina movida con una fuerza determinada, reciba la mayor cantidad posible de movimiento, y haga por lo mismo el efecto máximo de que es capaz, no se debe llevar solamente la mira de levantar el mayor fardo que se pueda, ni de darle una gran velocidad á la máquina, sino que se debe combinar de tal modo el fardo para levantar con la velocidad, que su producto $Q \cdot v$ sea el mayor posible ó un *máximo*.

697 Quando todos los filetes de agua se mueven con la misma velocidad, y la rueda está en reposo en el instante del impulso, la suma de los momentos de impulso, ó el momento único que resulta de todos los impulsos contra todas las partes de las alas metidas en el agua, siempre es igual al momento que recibiría una superficie plana y verti-

Fig. tical de igual longitud que las alas, y metida en el agua á la misma profundidad (687). El centro de impresion de esta superficie es el mismo que su centro de gravedad, pues se supone que todas las moléculas de agua la dán con velocidades iguales y paralelas. No se verifica lo mismo respecto de una rueda que andaba yá quando el fluido la impelió. Como las partes de una misma ala tienen diferentes velocidades, conforme están mas ó menos distantes del ege, es evidente que para hallar el momento total de impulso, se debe determinar en particular el momento de cada impulso elemental, y tomar despues la suma de todos estos momentos. Entonces la velocidad mas ventajosa de la rueda tiene por uno de sus elementos el número de las alas.

698 Aquí suponemos, conforme es uso comun, que en lugar de las alas metidas en el agua se substituya una superficie plana y vertical, con la qual choca perpendicularmente el fluido, la qual antes de este choque tenga yá una velocidad uniforme y permanente. Llamemos A esta superficie; u, la velocidad primitiva y uniforme de su centro de impresion; b, la distancia de este centro al de la rueda; V, la velocidad del fluido; Q, el fardo levantado; v, su velocidad; c, su brazo de palanca; y supongamos á mas de esto que el impulso perpendicular del fluido contra una superficie B en reposo, sea igual con un peso conocido F. Es evidente (652) que el impulso que recibe la superficie A será $F \times \frac{A \times (V - u)^2}{B \times V^2}$. Luego por razon del equilibrio que

que hay cada instante entre este impulso, y el de la gravedad en el peso Q, tendremos $F \times \frac{A \times (V - u)^2}{B \times V^2} \times b = Q \times c$. Multiplicando el segundo miembro por v, y el primero por $\frac{cu}{b}$ que es igual con v, sacaremos $Qv = \frac{F \times A \times (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$. Pero el producto Qv ha de ser un *máximo* (696); luego tambien lo será $\frac{F \times A (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$; y como el factor $\frac{F \times A}{B \times V^2}$ es constante y dado, es evidente que $\frac{F \times A \times (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$ será un *máximo* quando $(V - u)^2 \times u$ lo fuese. Hemos, pues, de averiguar qual debe ser para esto la velocidad u, siendo dada la velocidad V. Fig.

699 Tómese una recta $AB = V$, la parte $BC = u$. 167. Tendremos $(V - u)^2 \times u = (AC)^2 \times BC =$ *máximo*. Pero mas acá y mas allá del *máximo*, las cantidades de su misma especie son iguales; luego suponiendo que el punto C esté entre los puntos M, N infinitamente inmediatos, tendremos $(AM)^2 \times BM = (AN)^2 \times BN$, ó $(AM)^2 \times BM = (AM + MN)^2 \times (BM - MN)$, ó $2 AM \times MN \times BM + (MN)^2 \times BM - (AM)^2 \times MN - 2 AM \times MN \times MN - (MN)^3 = 0$. Dividiéndolo todo por MN, y desechando despues los términos que llevaren todavia MN, como que son infinitamente pequeños respecto de los demás, saldrá $2 AM \times BM - (AM)^2 = 0$, ó $BM = \frac{AM}{2}$, ó con substituir en lugar de las lineas BM, AM las lineas BC, AC que discrepan de ellas infinitamente poco, $BC = \frac{AC}{2}$, ó finalmente $BC = \frac{AB}{3}$, y esto es lo mismo que $\frac{V}{3}$. Así, *para que el efecto de la máquina sea un máximo, es menester que la velocidad* u *del centro de impresion de*

Fig. *de la superficie* A *sea la tercera parte de la velocidad de la corriente.*

700 Para hallar el valor absoluto del *máximo*, se deberá substituir en la equacion $Q \cdot v = \frac{F \times A(V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$, en lugar de u el valor $\frac{V}{3}$ que acabamos de sacar. Con esto tendremos $Q \cdot v = \frac{4F \times A \times V}{27B}$, ó con hacer la superficie dada $B = A$, $Q \cdot v = \frac{4F \times V}{27}$. Pero llamando H la altura correspondiente á la velocidad V del fluido, no falta mucho para que (673) sea $F = 2A \cdot H$. Tendremos, pues, $Qv = \frac{8A \cdot H}{27} \times V$. Por donde se echa de ver que quando la máquina produce su efecto máximo, puede comunicar á un peso de agua representado por $\frac{8A \cdot H}{27}$, la velocidad V del fluido; ó lo que viene á ser lo propio, puede comunicar á un peso cuya espresion es $A \cdot H$ los $\frac{8}{27}$ de la velocidad de la corriente.

701 En todo lo dicho hasta aquí solo hemos considerado las ruedas metidas verticalmente en una corriente; pero yá se vé que los resultados serán los mismos respecto de una rueda orizontal, cuyas alas son rectangulares, movida por un fluido cuya direccion está en el plano de la misma rueda. En algunas ocasiones se hace uso de estas ruedas; pero por lo comun la direccion de la corriente es oblicua respecto del plano de la rueda que siempre se supone orizontal; y se las dá una inclinacion determinada á las alas, respecto de un mismo plano.

168. 702 Representa *BHLK* una rueda orizontal afianzada en un arbol vertical *CD*. Las alas *MNOP* están incli-

na-

nadas al plano de la rueda. Muévela una corriente *VQ* Fig.
que cae de alguna altura, y dá en cada ala á medida que su linea del medio *AB* está en la orizontal *CB* perpendicular al plano vertical que pasaría por la direccion *VQ* del canal. Los dos ángulos *VQe*, *VQf* son los ángulos consecutivos que el plano del ala *MNOP* forma con la direccion de la corriente.

703 Yá se vé que conviene dar un número crecido de alas á estas ruedas, á fin de que los choques del fluido se succedan unos á otros sin interrupcion. Porque la pesantez del fardo que se considera que la rueda levanta, obra sin cesar en direccion contraria; y los golpes que esta fuerza dá, han de ser contrarrestados por los del fluido. Sin embargo no se deben multiplicar tanto las alas, que sea muy pesada la rueda.

704 Suponiendo dadas la direccion del fluido, y la velocidad con que la rueda dá vueltas, se echa de ver, por lo probado (663), que entre todas las inclinaciones que se le pueden dar al ala respecto de la direccion del fluido, ó respecto del plano de la rueda, hay una mas á propósito que las demás para comunicar fuerza á la rueda. Esta posicion es facil de determinar por lo dicho (664). Con efecto, sea *VQH* la direccion del fluido; *QH*, la espresion de su velocidad; *QF*, la espresion de la velocidad orizontal, con la qual la rueda dá vueltas. Resuélvase la velocidad *QH* en otras dos *QF*, *QG*, de las quales la primera es la misma que la de la rueda. Desde el punto *Q* co- 169.

mo

Fig. mo centro, con un radio QA tomado á arbitrio por seno total, trácese el arco indefinito AMX que corte en M el plano fe prolongado quando sea menester; y desde el punto M tírese el seno MB del ángulo MQA. Si llamamos A la area del plano ef; V, la velocidad QH del fluido; F, el impulso perpendicular que el fluido daría á un plano B en reposo; resultará (653) perpendicularmente á ef un impulso cuya espresion será $\frac{F \times A \times (QG)^2 \times (MB)^2}{B \times (QA)^2 \times V^2}$. Tomemos la recta QR perpendicular á ef para representar este impulso; y resolvamos la misma fuerza en otras dos QS, QT, de las quales la primera cae sobre la QF, y la segunda le es perpendicular. Es evidente que la fuerza QT es destruida, y que no hay mas fuerza que la QS que intente hacer andar la rueda. Pero si desde el punto M se baja á FQ prolongada la perpendicular MN, tendremos, como es evidente, fuerza $QS =$ fuerza $QR \times \frac{MN}{QM} =$ fuerza $QR \times \frac{MN}{QA}$ $= \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (MB)^2 \times MN}{B \times (QA)^3 \times V^2}$. Esta fuerza forma equilibrio ca-
168. da instante con el fardo Q'. Luego si llamamos b el radio CQ de la rueda; c, el brazo de palanca del fardo, tendremos $\frac{P \times A \times (QG)^2 \times (MB)^2 \times MN}{B \times (QA)^3 \times V^2} \times b = Q' \times c$. Llamemos v la velocidad del fardo Q'; u, la velocidad QF, y consideremos que $v = \frac{cu}{b}$: hallaremos

$$(A)\quad Q'v = \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (MB)^2 \times MN \times u}{B \times (QA)^3 \times V^2},$$

cuya cantidad debe ser un *máximo*. En esta cantidad todo es constante y dado, á excepcion de las lineas MB, MN. Se reduce, pues, la cuestion á procurar que $(MB)^2 \times MN$ sea un *máximo*. Para esto es menester (666) prolongar

gar *AQ* la cantidad $QK = \frac{AQ}{3}$, tirar *KX* paralela á *QN*, tirar el radio *QX*, y dividir con la linea *QM* el ángulo *AQX* en dos partes iguales; el plano *ef* se debe colocar sobre esta linea. Fig.

El ángulo *AQX* es facil de calcular, y por consiguiente su mitad *AQM.* Porque dado el ángulo *VQF* que forma la direccion del fluido con la orizontal, se conocen en el triángulo *FQH*, el ángulo *FQH*, y los dos lados *QH*, *QF* que le forman. Se sabrá, pues, el valor del ángulo *FHQ* ó su igual *HQG.* Luego se conocerá el ángulo *GQF*, y su suplemento *GQN.* En el triángulo *QKX*, conocemos los lados *QK*, *QX*, y el ángulo $QKX = GQN$; por consiguiente se podrá determinar el ángulo agudo *QXK* ó su igual *XQN.* Luego finalmente conoceremos el ángulo *AQX*, suma de los dos ángulos calculados *GQN*, *XQN.*

Despues de determinadas en cada caso particular las lineas *MB*, *MN*, se substituirán sus valores en la equacion (*A*); y se conocerá el valor absoluto del *máximo*, esto es, el efecto *Qv* de la máquina, quando es el mayor posible.

705 Si los ángulos que forma la direccion del fluido con el plano del ala, y con el de la rueda fueren dados, y se quisiere averiguar la velocidad con la qual se ha de mover la rueda, para que el efecto de la máquina sea un máximo, la cuestion se resolverá por los mismos principios. Porque con hacer desde luego la misma construccion que 170.
poco ha (704) para llegar á la equacion (*A*), hallaremos esta misma equacion; y ahora repararemos que son da-

Fig. dadas todas las cantidades que incluye á excepcion de las cantidades QG, MB, u. Se reduce, pues, la cuestion á procurar que $(QG)^2 \times (MB)^2 \times u$ sea un *máximo*.

Desde los puntos A y G bágense las AI, GZ, GP perpendiculares á las rectas QM, QH; y llamemos m el seno del ángulo GHP que es dado, siendo siempre QA el seno total. Tendremos $QG : GZ :: QA : AI$ ó MB, y por consiguiente $(QG)^2 \times (MB)^2 = (QA)^2 \times (GZ)^2$. Fuera de esto, GH ó $u = GP \times \frac{QA}{m}$. Luego $(QG)^2 \times (MB)^2 \times u = \frac{(QA)^3}{m} \times (GZ)^2 \times GP =$ *máximo*. Luego por ser $\frac{(QA)^3}{m}$ una cantidad constante, es preciso que $(GZ)^2 \times GP =$ *máximo*. Como el punto G siempre debe estar en la direccion HG, y con prolongar HG hasta que encuentre QM tambien prolongada, el triángulo HQY será dado, se echa de ver que hemos de hallar en la base HY de un triángulo da-
171. do HQY un punto G tal que tirando las perpendiculares GP, GZ á los lados QH, QY, el producto $(GZ)^2 \times GP$ sea un *máximo*.

706 Desde el vértice Q bágese la perpendicular QO á la base HY. Por razon de los triángulos semejantes QOY, GZY, tendremos $GZ = GY \times \frac{QO}{QY}$; y por razon de los triángulos semejantes QOH, GPH, $GP = GH \times \frac{QO}{QH}$. Luego $(GZ)^2 \times GP = (GY)^2 \times GH \times \frac{(QO)^3}{(QY)^2 \times QH}$. Luego por ser constante el factor $\frac{(QO)^3}{(QY)^2 \times QH}$, se echa de ver que todo está reducido á partir una recta dada HY en un punto G tal que el producto $(GY)^2 \times GH =$ *máximo*. Pero por el método que practicamos (699) se saca que para esto es preci-

ciso que la parte HG sea el tercio de toda la base HY del Fig.
triángulo HQY. Luego si tiramos por el punto H, y paralelamente á la direccion dada QF de la velocidad de la rueda, la recta HY que encuentre en Y la prolongacion del ala fe; y si despues de tomar $HG = \frac{HY}{3}$, y tirar la recta QG, concluimos el paralelogramo $QGHF$; representará QF la velocidad mas ventajosa de la rueda. 170.

Es sumamente facil de calcular la velocidad QF ó HG, en cada caso particular. Substituyendo despues este valor en la equacion general (A), quedará averiguado el efecto máximo Qv de la máquina.

707 En la práctica no suelen tener las alas una figura perfectamente plana, se curvan y forman como unas 168.
cucharas. Esta figura contribuye para que despues de impelidas del agua, guarden por lo menos un poco de tiempo una porcion del fluido que obra con su peso para aumentar la velocidad y la fuerza de la rueda. Se deberán, pues, modificar respecto de esta circunstancia los resultados de los cálculos precedentes. 172.

708 A las ruedas movidas del impulso del agua se refiere cierta especie de ruedas que sirven en algunos paises para los molinos. Estas ruedas tienen la forma de un cono 173.
trastornado cuyo ege es vertical, que lleva en su superficie unas alas puestas oblicuamente, ó á manera de espiral. El agua cayendo sobre estas alas hace que el cono truncado dé vueltas al rededor de su ege. Estas ruedas se colocan dentro de cubos de fábrica hechos de intento para este uso.

Fig. Es muy dificultoso calcular con precision los efectos de esta especie de ruedas; pero se podrá formar de ellas un juicio que baste para la práctica, por medio de lo que dejamos sentado acerca de las demás especies.

Esperimentos y reflexiones acerca del movimiento de las ruedas movidas del impulso del agua.

709 Representa *AGFH* una rueda que llevaba primero 48 alas, y se redugeron succesivamente á 24 y
174. á 12. Todas estas alas se dirigian ácia el centro *C*. Tenian 5 pulgadas cabales de latitud, esto es, en la dimension perpendicular al plano de la rueda; y 4 á 5 pulgadas de altura, esto es, en la dimension dirigida al centro. Se metian en el canal de que hablamos antes (527 y sig.), y le representa la figura 122.

La rueda daba vueltas con desahogo, y faltaba como $\frac{1}{2}$ linea para que los estremos de las alas llegasen á rocar el suelo y las paredes del canal. En el arbol de la rueda, que era orizontal, habia una muesca cilíndrica para recibir las roscas paralelas de una cuerda *COS* que se arrollaba en ella, y la qual por medio de la polea de retorno *O* levantaba el peso *Q*, quando la corriente *XYTZ* daba en las alas. El diámetro esterior *BK* de la rueda era de 3 pies 1 pulg. 10 lineas; el diámetro solo del carril cilíndrico donde se metia la cuerda era de 2 pulg. el diámetro de los eges que estaban en los estremos del arbol, era de $2\frac{1}{2}$ lineas; la polea de retorno *O* tenia 3 pulg. 8 lineas de diámetro, y el

de

de sus eges era de $2\frac{2}{3}$ lineas. El diámetro de la cuerda era de 2 lineas. Fig.

El sitio donde estaba colocada la máquina distaba como unos 50 pies del depósito *ADCB*. La velocidad de la 122. corriente se determinó primero por los medios declarados (450 &c.), que se deben tener muy presentes para la inteligencia de lo que sigue.

Prevenimos que aquí y en lo succesivo no empezamos á contar el número de vueltas que dá la rueda en el número de segundos señalados en la penúltima columna de cada tabla, hasta que el movimiento ascensional del fardo *Q* llega á ser uniforme; y esto se verifica siempre luego que la rueda ha dado 4 ó 5 vueltas.

710 Esperimentos I, II, III.. VI. La pala estaba levantada 1 pulg. y la velocidad del agua en el canal era de 300 pies en 33 segundos, como en lo dicho (521).

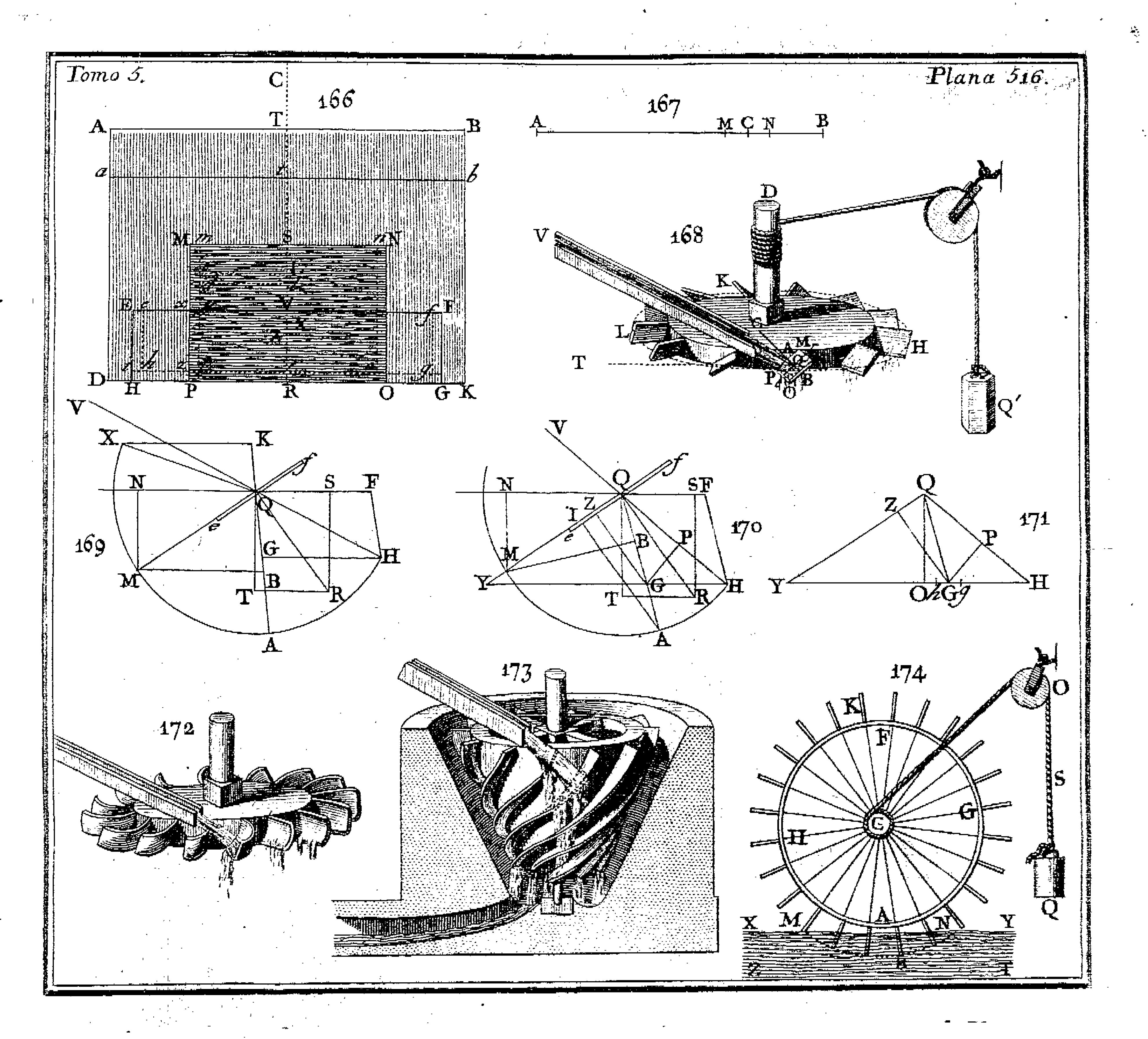
Número de alas de la rueda.	Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas de la rueda.
48	12	60	$33\frac{1}{4}$
48	16	60	$28\frac{1}{2}$
24	12	60	29
24	16	60	$25\frac{1}{2}$
12	12	60	$25\frac{1}{2}$
12	16	60	$19\frac{1}{4}$

Fig. 711 Esperimentos VII, VIII . . . XII. La pala estaba levantada 1 pulg. y la velocidad del agua en el canal era de 300 pies en 30 segundos, como antes (519).

Número de alas de la rueda.	Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas de la rueda.
48	12	48	34
48	16	48	$31\frac{1}{4}$
24	12	48	$30\frac{1}{3}$
24	16	48	$18\frac{1}{2}$
12	12	48	25
12	16	48	23

712 Reflexiones. Siendo uno mismo el fardo levantado, la rueda gyraba mas aprisa quando tenia 48 alas que quando tenia 24; y mas aprisa quando tenia 24 que quando tenia 12. Así, en todos los casos parecidos á nuestros esperimentos tendrá cuenta dar por lo menos 48 alas á la rueda, con tal que las pueda llevar sin ser demasiado pesada, y que por otra parte los agugeros que se han de hacer en el anillo para introducir las estaquillas que deben llevar las alas, no le debiliten demasiado, y le quiten al ensamblage parte de su solidez. Veamos, pues, qual es el valor del arco *MBN* que está metido en el agua. A la distancia de 50 pies del depósito, que es donde está la rueda, el agua sube mas arriba del fondo del canal, como unas

13



166
167
168
169
170
171
172
173
174

13 á 14 lineas, y la mayor profundidad hasta donde se meten las alas es de unas 13 lineas. En virtud de estos datos, y de ser conocido el radio de la rueda, hallé que el arco *MBN* es de 24 grados 54 minutos. En las ruedas grandes que tienen 20 pies de diámetro, y son movidas de una corriente rápida, el arco metido en el agua pasa algo de 25 ó 30 grados, y no se les suele dar mas de 40 alas. Si llevaran mas, obrarian un efecto mayor. La teórica y la esperiencia ván conformes en este punto. Fig.

713 Es uso corriente dar pocas alas á las ruedas que entran en los rios; y esto se hace con la mira de precaver que las alas se cubran unas á otras, y para que cada una pueda recibir el impulso del agua. La esperiencia nos dirá qué juicio hemos de formar de esta práctica.

La rueda de que me valí para esto, era de otra cons- 175.
truccion que la precedente. *BGFHbbgf* es la elevacion co- 176.
mun de dos coronas de hierro cuyo ancho *Bb* era de 9 lineas, y el grueso de una linea. Las alas eran de chapa de hierro, y venian á tener como $\frac{1}{2}$ linea de grueso. El estremo esterior *B* de cada una de ellas estaba sostenido en una estaquilla de hierro chica, que se juntaba con las dos coronas, y el otro estremo estaba sostenido en dos espigas *AR* de hierro que estaban aseguradas en *R* á la rueda *K* mobil al rededor del centro *C*. Por este medio se podian dirigir las alas al centro, ó darlas la inclinacion que se queria respecto del radio. Tambien se podia siempre que se quisiese quitar y poner parte de las alas. Por lo que mira á las di-

Fig. mensiones, el diámetro esterior *BF* era de 3 pies; la latitud de las alas era de 5 pulgadas; la altura *BA* de 6 pulgadas; el diámetro solo del cilindro donde se arrollaba la cuerda *COQ* atada al peso *Q*, era de 2 pulg. 6 lineas; el de los eges del arbol, de 3 lineas; el diámetro de la polea de 3 pulg. 8 lineas; y el de sus eges, de $2\frac{2}{3}$ lineas; el diámetro de la cuerda era de 2 lineas, por manera que el brazo de palanca del peso *Q* era de 1 pulg. 4 lineas con muy corta diferencia. Como no siempre daba la rueda un número determinado de vueltas en un número dado de segundos; para poder medir con facilidad las fracciones de vuelta, se le añadió al arbol una ruedecita dentada que por medio de un gatillo servia para parar la máquina en el instante preciso que se quería. Esta máquina pesaba en todo 44 libras, esto es, entrando el peso de la rueda principal, y el de la ruedecita para pararla.

La corriente en la qual se hicieron los esperimentos siguientes, estaba encerrada entre dos paredes verticales paralelas y distantes una de otra como unos 12 ó 13 pies. El fondo del canal era de fábrica y pilotage, bastante igual, y la altura total del agua era de unas 7 ú 8 pulg. Esta profundidad fue siempre una misma para la misma serie de esperimentos. Despues diremos como se determinó la velocidad de la corriente. El armamento de la máquina estaba sostenido con tablones que formaban una especie de puente sobre el rio; y no habia obstáculo alguno que turbase los efectos de la percusion del fluido contra las alas de la rueda.

Es-

714 ESPERIMENTOS XIII, XIV, XV, XVI. Las alas estaban metidas 4 pulgadas dentro del agua en la direccion vertical. Fig. 175.

Número de alas de la rueda.	Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas de la rueda.
48	24	60	$27\frac{19}{48}$
24	24	60	$27\frac{7}{48}$
24	40	40	$15\frac{28}{48}$
12	40	40	$13\frac{15}{48}$

715 REFLEXIONES. La rueda levantaba el mismo fardo con una velocidad sensiblemente mayor quando tenía 24 alas, que quando no tenia mas que 12. Pero no se movia mucho mas aprisa quando tenia 48 alas que quando tenia 24. El arco *MBN* metido en el agua era de 77 grados 53 minutos. Es, pues, constante que en los casos parecidos á este, conviene dar 24 alas por lo menos á la rueda. Se la podrian dar menos si se la metiera mucho mas dentro del agua. En la práctica se dán comunmente 8 ó 10 alas, algunas veces menos, á las ruedas de molino puestas en rios. Este número es muy corto, y las ruedas de que se trata andarian mejor si tuviesen de 12 á 18 alas.

716 Hemos determinado por medio de la teórica (699) la velocidad que debe adquirir la rueda respecto de la de la corriente, para que la máquina obre el

Fig. mayor efecto posible. Veamos qué dice acerca de esto la esperiencia.

Los esperimentos que componen la primera de las dos tablas siguientes, se hicieron en el canal de la figura 122. Los de la segunda tabla con la corriente cuya descripcion hemos dado (713). En ambos casos me valí de la rue-
175. da que representa la figura; pero en el primero esta rueda llevaba 48 alas, en el segundo no tenia mas que 24.

717 ESPERIMENTOS XVII, XVIII......... XXVIII. La pala estaba levantada 2 pulg. y la velocidad del agua en el canal era de 300 pies en 27 segundos como antes (522).

Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas.
$30\frac{1}{2}$	40	$22\frac{12}{48}$
31	40	$22\frac{4}{48}$
$31\frac{1}{2}$	40	$21\frac{42}{48}$
32	40	$21\frac{32}{48}$
$32\frac{1}{2}$	40	$21\frac{20}{48}$
33	40	$21\frac{8}{48}$
$33\frac{1}{2}$	40	$20\frac{44}{48}$
34	40	$20\frac{32}{48}$
$34\frac{1}{2}$	40	$20\frac{21}{48}$
35	40	$19\frac{44}{48}$
$35\frac{1}{2}$	40	$19\frac{15}{48}$
36	40	$18\frac{28}{48}$

RE-

718 Reflexiones. Como los diferentes fardos levantados tenian un mismo brazo de palanca, y se movieron el mismo espacio de tiempo, es evidente que sus velocidades son entre sí como el número de vueltas de la rueda, que compone la quarta columna de la tabla. Así, no contando con la fuerza que gasta el agua en vencer el rozamiento, y la resistencia del ayre, el efecto de la máquina será el mayor posible, quando el producto del fardo levantado, por el número correspondiente de vueltas de la rueda, sea el mayor posible. Pero se halla que el mayor de estos productos es el que corresponde á $34\frac{1}{2}$ libras. Luego el efecto de la máquina es un *máximo* quando la rueda dá $20\frac{7}{16}$ vueltas en 40 segundos. Solo falta comparar su velocidad con la del agua en el canal. Fig.

719 Tomando 40 segundos por el tiempo que duran los movimientos del agua, y de la rueda, hallaremos:

1.° Que andando el agua 300 pies en 27 segundos, anda como unas 5334 pulgadas en 40 segundos.

2.° Que teniendo la rueda 36 pulgadas de diámetro (713), cada punto de su circunferencia anda, en 40 segundos, un número de pulgadas, cuya espresion es $36 \times \frac{355}{113} \times (20 + \frac{7}{16})$, esto es, como unas 2311 pulg. La fraccion $\frac{355}{113}$ espresa la razon entre la circunferencia, y el diámetro (I. 504).

Así, la velocidad del agua en el canal es á la velocidad de la circunferencia esterior de la rueda, como

5334

Fig. 5334 es á 2311, con corta diferencia.

El diámetro de la circunferencia que traza el centro de impresion, es de unas 34 pulgadas; y por consiguiente la velocidad de este centro es de unas 2183 pulg. en 40 segundos. Luego la velocidad del agua es á la velocidad del centro de impresion, como 5334 es á 2183 con corta diferencia. Esta razon no discrepa mucho de la de 5 á 2. Se echa de ver que la velocidad del centro de impresion de las alas es mas del tercio, y menos de la mitad de la velocidad de la corriente.

720 ¿Pero podemos creer que esta razon entre las velocidades subsistirá si llevamos en cuenta las resistencias? La pregunta se puede reducir á esto. Hay dos cantidades semejantes y consecutivas $M \cdot v$, $N \cdot v'$, tales que cada una de ellas espresa el producto de un fardo por su velocidad; se supone que $M \cdot v$ sea un máximo, y por consiguiente $M \cdot v > N \cdot v'$. Ahora bien, para llevar en cuenta las resistencias, los pesos M y N se deben considerar como que se les ha añadido á cada uno un peso. Supongamos, pues, que M llegue á ser $M + m$, y N llegue á ser $N + n$. Se pregunta si la misma velocidad v que constituye $M \cdot v$ un máximo, hará que $M \cdot v + m \cdot v$ sea tambien un máximo, ó si tendremos $M \cdot v + m \cdot v > N \cdot v' + n \cdot v'$? Es evidente que en general esto podrá ser ó no ser, segun la razon que hubiere entre los pesos m y n. Pero aquí es probable que las fuerzas $m \cdot v$ y $n \cdot v$ de las resistencias son entre sí, por lo menos sensiblemente, como las fuerzas $M \cdot v$

y,

y $N.v'$. Tenemos, pues, en esta hypótesi $m.v : n.v' :: M.v : N.v'$, de donde sacamos $M.v + m.v : N.v' + n.v' :: M.v : N.v'$; luego por ser $M.v > N.v'$, tambien tendremos $M.v + m.v > N.v' + n.v'$. Aunque este resultado no esté fundado en una demostracion, me parece que poca equivocacion padecerá el que le admita en la práctica. Así, infiero que quando una rueda con 48 alas dá vueltas en un canal sin estar metida muy adentro del agua, su circunferencia debe adquirir como los tres quintos de la velocidad de la corriente, para que obre la máquina el efecto máximo de que es capaz. Fig.

721 Esperimentos XXIX .... XLV. La rueda daba vueltas en la corriente de antes (713). Llevaba 24 alas que se metian en el agua 4 pulg. en la direccion de la vertical.

Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas.
30	40	$17\frac{22}{48}$
35	40	$16\frac{25}{48}$
40	40	$15\frac{28}{48}$
45	40	$14\frac{31}{48}$
50	40	$13\frac{34}{48}$
55	40	$12\frac{37}{48}$
56	40	$12\frac{28}{48}$
57	40	$12\frac{19}{48}$

Far-

Fig.

Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas.
58	40	$12\frac{10}{84}$
59	40	$12\frac{1}{48}$
60	40	$11\frac{40}{48}$
61	40	$11\frac{30}{48}$
62	40	$11\frac{19}{48}$
63	40	$11\frac{7}{48}$
64	40	$10\frac{41}{48}$
65	40	$10\frac{25}{48}$
66	40	$10\frac{5}{48}$

722 Reflexiones. Para medir la velocidad del agua me valí de un molinillo muy ligero puesto al lado de la rueda. Llevaba seis alitas que entraban en el agua como unas 4 lineas, y adquirian sensiblemente toda la velocidad de la corriente. Con esto averigué que la velocidad *media* del agua era de unas 2740 pulg. en 40 segundos.

Multiplicando cada fardo levantado por el número correspondiente de vueltas de la rueda, se hallará que el mayor de estos productos corresponde á 60 libras. De donde se sigue que en el caso del efecto máximo, la velocidad de la circunferencia de la rueda es de 1338 pulg. en 40 segundos, y que la velocidad del centro de impresion es de 1189 pulgadas en el mismo tiempo. Parece, pues, tambien que respecto de las ruedas puestas en los rios, la ve-

velocidad del centro de impresion ha de ser como los $\frac{2}{5}$ de la de la corriente. Fig.

723 Indaguemos ahora si en las ruedas verticales tiene cuenta ó no inclinar las alas al radio, conforme se practica en algunas ocasiones, y pinta la figura 176. 176.

Los esperimentos que componen la primera de las tres tablas siguientes se hicieron en el canal de la figura 122; los de las otras dos tablas en la corriente de antes (713).

La voz *directas*, ó la abreviatura *direct.* que se lee en dichas tablas, significa que las alas estaban dirigidas al centro; y las voces *inclinacion de* 8°, *inclinacion de* 12° 175.
&c. que se escriben en abreviatura *incl.* 8°, *incl.* 12° &c. significan que las alas formaban con el radio *CB* un ángu- 176.
lo *CBA* de 8°, 12° &c.

724 Esperimentos XLVI, XLVII... LI. La pala estaba levantada 2 pulg. y la velocidad del agua en el canal era de 300 pies en 27 segundos, como antes (522).

48 alas.	Fardo levantado, espresado en lib.	Segundos.	Número de vueltas.
direct.	34	40	$20\frac{26}{48}$
incl. 8°	34	40	$19\frac{20}{48}$
incl. 8°	38	40	$17\frac{5}{48}$
incl. 12°	34	40	$19\frac{40}{48}$
incl. 12°	38	40	$17\frac{22}{48}$
incl. 16°	34	40	$20\frac{24}{48}$

Fig. 725 Reflexiones. Las alas dirigidas al centro son, en la hypótesi del canal propuesto, mas ventajosas que las alas inclinadas 8° al radio, estas menos ventajosas que las alas inclinadas 12°, y estas menos ventajosas que las alas inclinadas 16° al radio. El efecto es con corta diferencia el mismo, quando las alas son directas, y quando estan inclinadas 16° al radio. Todo esto es evidente con dar una mirada á la tabla. Daremos la razon física.

Quando las alas se dirigen al centro, poco falta para que cada una de ellas sea impelida perpendicularmente del fluido, y sea por lo mismo el impulso el mayor posible. Pero quando están inclinadas al radio, la percusion es oblicua, y se resuelve en dos fuerzas, la una perpendicular al ala, la única que obra con el choque, la otra en la direccion del ala, que no obra con el choque, pero hace subir el agua por el ala: como esta agua así levantada se queda algun tiempo sobre el ala, la comprime con su peso, y puede suceder que el esfuerzo que de aquí resulta, compense ó le falte poco para compensar la diminucion que padece el choque por razon de la oblicuidad, con la qual la rueda es impelida. No se puede sentar en general qual sea la mejor combinacion de estas diferentes fuerzas; pende de la velocidad, de la inclinacion de la corriente, y del fardo levantado. Pero en el supuesto de que se haya hallado con efecto la posicion mas ventajosa de las ruedas, la ventaja será tanto mas notable, siendo todo lo demás igual, quanto menor fuere la velocidad con que anda la rueda.

En

En las ruedas puestas en canales de poco declivio, y en los Fig. quales el agua puede escaparse facilmente despues del choque, conviene dirigir las alas al centro. Por el contrario, en los canales de mucho declivio las alas han de estar inclinadas al radio cierta cantidad, yá para que sean impelidas mas perpendicularmente, yá para que el peso aumente su fuerza.

726 Esperimentos LII, LIII .... LVIII. La rueda estaba metida verticalmente en el agua 3 pulgadas.

48 alas.	Fardo levantado, espresado en lib.	Segundos.	Número de vueltas.
direct.	20	60	$17\frac{5}{48}$
direct.	32	60	$10\frac{26}{48}$
incl. 10°	20	60	$16\frac{42}{48}$
incl. 10°	32	60	$11\frac{3}{48}$
incl. 20°	20	60	17
incl. 20°	32	60	$11\frac{40}{48}$
incl. 30°	32	60	$11\frac{7}{48}$

Prevenimos que habia algunas irregularidades en el movimiento de la corriente por razon de las quales no se pueden mirar estos esperimentos como perfectamente seguros. No sucedió lo mismo en los siguientes que son muy exactos.

727 Esperimentos LIX, LX, LXI, LXII. La pala estaba metida verticalmente en el agua 4 pulg.

Fig.

12 alas.	Fardo levantado, espresado en lib.	Segundos.	Número de vueltas.
direct.	40	40	$13\frac{17}{48}$
incl. 15°	40	40	$14\frac{21}{48}$
incl. 30°	40	40	$14\frac{22}{48}$
incl. 37°	40	40	$14\frac{15}{48}$

728 Reflexiones. El lector hará facilmente por sí las consideraciones que estos esperimentos suministran. Se echa de ver que en los casos parecidos á los de la última tabla, la oblicuidad de las alas respecto del radio la mas ventajosa está entre 15 y 30 grados. Hay siempre cierta oblicuidad de la qual no se debe pasar, porque se perdería mas con la oblicuidad del choque de lo que se ganaría con el peso del agua que se escurre por las alas y las comprime.

Teórica del movimiento de las ruedas movidas del peso del agua, ó por el peso y el movimiento del agua á un tiempo.

729 Las ruedas movidas del peso del agua, de las quales tratamos en este lugar, y que se llaman comunmente *Ruedas con cajones*, son las que reciben el agua de una
177. corriente en cajones *Amn*, y dán vueltas por medio de la fuerza que hace esta agua con su peso. Los cajones deben guardar lo mas que se pueda el agua que reciben, y por consiguiente ninguno de ellos debe empezar á verterse sino

quan-

quando llega á las inmediaciones del punto D, estremo inferior de la vertical AD. Fig.

En algunas ocasiones la rueda tiene menos velocidad que el fluido quando entra en los cajones; y entonces se mueve á un tiempo con el choque del agua que entra cada instante en los cajones, y con el peso de la que en ellos se queda.

730 En los primeros instantes el movimiento de la rueda se acelera mas y mas; pero al cabo de algunas vueltas llega á ser uniforme; y entonces la fuerza que recibe la rueda del fluido, ó del peso solo, ó del peso combinado con el choque, está continuamente en equilibrio con el fardo Q que la máquina levanta, ó podemos considerar que levante, y con la resistencia del rozamiento. El equilibrio de que estamos hablando es el mismo que si la máquina estuviera en reposo. No consideramos el movimiento sino despues que ha llegado á la uniformidad.

731 Esto supuesto, sea $ABDE$ una rueda vertical 178.
y perfectamente mobil al rededor de su centro C. Supongamos que la porcion de corona $GgBbH$, cuya altura Gg ó Hb consideramos como infinitamente pequeña respecto del radio CM de la rueda, esté cubierta de agua. Desde el centro C tírense los dos radios infinitamente próximos CM, Cm, los quales determinan la pequeña cantidad elemental de agua $MNnm$; y desde los puntos G, H, M, m tírense las orizontales GF, HV, MP, mp. Bágese la vertical MI que encuentre en I el diámetro orizontal BE, y en t la or-

Fig. denada *mp* al diámetro vertical *AD*. La porcion de agua *MNnm* la puede representar $Mm \times MN$; y su momento respecto del centro *C*, será por consiguiente $Mm \times MN \times CI$ ó $Mm \times MN \times MP$. Pero por razon de los triángulos semejantes *Mtm*, *MPC*, tenemos $Mm : CM :: Mt$ ó $Pp : MP$, y por consiguiente $Mm \times MP = Pp \times CM$. Luego el momento espresado $= MN \times CM \times Pp$. Como se puede decir é inferir lo mismo respecto de todas las demás partes elementales del agua *GgBbH*, es evidente que el momento del peso de toda esta agua será $MN \times CM \times FV$.

732 Luego si la rueda dá vueltas con una velocidad igual á la del agua al entrar en los cajones, de modo que no haya choque; y llamamos *Q* el fardo levantado; *c*, su brazo de palanca; *A*, la seccion rectangular de un cajon, de cuya seccion *MN* es la altura, siendo orizontal su latitud; tendremos la equacion $Q \times c = A \times CM \times FV$, de la qual se saca (llamando *v* la velocidad del peso *Q*; *u*, la de la circunferencia de la rueda, y considerando que $v = \frac{cu}{CM}$),

$$(A) \quad Qv = A \times FV \times u,$$

que servirá para determinar el efecto de la máquina en la hypótesi que seguimos.

733 Sea desde luego una rueda vertical *ABDE* mo-
179. vida del agua de un canal *OZGg* cerrado por arriba, y que con esto forma una especie de tubo tal, que tirando la orizontal *GF*, la velocidad en *G* se pueda considerar como efecto de la altura *RF* que corresponde á la del agua contenida en el depósito provisional *XZYT*. El punto *R*

se

se considera como fijo, tómese donde se quisiese el punto Fig. G en el arco ABD; y por consiguiente el gasto del tubo está en razon subduplicada de la altura RF. Supongo que la circunferencia $ABDE$ gyre con una velocidad igual á la del fluido en el punto G, y que con esto no haya choque al entrar el fluido en los cajones. Sea la porcion de corona $GBHbbg$ la cantidad de agua que hay constantemente en los cajones, de modo que salga tanta por Hb como entra por Gg, y que el grueso de la corona en toda su estension sea igual con Gg. Desde el punto H tírese la HV perpendicular á AD. Guardemos las mismas denominaciones de antes (732), y llamemos h la altura correspondiente á una velocidad dada u'. Tendremos (IV. 50) $u = u' \times \frac{\sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$. Así, la equacion ($A$) se transformará en

$$(B)\quad Qv = \frac{A \times FV \times u' \times \sqrt{RF}}{\sqrt{h}}.$$

Luego para que la máquina obre su efecto máximo, es preciso que $\frac{A \times FV \times u' \times \sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$ llegue á ser un *máximo*; y como las cantidades A, u', h son constantes y dadas, es preciso para esto que $FV \times \sqrt{RF} =$ *máximo*. Pero quando una cantidad es un máximo, su quadrado tambien lo es (III. 406); luego $FV^2 \times RF =$ *máximo*. Por el método de antes (699) se halla que la recta RV se ha de dividir en este caso en el punto F, de modo que sea $FR = \frac{RV}{3}$. Así, *para el efecto máximo de la máquina, la altura correspondiente á la velocidad de la rueda debe ser el tercio de la altura del depósito mas arriba del punto mas bajo donde se considera que el agua deja la rueda.*

Fig. 734 Substituyendo en lugar de RF su valor; y en lugar de FV su valor $\frac{2}{3}RV$, en la equacion (B), sacaremos $Qv = \frac{A \times 2RV}{3\sqrt{3}} \times u' \times \frac{\sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$, que es la espresion del efecto máximo de la máquina.

735 La resolucion de esta cuestion puede servir para quando teniendo yá construida una rueda, se la quiere hacer dar vueltas del modo mas ventajoso con solo el peso del agua; y quando á mas de esto, siendo dada y constante la altura del depósito, tiene uno arbitrio para tomar mas ó menos agua, segun sea menester. Se echa, pues, de ver que entonces se debe dirigir el canal $OZGg$ que lleva el agua á la rueda, de modo que dicha agua entre toda en los cajones, que la altura RF sea el tercio de RV, y que la circunferencia de la rueda adquiera la velocidad del fluido en
179. G. Poco importa que el agua entre por la parte superior de
180. la rueda, ó por el lado, como en la figura que citamos.

736 Como hay arbitrio para darle al agua la caida RV, se nos podria preguntar, si en lugar de una rueda con cajones no tendria mas cuenta valerse de una rueda con alas, con la qual viniera á chocar el fluido movido con una velocidad correspondiente á dicha caida.

Para satisfacer á esta pregunta, repararemos que siendo $\frac{u' \times \sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$ la espresion de la velocidad del fluido correspondiente á la altura RV, y suponiendo que siempre sea la misma la superficie A, el efecto máximo de la rueda con alas sería (700) $\frac{8A \times RV}{27} \times \frac{u' \times \sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$. Luego el efecto máximo de la rueda con cajones es al efecto máximo de la rueda

con

con alas, como $\frac{A\times 2RV}{3\sqrt{3}} \times \frac{u'\times\sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$ es á $\frac{8A\times RV}{27} \times \frac{u'\times\sqrt{RV}}{\sqrt{k}}$, ó Fig.
como 9 á $4\sqrt{3}$, ó como 9 á 6,928 con corta diferencia. Luego la rueda con cajones es mejor que la rueda con alas. A todo esto hemos de añadir que la primera gasta menos que la segunda, en la razon de $\sqrt{RF}$ á $\sqrt{RV}$, ó de 1 á $\sqrt{3}$.

737 La hypótesi en que se funda lo dicho (733, 734 y 735), esto es, que permaneciendo la misma altura del depósito, podemos tomar mas ó menos agua á arbitrio, no suele verificarse en la práctica. Sucede las mas veces que el depósito dá constantemente cantidades iguales de agua en tiempos iguales, de qualquiera modo, y á qualquiera distancia que se reciba dicha agua en la rueda. Supongamos, pues, que *ABDE* sea una rueda vertical movi- 181.
da por el agua del canal que está abierto por arriba; y llamemos M la cantidad constante de agua que este canal dá en un tiempo dado, pongo por caso en 1 segundo. La velocidad u de la circunferencia de la rueda será el espacio que esta circunferencia anda en 1 segundo. Es evidente que tendremos $A\times u = M$, ó $A = \frac{M}{u}$. Substituyamos este valor de A en la equacion (A) (732), y sacaremos $Qv = M\times FV$. De donde se sigue que para conseguir que el efecto Qv de la máquina sea el mayor posible, se debe aumentar FV lo mas que posible sea.

738 Se echa, pues, de ver con esto, que siendo dada la altura RV, y siendo siempre el mismo el gasto M mediante la libertad que tenemos para variar como queramos el orificio OZ, quanto mas se disminuyere la parte RF,

 tan-

Fig. tanto mas se aumentará el efecto de la máquina. Luego la rueda obrará un efecto tanto mayor, quanto menos aprisa se moviere. Pero no se debe mover con demasiada lentitud; porque siendo dadas las dimensiones, quiero decir, la latitud y altura de los cajones, por la equacion $A = \frac{M}{u}$, se echa de ver que con disminuir u se aumenta A. Pero el aumento de A es limitado; sinó, la rueda llegaría á ser muy ancha y muy alta, y por lo mismo pesada.

739 Representando $M \times FV$ el efecto de nuestra rueda con cajones, se echará de ver por lo dicho (700) que el efecto máximo de una rueda con alas, en la profundidad RV, sería $\frac{8M \times RV}{27}$; porque el gasto es como el producto del orificio por la velocidad, y la velocidad es como la raiz de la altura. Luego el efecto máximo de la rueda con cajones es al efecto máximo de la rueda con alas como $27(RV - RF)$ es á $8RV$. De donde se sigue que en el supuesto de ser RF mucho menor que RV, el efecto de la rueda con cajones es mucho mayor que el de la rueda con alas.

740 Supongamos ahora una rueda que dé vueltas con una velocidad menor que la del fluido en G, y que por lo mismo se mueva tambien por el choque del agua. Llamemos u la velocidad de la rueda; V, la del fluido en G; F, el impulso perpendicular que daría con esta velocidad á un plano B en reposo; C, la superficie plana, á la qual se reduce la superficie de los cajones impelida perpendicularmente por el fluido, y guardemos las demás denominaciones de los números antecedentes. Hallaremos (698 y 737) la equacion

(C)

(C) $Qv = M \times FV + \frac{F \times C(V-u)^2 \times u}{B \times V^2}$. Fig.

741 Para determinar en este caso el efecto máximo de la máquina, repararemos que en el segundo miembro todo es constante y dado, á excepcion de la cantidad $(V-u)^2 \times u$. Hallaremos, pues, como antes (699), $u = \frac{V}{3}$. Substituyendo este valor en la equacion (C), tomando $B = C$, y haciendo $F = 2C \times RF$, conforme es sensiblemente verdadero (673), considerando finalmente que $M = C \times V$; sacaremos $Qv = M \times FV + \frac{8M \times RF}{27}$, ó $Qv = M \times \left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$. De donde se sigue que dicha rueda producirá tanto mayor efecto quanto mas lentamente se moviere. Su efecto máximo es al que obraría una rueda con alas con la caida RV, como $27\left(RV - \frac{19RF}{27}\right)$ es á $8RV$.

742 Síguese de todo lo que acabamos de decir que tiene mucha mas cuenta valerse de ruedas con cajones que de ruedas con alas, quando hay arbitrio para tener una grande caida de agua. Pero en los mas de los casos la caida del agua es corta, y es preciso tomar el agua por debajo de la rueda por medio de alas con que el fluido choca. A mas de esto suele convenir en muchos casos que la rueda se mueva muy aprisa, habiendo por otra parte abundancia de agua. Entonces es muy buena una rueda con alas. Como las ruedas con cajones obran tanto mas quanto mas lentamente se mueven, no se podria emplear en este caso una rueda de esta especie, sino haciendo que engargantase con una linterna ó con otra rueda; pero esto haría la máquina mas complicada, y aumentaría el rozamiento. Las ruedas con alas son

Fig. tambien las únicas que puedan servir en los rios.

Esperimentos y Reflexiones acerca de las ruedas con cajones.

743 La figura representa la máquina con que se hi-
177. cieron estos esperimentos. El canal *XYTZ* que llevaba el agua á la rueda orizontal, tenia 5 pulgadas de ancho, y estaba en él el agua como estagnante; daba constantemente la misma cantidad de agua que era de 1194 pulg. cúbicas en 1 minuto. El diámetro *AD* de la rueda era de 3 pies; el del cilindro en donde se arrollaba la cuerda era de 2 pulgadas 7 lineas; el de los eges, de $2\frac{1}{2}$ lineas. La polea *O* era la misma que en los esperimentos que se hicieron con las ruedas con alas. La altura de los cajones era de unas 3 pulgadas, su ancho de 5 pulg. y eran 48.

En los esperimentos que siguen, no se empezó á contar el número de vueltas hasta despues de haber llegado el movimiento á ser uniforme, esto se verificaba al cabo de 5 ó 6 vueltas.

744 Esperimentos I, II, III.... VIII.

Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas.
11	60	$11\frac{46}{48}$
12	60	$11\frac{11}{48}$
13	60	$10\frac{25}{48}$
14	60	$9\frac{40}{48}$

Far-

Fig.

Fardo levantado, espresado en libras.	Segundos.	Número de vueltas.
15	60	$9\frac{10}{48}$
16	60	$8\frac{31}{48}$
17	60	$8\frac{9}{48}$
18	60	$7\frac{32}{48}$

Siendo el fardo de 19 libras, daba todavia vueltas la rueda, bien que muy lentamente. Quando el fardo era de 20 libras, la rueda se paraba aunque se la pusiese en movimiento con la mano para que tomase agua. Sin embargo parece poco todavia el peso.

La rueda, quando no tenia fardo alguno que levantar, daba $40\frac{1}{4}$ vueltas en 1 minuto.

745 Reflexiones. Si se multiplica cada fardo levantado por el número correspondiente de vueltas de la rueda, se echará de ver que estos productos ván primero creciendo, y despues menguando. El mayor de todos es el que corresponde á unas 17 libras. Entonces la rueda anda con una velocidad que es sensiblemente qual la pide la fórmula de antes (741).

746 Yá que en el caso del efecto máximo la rueda dá $8\frac{3}{16}$ vueltas en 1 minuto, y en el mismo tiempo daría $40\frac{1}{4}$ vueltas, si no levantára fardo ninguno, síguese que la velocidad necesaria para el efecto máximo, es á la velocidad que la rueda adquiriría naturalmente si no tuviera far-

Fig. fardo ninguno que levantar, como $8\frac{3}{16}$ es á $40\frac{1}{4}$, ó como 1 es á 5 con corta diferencia.

Del movimiento de los fluidos elásticos.

747 Trataremos con brevedad del movimiento de los fluidos elásticos, por hallarse muy imperfecta todavia esta teórica en sus elementos esenciales. El calor y el frio causan variaciones continuas en la virtud elástica, y es muy poco conocida la ley que siguen estas variaciones. Sin engolfarnos en generalidades hypotéticas que empeñan en cálculos penosísimos, nos ceñiremos á averiguar el movimiento del ayre, resolviendo aquellas cuestiones no mas de que puede la práctica hacer uso con mas frecuencia.

182. 748 Sea *ABCD* un cilindro cerrado por todos lados, que contiene un ayre homogeneo é igualmente denso en toda su estension. Este ayre se halla en un estado de compresion, y así que se le dé alguna salida, ó se le facilite estenderse ó dilatarse, se dilatará con efecto uniformemente, y menguará su virtud elástica. La fuerza elástica en cada estado de compresion siempre es igual á la fuerza que causa dicha compresion (48 y 64). Así, por egemplo, si el ayre *ABCD* fuese como el que respiramos, y fuere por consiguiente comprimido, ó por la presion misma de la atmósfera, ó por una fuerza equivalente, sostendrá con su resorte el peso de una columna de agua de 32 pies de altura; quiero decir, que considerando el asiento superior *AD* del cilindro como una tapa que se puede mover con desahogo

á

á lo largo de las paredes, é imaginando que dicha tapa está Fig. cargada en toda su superficie de una columna de agua de 32 pies de alto, habrá equilibrio entre la fuerza elástica del ayre, y el peso de la columna de agua; y la tapa *AD* no podrá ni subir ni bajar. Suponemos que no varíe el calor del ayre *ABCD*; porque si este calor creciera ó menguara, la fuerza elástica crecería ó menguaría. Supondremos tambien de aquí en adelante que es uno mismo el grado de calor en todos los ayres cuyas virtudes elásticas emprendiéremos medir ó comparar.

749 Enseña la esperiencia (68 y 69) que si una misma masa de ayre cuyo temple no varía, queda reducida á ocupar succesivamente diferentes volúmenes, las fuerzas que la comprimen, y por consiguiente tambien sus diferentes fuerzas elásticas, seguirán la razon inversa de los volúmenes, ó la razon directa de las densidades. Pero reducir una misma masa de ayre á que ocupe diferentes volúmenes, es lo mismo que introducir en un mismo volumen distintas cantidades de ayre, cuyas densidades sean las mismas respectivamente que las de la masa propuesta en sus diferentes estados. Inferamos, pues, de lo que manifiesta la esperiencia, que si diferentes cantidades de ayre ocupan succesivamente un mismo volumen, tienen fuerzas elásticas que serán proporcionales á sus densidades, pues la densidad no es mas (IV. 30) que la cantidad de materia contenida en un mismo volumen dado.

750 Síguese de aquí que si se hace en *C* un aguge-

ri-

Fig. rito por donde pueda el ayre irse al vacuo, se saldrá continuamente con la misma velocidad que tuviere en el primer instante. Porque la densidad del fluido, y la fuerza elástica que causa la evacuacion por la abertura C, menguan en la misma razon. Pero quando la masa que se ha de mover, y la fuerza motriz guardan una con otra la misma razon, debe permanecer una misma la velocidad. Si esto pareciere algo obscuro, lo probaremos de otro modo.

Sea, para el primer instante del movimiento, P el peso con el qual la fuerza elástica del ayre se puede equilibrar; Q, la densidad de este fluido; V, su velocidad; y llamemos q la densidad que tiene al cabo de un tiempo t; u, su velocidad al cabo del mismo tiempo. Llamemos tambien M y m las masas de ayre que salen en tiempos iguales en ambos casos. Es patente que la fuerza elástica del ayre al cabo del tiempo t será $\frac{Pq}{Q}$; y por ser las fuerzas motrices proporcionales á las cantidades de movimiento que producen, tendremos $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Pero las masas M y m son como los productos de sus volúmenes por sus densidades, y sus volúmenes son como los productos del orificio por las velocidades. Así, por ser uno mismo el orificio en ambos casos, tendremos $M : m :: QV : qu$. Luego $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$. De donde sacamos $V = u$.

Esto está diciendo que si el peso P fuere igual al de una columna de agua de 32 pies de altura, el ayre saldrá continuamente con la misma velocidad que el agua de un depósito cuya carga fuese de 32×850 ó 27200 pies.

Su-

751 Supongamos ahora que el ayre al salir del vaso *ABCD*, en lugar de esparramarse en el vacuo, salga á un ayre ambiente mas raro que él, y de una estension infinita qual es lícito suponer la de la atmósfera respecto del vaso *ABCD*. Guardaremos las mismas denominaciones de poco há, y llamaremos D la densidad constante del ayre esterior. La resistencia que este ayre opone sin cesar á la salida del ayre interior, es $\frac{PD}{Q}$. Así, en el primer instante la fuerza espulsiva del ayre interior es $P - \frac{PD}{Q}$; y al cabo del tiempo t, la fuerza espulsiva es $\frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q}$. Tendremos, pues, $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q} :: MV : mu :: QVV : quu$; de donde sacaremos $u = V \times \sqrt{\left[\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}\right]}$, cuya equacion dá á cada instante la relacion entre u y q, siendo constantes y dadas todas las demás cantidades. Fig.

Hace patente esta equacion que tendremos $u = 0$, ó que dejará de salir el ayre quando fuere $q = D$. Es superfluo decir que si fuese $D = Q$, no habria movimiento ninguno.

752 Supongamos que el cilindro *ABCD* esté vacío en el primer instante, y que el ayre esterior, siempre de una estension infinita, entre en él por la abertura C. Llamemos F la fuerza elástica y constante de dicho ayre; D, su densidad; V, la velocidad con que entra en el cilindro en el primer instante; u, su velocidad al cabo del tiempo t; q, la densidad del ayre contenido en el cilindro al cabo del mismo tiempo. La fuerza impulsiva del ayre en el cilindro será F en el primer instante, y $F - \frac{Fq}{D}$ al cabo del

Fig. del tiempo t. Tendremos, pues, $F : F - \frac{Fq}{D} :: DVV : Duu :: VV : uu$; y por consiguiente $u = V \times \sqrt{\left(1 - \frac{q}{D}\right)}$. Por donde se echa de ver que el ayre dejará de entrar en el cilindro, quando tuviese la misma densidad por adentro, que por afuera.

753 Si en la misma hypótesi hubiese en el cilindro, en el primer instante, ayre cuya densidad fuese $= Q$, tendríamos $F - \frac{FQ}{D} : F - \frac{Fq}{D} :: VV : uu$, y $u = V \times \sqrt{\left(\frac{D-q}{D-Q}\right)}$.

183. 754 Sean $ABCD$, $CFGH$ dos cilindros cerrados por todas partes, en cada uno de los quales hay ayre distintamente condensado. Si se hace en C un agugero por donde los dos ayres lleguen á comunicarse uno con otro, el ayre mas denso se pasará al mas raro. Supongamos que este paso se haga desde el vaso $ABCD$ al vaso $CFGH$. Llamaremos para el primer instante, P la fuerza elástica del ayre $ABCD$; Q, su densidad; V, su velocidad; D, la densidad del ayre $CFGH$; y al cabo de un tiempo t, q la densidad del ayre $ABCD$; u, su velocidad; d', la densidad del ayre $CFGH$. La fuerza espulsiva del ayre $ABCD$ será $P - \frac{PD}{Q}$ en el primer instante, y $\frac{Pq}{Q} - \frac{Pd'}{Q}$ al cabo del tiempo t. Por consiguiente tendremos $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{Pd'}{Q} :: QVV : quu$. De aquí sale $u = V \times \sqrt{\left[\frac{Q(q-d')}{q(Q-D)}\right]}$. La evacuacion cesará quando fuere $d' = q$.

Como la cantidad de ayre que hay en los dos cilindros es constantemente la misma, si llamamos A la cabida ó el volumen del cilindro $ABCD$; B, el volumen del cilindro

$CFGH$

CFGH, tendremos estotra equacion $A.Q + B.D = A.q + B.d'$. Fig. De donde se saca $d' = \frac{A(Q-q)+B.D}{B}$. Si substituimos este valor de d' en el de u, sacaremos $u = V \times \sqrt{\left[\frac{Q[B(q-D)-A(Q-q)]}{Bq(Q-D)}\right]}$, cuya equacion dá la velocidad u correspondiente á cada densidad q.

755 En todo lo que dejamos dicho hemos supuesto que las velocidades de las evacuaciones proviniesen únicamente de las diferentes fuerzas elásticas del ayre. Si con estas fuerzas se juntára la accion de un émbolo, el qual moviéndose uniformemente impeliera el fluido, no por esto sería mas dificultosa la averiguacion de los puntos que hemos considerado. Porque todo se reduciría á añadir á las velocidades determinadas hasta aquí, la velocidad que la accion del émbolo causare al pasar por el orificio. Así, por egemplo, si en lo dicho (750) consideramos *AD* como una tapa mobil que bage uniformemente con una velocidad k, en virtud de la presion de un émbolo, ó de otra fuerza qualquiera, y llamamos n la razon entre la area *AD* y la area del orificio; el fluido tendrá por razon de esta causa, al paso por el orificio, una velocidad cuya espresion será $n.k$. Añadiendo esta velocidad á la velocidad V que es efecto de la fuerza elástica, la suma $V + n.k$ será la velocidad total de la evacuacion. Del mismo modo se discurrirá en los demás casos.

Si fuera tanta la estension del fluido en altura que no pudiéramos menos de atender á su peso, no se condensaría ni dilataría uniformemente en sus diferentes estados; y

se-

Fig. sería algo mas trabajosa la determinacion del movimiento. Pero omitiremos la consideracion de este caso que ocurre poco en la práctica. Toda esta doctrina se aplica principalmente al movimiento del ayre en la máquina pneumática, y en las bombas de que hablaremos dentro de poco.

Fig.

DE ALGUNOS INSTRUMENTOS, *Y MÁQUINAS.*

756 DE algunos puntos que hemos ventilado en estos Elementos, y en particular de lo que dejamos sentado (57 &c.) acerca de los fluidos elásticos, se hacen varias aplicaciones muy provechosas que nos han parecido acreedoras á que las tratásemos separadamente de todo lo demás. Por este motivo las hemos dejado para lo último, deseosos tambien de no interrumpir la serie de los asuntos que nos importaba tratar, que forman un cuerpo de doctrina, y un todo que nada habrá perdido, ni con mucho, porque le hayamos tratado sin ninguna interpolacion. Redúcense las espresadas aplicaciones á la invencion de diferentes instrumentos, cuya descripcion y usos vamos á manifestar.

De la Máquina Pneumática.

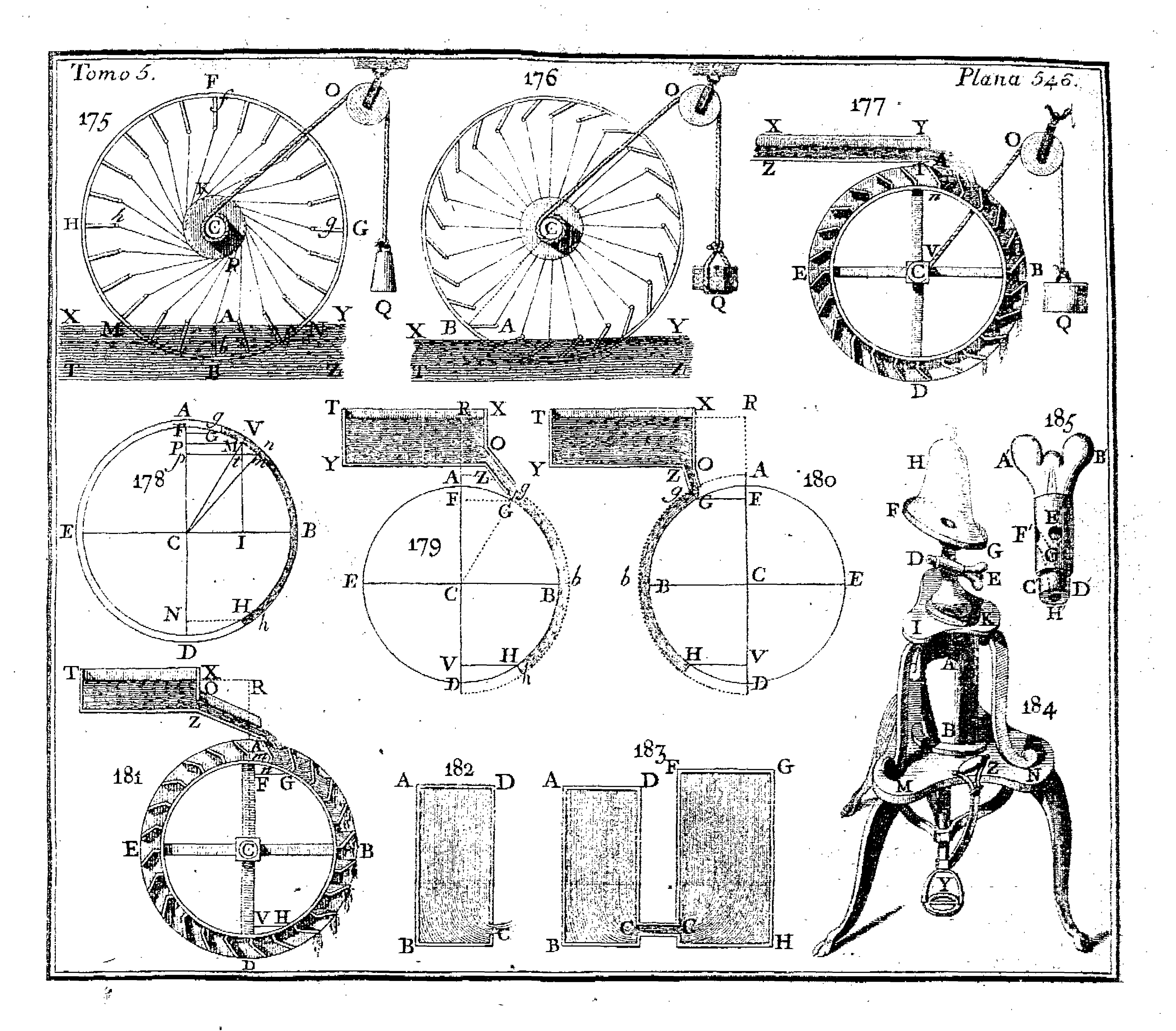
757 La figura representa la Máquina Pneumática. 184.
Compónese 1.° de un cilindro hueco ó cuerpo de bomba *AB.* 2.° de un émbolo cuyo mango remata en forma de estribo *Y* para empujarle ácia abajo con el pie, y lleva un puño *Z* para empujarle ácia arriba con la mano. 3° de una llave *DE*. 4.° de una platina *FG* cubierta con un cuero mojado sobre el qual se coloca el recipiente ó campana de vidrio *H*. 5.° de un pie *MN* que unido con la pieza *IK* por medio de los brazos *IM*, *KN* sirve para afianzar el cuerpo de bomba.

Fig. Está hecha la llave *DE* con tal artificio, que despues de puesta se la puede dar la situacion que conviene para mantener la comunicacion entre el recipiente y el cilindro, y empujando entonces el émbolo ácia abajo, se saca ayre del recipiente. Pero como este no se puede sacar todo de un golpe, y para sacar mas es indispensable empujar otra vez el émbolo ácia abajo, es menester que se le pueda empujar primero ácia arriba, sin que vuelva á introducirse en el recipiente el ayre que se sacó. Para este fin se dá un quarto de vuelta á la llave *DE*, con lo que se cierra la comunicacion entre el cilindro y la bomba, y se abre otra comunicacion entre el mismo cilindro, y el ayre esterior ácia el qual el émbolo arroja, quando se le empuja ácia arriba, el ayre que contenia, y se habia sacado del recipiente. Finalmente, dando otro quarto de vuelta á la llave, se pone la máquina en la situacion que se necesita para sacar mas ayre del recipiente.

$A'B'C'D'$ representa el cuerpo de la llave. En E' hay
185. un agugero que la atraviesa, y por él tiene el cilindro comunicacion, quando se quiere, con el recipiente. En dando á la llave un quarto de vuelta se cierra esta comunicacion, y abocándose entonces el agugero F' de la llave en el cilindro, si se empuja ácia arriba el émbolo, este impele el ayre que contiene por el conducto $F'G'H'$ cuyo estremo H' vá á parar al ayre esterior.

758 Sentado esto, lo que acerca de esta máquina hemos de averiguar, es la dilatacion que en ella padece el

ay-


175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185

ayre; para lo qual llamemos A la suma de las cabidas del recipiente, y de la parte superior del cuerpo de bomba, que queda vacía quando se sube el émbolo; B, la suma de las cabidas del recipiente, y del vacío del cuerpo de bomba, quando se baja el émbolo; n, el número de veces que obra el émbolo; $\frac{m}{1}$, la razon entre la densidad del ayre esterior, y la del ayre interior rarefacto despues que el émbolo ha obrado n veces. Supongamos que en el primer instante se suba el émbolo, estando abierta la llave ácia la parte de afuera, y cerrada por la parte del recipiente; que despues se plante el recipiente encima de la platina. Es evidente que en el mismo instante la densidad del ayre que ocupa el espacio A, es la misma que la del ayre esterior; la llamaremos D. Si despues cerramos la llave por la parte de afuera, la abrimos por la parte del recipiente, y bajamos el émbolo; el ayre que ocupa el espacio A se dilatará por su virtud elástica, y se esparramará uniformemente en el espacio B. Así, la densidad que tendrá en el espacio B, será á la densidad que tenia en el espacio A, recíprocamente como A es á B; porque siendo la masa una misma, la densidad es (IV. 32) recíprocamente proporcional al volumen. Por consiguiente, si hacemos esta proporcion $B : A :: D :$ á un quarto término; este quarto término $D \times \frac{A}{B}$ espresará la densidad del ayre interior despues que el émbolo hubiere obrado una vez. Asimismo, si despues de cerrada la llave por la parte del recipiente, abriéndola por la parte de afuera, se sube el émbolo, se cierra Fig.

Fig. la llave por la parte de afuera, se la abre por la parte del recipiente, y se vuelve á bajar el émbolo; el ayre que ocupa el espacio A, y cuya densidad es $D \times \frac{A}{B}$, se esparramará en el espacio B, por manera que si hacemos esta proporcion $B : A :: D \times \frac{A}{B}$: á un quarto término, este quarto término $D \times \frac{A^2}{B^2}$ espresará la densidad del ayre interior despues que el émbolo hubiere obrado segunda vez. Discurriendo por el mismo término, echaremos de ver que la densidad del ayre interior despues que el émbolo hubiere obrado tres veces, será $D \times \frac{A^3}{B^3}$; que la densidad despues que el émbolo hubiere obrado quatro veces, será $D \times \frac{A^4}{B^4}$; y que quando el émbolo hubiere obrado n veces, la densidad será $D \times \frac{A^n}{B^n}$. Luego tendremos, por el supuesto, $D : D \times \frac{A^n}{B^n} :: m : 1$; de donde se saca $m \times A^n = B^n$. Tomando el logaritmo de cada miembro, tendremos $L(m \times A^n) = L . B^n$; y por consiguiente (II. 346 y 347) $L . m + nL . A = nL . B$.

Luego en conociendo tres de las quatro cantidades m, n, A, B que hay en esta equacion, se hallará la quarta. Manifestarémoslo.

759 Cuestion I. *Dadas las cabidas* A *y* B, *y la razon* m *entre la densidad del ayre esterior, y la del ayre interior, determinar el número de veces* n *que obró el émbolo.*

De la equacion antecedente se saca esotra $n = \frac{L.m}{L.B - L.A}$ que resuelve la cuestion.

Por

Por egemplo, sea $A = 5$, $B = 7$, $m = 4$; saldrá Fig. $n = \frac{60206}{14613} = 4\frac{1}{8}$, con corta diferencia.

760 Cuestion II. *Dadas las cabidas* A *y* B, *el número* n *de veces que obró el émbolo; hallar la razon* m *entre la densidad del ayre esterior, y la del ayre interior.*

Esta cuestion se resuelve por la equacion log. $m = n \times (\log. B - \log. A)$.

Pongo por caso que sea $A = 5$, $B = 7$, $n = 10$; sacaremos $L.m = 1,46128$, y por lo mismo $m = 29$, con corta diferencia.

761 Cuestion III. *Dada la razon* m *entre la densidad del ayre esterior y la del ayre interior, el número* n *de veces que obró el émbolo, la cabida* A; *hallar la cabida* B.

Resuelve esta cuestion la equacion $L.B = \frac{L.m + nL.A}{n}$.

Sea, por egemplo, $m = 29$, $n = 6$, $A = 5$. Sacaremos $L.B = 0,94270$, y por consiguiente $B = 9$, con poca diferencia.

762 Cuestion IV. *Dada la razon* m *entre la densidad del ayre esterior y la del ayre interior, el número* n *de veces que obró el émbolo, la cabida* B; *hallar la cabida* A.

La equacion $L.A = \frac{nL.B - L.m}{n}$ resolverá esta cuestion.

Supongamos, por egemplo, que sea $m = 29$, $n = 9$, $B = 7$, sacaremos $L.A = 0,68261$, y por consiguiente $A = 5$, con corta diferencia.

Fig.

Del Barómetro.

763 Sirve este instrumento, conforme llevámos dicho (58), para medir el peso del ayre, ó por mejor decir, los varios estados de compresion de la atmósfera. Los hay de diferentes especies, pero aquí solo hablaremos del barómetro simple, al qual vienen á reducirse en sustancia todos los demás, y no es otra cosa que el tubo de Torricelli, aplicado á una tabla vertical dividida en pulgadas,
186. empezando desde la superficie *MN* del azogue que está en el vaso *MCDN*, y subdividida en lineas ó medias lineas en su parte superior. Estas graduaciones manifiestan lo que sube el azogue, ó las variaciones que sobrevienen en la presion de la atmósfera.

764 Una vez que la elasticidad del ayre es igual á la fuerza que le comprime (64), es patente que si el resorte de este fluido ha sido contraído por su peso solo, la una ó la otra fuerza indistintamente sostendrá el mercurio á la misma altura dentro del tubo *AB*. De esto proviene el que en un quarto muy cerrado, ó debajo de una campana grande de vidrio, puesta encima de una mesa orizontal, el azogue se mantiene á la misma altura en el barómetro, que si estuviera al ayre libre. Esta suspension es efecto de la elasticidad del ayre encerrado en el quarto ó debajo de la campana, que se hallaba contraído por la presion del ayre esterior, antes que se cortase su comunicacion recíproca.

El

765 El tubo de un barómetro ha de tener un grueso determinado, pongo por caso, dos ó tres lineas de diámetro interior, á fin de que el mercurio que contiene no esperimente sobrado la impresion del calor que procura dilatarle. Se esperimenta con frecuencia que no concuerdan las alturas de dos barómetros puestos en un mismo sitio, porque el efecto del calor en el mercurio es mas ó menos notable, conforme sea el tubo mas ó menos angosto. A esta causa pueden agregarse otras, pongo por caso, alguna corta desigualdad en las gravedades específicas de los dos mercurios, la dificultad en purgarlos igualmente de ayre, las diferentes asperidades de las paredes de los tubos, el vacío mas ó menos perfecto en sus partes superiores &c. Fig.

766 Hay barómetros luminosos, llamados así, porque sacudiéndolos en un lugar obscuro arrojan luz. Las condiciones para construirlos son 1.° Que el tubo esté muy seco, por lo menos en su parte superior donde se ha de manifestar la luz. Se le limpia facilmente con un poco de algodon atado al estremo de un hilo de alambre. 2.° Que el mercurio sea muy puro, y se consigue purificarle colándole, digámoslo así, por un cucurucho de papel, cuya embocadura sea muy angosta, porque suelta de este modo bastante porquería. 3.° Que el mismo mercurio esté muy purgado de ayre. Para esto se echa primero en el tubo la tercera parte del mercurio que se quiera gastar, despues se le calienta poco á poco y por grados, arrimándole poco á poco á la lumbre; se le menea con un alambre para que

Fig. salgan las ampollitas de ayre que hay dentro del mercurio y que el calor impele ácia afuera. Despues se echa otra tercera parte, con la qual se egecutará lo propio, y por fin otra tercera parte que se dejará conforme se hubiere echado, porque basta la purificacion de las dos primeras. No se ha notado que la luz de los barómetros luminosos varíe por razon de los diferentes grados de calor. Estos barómetros son muy buenos, y los que mas se usan hoy dia.

767 Si por inadvertencia ú otra causa se hubiese encerrado ayre en el espacio *EB*, sería facil de determinar la relacion entre la presion de la atmósfera, la altura *AB* del tubo respecto del nivel *MN* del mercurio del vaso, la altura del espacio que el ayre encerrado ocupaba naturalmente en el tubo, y la altura á la qual el mercurio se mantendrá mas arriba del nivel *MN*. Porque sea *BH* el espacio que el ayre encerrado en *BE* ocuparía en su estado natural, esto es, si el estremo superior *B* del tubo estuviera abierto, y se comunicára con el ayre esterior. La virtud elástica de dicho ayre *BH* hace fuerza para dilatarle ácia qualesquiera direcciones. Pero como encuentra un estorvo en el estremo *B* que está cerrado, rechaza de arriba abajo la columna *AE* de mercurio, y es evidente que esta columna se mantendrá á la altura donde hubiere subido, quando la suma compuesta de la fuerza elástica del ayre dilatado en *BE*, y del peso de la misma columna *AE* de mercurio, fuere igual con la presion de la atmósfera, esto es, con el peso de una columna de mercurio, cuya altu-

tura llamaremos b. Ahora bien, como la fuerza elástica del ayre natural BH siempre es igual (64) á la fuerza comprimente, que en el caso actual es el peso de la atmósfera, es evidente que (68) la fuerza elástica del ayre dilatado BE será $\frac{h \times BH}{BE}$. Tendremos, pues, la equacion $\frac{h \times BH}{BE} + AE = b$, ó $\frac{h \times BH}{AB - AE} + AE = b$, en que vá cifrada la relacion espresada, y manifiesta que en conociendo tres de las quatro lineas b, BH, AB, AE se conocerá la quarta. Fig.

768 Volvamos atrás, y supongamos que tenga el barómetro toda la perfeccion que se le puede dar. Qualquiera se hará cargo de que quanto mas bajo fuere un sitio, tanto mayor será la presion de la atmósfera, y mas arriba deberá subir por lo mismo el mercurio. Esto es cabalmente lo que pasa, quando no hay causa que lo estorve. Se sabe que en un mismo sitio se esperimentan muchas variaciones en la altura del mercurio, por razon de los diferentes estados de la atmósfera. Por lo comun el mercurio sube quando el tiempo es bueno, constante, seco, y sin ayres; al contrario, baja quando el tiempo es vario, lluvioso, tempestuoso, y soplan ayres fuertes, y está el ayre lleno de vapores. Los mayores ascensos y descensos del barómetro se esperimentan en invierno, y estas variaciones son en general mas notables en los paises frios que en los calurosos. Si quando hace buen tiempo bajáre el mercurio, será señal de que lloverá, ú hará ayre; por el contrario, si estando el tiempo lluvioso subiere el mercurio, será señal de que hará buen tiem-

po.

Fig. po. Quando el mercurio baja en la estacion del calor, pronostica truenos; quando hace frio, y sube el mercurio, anuncia hielos; y su descenso quando hiela, pronostica que cesarán los hielos &c. Estos son los hechos generales que atestigua la observacion, y todo el mundo conoce, pero padecen muchas excepciones, y en algunos casos se reparan efectos contrarios á los que pronostica el barómetro.

769 Puede servir en algunas ocasiones el barómetro para averiguar la diferencia de nivel entre muchos puntos de la superficie de la tierra.

Porque como una misma masa de ayre se condensa en razon del peso que la comprime (69), ó lo que es lo propio, yá que siendo igual el volumen, la densidad del ayre crece como el peso comprimente; si nos figuramos la altura de la atmósfera dividida en una infinidad de rebanadas de un mismo grueso, es evidente (70) que siendo uno mismo el temple, las densidades de dichas rebanadas forman una progresion geométrica, á la qual corresponde la progresion arismética de las alturas. Las elevaciones del mercurio en el barómetro pueden representar los términos de la progresion geométrica, por ser el peso de la columna de mercurio igual ó proporcional, siendo unas mismas las circunstancias, á la presion de la atmósfera, y los logaritmos de las tablas pueden representar los términos de la progresion arismética, cuyos logaritmos componen con efecto una progresion arismética quando los números á los quales corresponden componen una progresion geométrica. Por consi-

siguiente la diferencia de los dos logaritmos de las dos elevaciones del mercurio en dos sitios propuestos, será proporcional á la diferencia de nivel entre los dos sitios. Luego si conociésemos de antemano, por medio de una medicion inmediata, lo que un sitio es mas alto que otro, y las alturas del mercurio en ambos, se determinará por medio de una proporcion la diferencia de nivel entre otros dos sitios. Comparando despues muchos resultados de esta especie con las determinaciones geométricas, se formará juicio sobre si este método se puede practicar con seguridad. Con aplicar esto á dos casos, lo daremos mejor á entender. Fig.

770 I. Refiere *Bouguer* que en la cumbre de la montaña de Pitchincha, en el Reyno del Perú, el mercurio se mantenia en el barómetro á 15 pulg. 11 lineas; y que en Caraburu, estremo septentrional de la primera base de los triángulos que sirvieron para determinar la figura de la tierra, se mantenia á la altura de 21 pulgadas $2\frac{3}{4}$ lineas. Se sabe por una determinacion geométrica que el primer sitio es 1208 toesas mas alto que el segundo.

En virtud de estos datos se pregunta, ¿quál es la situacion de la montaña de Chusai respecto de Caraburu? suponiendo, conforme observó *Godin*, que el mercurio se mantenia en Chusai á 17 pulg. $10\frac{1}{2}$ lineas.

La elevacion del mercurio en Caraburu $= \frac{1019}{4}$ lineas, cuyo logaritmo es 2,4061142; la elevacion del mercurio en Pitchincha $=$ 191 lineas, cuyo logaritmo es

2,

Fig. 2,2810334. Restando este logaritmo del antecedente, la diferencia es 0,1250808.

La elevacion del mercurio en Chusai = 214,5 líneas, cuyo logaritmo es 2,3314273. Restando este logaritmo del logaritmo de la elevacion del mercurio en Caraburu, la diferencia es 0,0746869.

Ahora haremos esta proporcion 1250808 : 746869 :: 1208 toesas : á la altura de Chusai mas arriba de la de Caraburu, que se hallará ser 722,95 toesas, cuyo resultado no discrepa 1 toesa del que sacó Godin por una medicion geométrica.

771 II. Se pregunta qual es la situacion de Caraburu, respecto de un lugar llamado Alausi, que está al pie de la montaña de Chusai, donde el mercurio se mantenia á 21 pulg. $1\frac{1}{4}$ linea, segun observó el mismo Godin.

Fundaremos el cálculo en los mismos datos de la pregunta antecedente. Así, despues de restar el logaritmo de la elevacion del mercurio en Alausi del logaritmo de la elevacion en Caraburu, de donde sale la resta 0,0025648; haremos esta proporcion 1250808 : 25648 :: 1208 toesas : á la altura de Alausi respecto de Caraburu, que se hallará ser de 24,78 toesas, cuyo resultado concuerda con cortísima diferencia con la medida geométrica.

772 Manifiestan estos dos egemplos que el barómetro determina las posiciones respectivas de los lugares propuestos con bastante precision. Bouguer se valió con gran fe-

felicidad de este método en toda la parte mas elevada de Fig.
las cordilleras del Perú. Quanto mas elevado es un lugar, mas despejado es el ayre, mas libre del influjo de las causas que alteran su equilibrio, y por lo mismo padece menos alteraciones la proporcion natural de sus densidades que dejamos sentada tiempos ha (70). Pero no sale bien la aplicacion del espresado método en la parte baja de las cordilleras. Tampoco sale bien en las demás montañas de la zona torrida, y sale todavía menos en Europa. Por consiguiente se debe usar con suma precaucion, si se quieren sacar resultados exactos.

773 Antes de concluir este asunto añadiremos que por lo dicho (769) se puede determinar la altura *ER* 187.
á la qual el ayre que entra por el agugero *E* en el esperimento de la bomba de Sevilla (61) puede sostener el agua en el vacío; porque es evidente que podemos considerar la columna de agua *ET* como un peso que egerce cierta reaccion en el ayre inferior que la sostiene. Es tambien constante que este peso formaría equilibrio con la presion de la atmósfera en *RP*. Supongamos, pues, por egemplo, que en el lugar *A* donde se hace el esperimento, la presion de la atmósfera levante el agua 32 pies en el vacuo, ó lo que es lo mismo el mercurio 28 pulg. en el barómetro, y que la columna del agua *ET* sea de 24 pies, ó equivalente á una columna de mercurio de igual base, y de 21 pulgadas de altura. La cuestion propuesta viene á ser la misma que estotra: Se sabe que en el lugar *A* el mercurio

se

Fig. se sostiene á 28 pulg. en el barómetro; se pregunta ¿quál será la altura de un lugar *R* donde el mercurio se sostendrá á 21 pulgadas? Se halla que el lugar *R* es 1210 toesas mas alto que el lugar *A*. Luego la columna de agua *ET* subiría á la misma altura, si no franqueára paso al ayre por su masa, y si el rozamiento por las paredes del tubo no le opusiera ninguna resistencia.

Del Termómetro.

774 El *Termómetro* es un instrumento de vidrio, en el qual se encierra un licor elástico, cuyo licor, condensándose con el frio, ó dilatándose con el calor, manifiesta las variaciones que ocurren en el temple de la atmósfera.

775 Los primeros termómetros eran muy imperfectos; componiánse de una bola de vidrio hueca pegada á un tubo largo abierto. Despues de calentada la bola para dilatar y reducir á menos la densidad del ayre interior, se metia verticalmente el tubo en un vaso de agua comun, mezclada con una poca de agua regia para que no se helase en invierno, y de tintura de vitriolo disuelto que la teñía de verde; hecho esto, se afianzaba el instrumento en esta posicion vertical, estando la bola arriba, el tubo debajo, en una tabla graduada. Como el calor habia reducido á menos la densidad del ayre en el instrumento, el agua coloreada se subia por el tubo, donde se mantenia constantemente á la misma altura, mientras se mantenía el mismo el temple del ayre esterior. Pero quando crecía el calor ó el frio,

el

el ascenso ó descenso del agua en el tubo manifestaba esta variacion, porque creciendo con el calor, ó menguando con el frio la fuerza elástica del ayre encerrado en el instrumento, rechazaba ácia abajo, ó dejaba subir el agua inmediata, que la presion del ayre esterior en la superficie del vaso sostenia. Es evidente que la variacion del peso esterior, además del calor y del frio, tambien coadyuvaba para que subiese ó bajase mas ó menos el agua en el tubo, y que por lo mismo estos termómetros no median con precision el calor y el frio. Fig.

776 Poco despues la Academia de Florencia propuso un termómetro mucho mas exacto. Este se compone de una bola de vidrio armada de un tubo abierto primero por el otro estremo; se la echa cierta porcion de un licor dilatable, pongo por caso de espíritu de vino; despues se sella herméticamente el orificio del tubo, se afianza el instrumento en una tabla vertical, y graduada, la bola abajo y el tubo arriba. De este modo el licor del termómetro no puede esperimentar la presion de la atmósfera, y señala con sus dilataciones las variaciones de calor y frio que se hacen en la atmósfera. Pero no basta un instrumento que manifieste las variaciones del calor y del frio en un mismo lugar; es preciso uno que sirva para comparar el calor y el frio de un lugar con el de otro, sea para averiguar el temple relativo de diferentes climas, sea para poder hacer en qualesquiera parages un gran número de esperimentos físicos y químicos que requieren un mismo grado determinado de frio ó de

ca-

Fig. calor. Por consiguiente la graduacion del Instrumento debe empezar desde un término fijo y conocido que pueda servir para arreglar la marcha de diferentes termómetros, y hacer por este medio observaciones que se correspondan. La Academia de Florencia determinó este punto con poca precision. Tomó por término de su graduacion el calor, que causa en aquellos parages el mayor ardor de los rayos del sol, cuya determinacion es muy vaga y algo incierta.

777 Otros filósofos, y uno de ellos es Newton, han tomado por término fijo el calor del agua quando cuece, y el frio quando empieza á helarse el agua. Han construido sobre este principio un termómetro con aceyte de linaza, que es un licor bastante homogeneo, muy dilatable, que aguanta mucho frio sin helarse, y mucho calor sin llegar á cocer. Despues han construido su *escala* por medio de este instrumento, y un hierro encendido. De los esperimentos y cálculos, que estos filósofos hicieron, parece que espresando 1 el calor esterior del cuerpo humano, 3 representará, con corta diferencia, el calor del agua quando cuece, 6 el calor del estaño derretido, 8 el calor del plomo derretido &c. Si despues de metido el termómetro dentro de la nieve quando se deshace, el aceyte ocupa un espacio representado por 10000, el mismo aceyte ocupará, con el primer grado de calor que siempre es el del cuerpo humano, un espacio 10256; con el calor del agua quando empieza á cocer, un espacio 10705; con el calor del agua cociendo algun tiempo, un espacio 10725;

con

con el calor del estaño quando se derrite, un espacio 11516; con el calor del estaño bien derretido, un espacio 11596 &c. Aunque esta tabla que podria proseguirse mucho mas, sea mas exacta que quantas se habian hecho antes en este asunto, sirve poco por el inconveniente que padecen los termómetros hechos con aceyte sea el que fuere: estas materias pegajosas se pegan á las paredes del tubo, y su adherencia varía algo por razon del frio y del calor; de donde resulta ser desigual la marcha del termómetro. A mas de esto, el calor del agua que cuece, aun quando ha cocido algun tiempo, no es un término fijo sino quando la atmósfera está en un estado fijo y determinado; porque se ha observado que quando el mercurio del barómetro está muy alto, ó es mucha la presion de la atmósfera, cuesta mas dificultad calentar el agua, pero tambien adquiere un grado de calor mayor que quando el mercurio del barómetro está bajo. Tambien se reparan algunas variaciones en el calor de los metales derretidos. Fig.

778 *Amontons* tomó por término fijo, del mismo modo que Newton, el calor del agua quando cuece. El termómetro que propuso era muy bien discurrido, y su construccion de todo punto nueva. Pero su autor murió antes de perfeccionar y simplificar, quanto hubiera podido, este instrumento que se usa poco y es poco conocido.

779 Por el año de 1709, *Fahrenheit*, célebre Artista Olandes, publicó un termómetro de mercurio, del qual haremos mencion dentro de poco, quando hubiéremos dado

Fig. á conocer con pocas palabras el de *Reaumur*, que ha servido y aún sirve hoy dia para hacer muchísimos esperimentos meteorológicos. La construccion de este instrumento se halla en las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de Paris para el año de 1730. Se hace con espíritu de vino, y tiene la misma forma que los termómetros ordinarios de Florencia; pero estos, segun se solian construir, tenian graves defectos que Reaumur procuró remediar.

780 Yá hemos prevenido (776) que la graduacion de estos termómetros no empezaba desde un término bien conocido y bien determinado de frio y calor. Fuera de esto, al tiempo de graduarlos se tomaban por grados iguales de la ascension del licor partes iguales de la longitud de los tubos; y esto suponia que los tubos fuesen perfectamente cilíndricos en su interior. Pero sucede muy amenudo que no lo son por razon de la diferencia que hay en el grueso del vidrio. Finalmente no se escogía con bastante cuidado el espíritu de vino con que se hacian, ni se tenia presente que este licor se dilata mas ó menos, segun es mas ó menos rectificado.

781 Reaumur toma por principio fijo y constante de su graduacion la congelacion del agua, pero no la congelacion natural; porque se ha esperimentado con los termómetros comunes que todos los hielos naturales no son igualmente frios; tomó la congelacion artificial que se hace con hielo y sales. Para precaver las equivocaciones que podria ocasionar el hielo natural mas ó menos frio que sirve para

es-

esta operacion, el autor hace la congelacion en tiempo que Fig.
no tiene el ayre disposicion ninguna para helar el agua, y toma por término fijo el instante en que la primera superficie del agua empieza á helarse artificialmente. Esta primera accion del frio no puede menos de ser siempre bastante igual, y no pueden sobrevenir desigualdades sino despues, por razon de una aceleracion mayor ó menor.

782 Sentado esto, Reaumur gradúa el termómetro de modo que los grados iguales corresponden no á partes iguales de la longitud del tubo, sino á partes iguales del volumen del licor. Para este fin se vale de medidas muy cabales, unas chicas, otras mayores que contienen 25 ó 50 ó 100 veces cabales las chicas, para abreviar; se vale para esta operacion preliminar antes de agua comun que de espíritu de vino, por recelo de que este último licor se caliente y mude de volumen en el discurso de la operacion; echa un número limitado de partes iguales de agua, pongo por caso 1000 partes, hasta el punto donde se quiere señalar el término de la congelacion, y que está por lo regular á la tercera parte de la altura del tubo contando desde la bola; prosigue echando despues mas partes iguales, y determina los espacios que cogen en el tubo. Despues de concluida por este método la graduacion, arroja el agua; y secando, y limpiando con todo cuidado el instrumento, mete la bola dentro del hielo artificial; en lugar del agua substituye espíritu de vino quanto es menester no mas para llegar cabalmente al punto señalado para la congelacion; sacando

Fig. despues el termómetro de entre el hielo, y sellando el estremo del tubo, el espíritu de vino señala, con su contraccion ó dilatacion, los grados de temple mas arriba ó mas abajo de la congelacion artificial.

783 Es importantísimo conocer perfectamente la calidad del espíritu de vino que se gasta. Porque este licor es, como todos saben, una mezcla de flema ó agua, y de un aceyte etereo, sutil, inflamable; y es mas ó menos dilatable, segun es mas ó menos rectificado, ó conforme sea mayor ó menor la porcion de aceyte respecto de la del agua. El mejor espíritu de vino que pudo hallar Reaumur era tal que si con la congelacion artificial del agua era 400, llegaba á 435 con el calor del agua quando cuece, esta es la razon de 80 á 87. Todo espíritu de vino es bueno para construir un termómetro, con tal que se averigue su dilatabilidad, y se señale en la tabla misma del instrumento. Reamur enseña como se pueden reducir dos espíritus de vino á un mismo grado de dilatabilidad, y como se pueden comparar unas con otras las observaciones hechas con termómetros cuyos espíritus de vino son distintos, una vez conocida la razon de sus dilatabilidades.

784 Convienen todos los Físicos en que es muy bueno el termómetro de Reaumur para hacer observaciones meteorológicas; pero no sirve para señalar grados grandes de calor, como los de los metales derretidos, y tambien el del agua cociendo; porque el espíritu de vino muy calentado, ó no sube mas aunque suba de punto el calor, ó para

en

en cocer. A mas de esto, el licor pierde con el tiempo su virtud espansiva, y se pega al tubo. Fig.

785 Por estos motivos los mas de los Físicos dán la preferencia á los termómetros de mercurio, porque le asiste á este fluido la circunstancia de mantenerse siempre puro, y guardar su virtud espansiva, por mas añejo que sea; la de aguantar un calor muy grande sin cocer, y de no helarse sino quando llega el frio á un grado muy excesivo, conforme lo ha esperimentado la Real Academia de Petersburgo. El termómetro de esta especie mas usado hoy dia es el de Fahrenheit, y el de *Delisle.*

786 En el termómetro de Fahrenheit el tubo es muy delgado, y remata no en bola, sino en una botella cilíndrica de cabida correspondiente. Segun *Boerhaave*, que hizo mucho uso de este instrumento en sus esperimentos químicos, si concebimos la masa total del mercurio que contiene, dividida en 10782 partes, el mercurio se dilata 600 desde el mayor frio determinado por Fahrenheit, hasta llegar á la ebulicion, señalando cero en el punto del frio mayor. Este frio es efecto de una congelacion artificial hecha con una mezcla de sal armoniaco ó sal marina, y de nieve ó hielo molido que se pone al rededor de la bola. El mercurio se dilata 32 partes desde el término cero hasta el de la congelacion del agua, y 212 partes desde cero hasta el calor del agua hirviendo. Los grados superiores sirven para medir el calor de los aceytes hirviendo, del estaño y del plomo derretidos &c.

Fig. 787 Este termómetro es en general de una construccion dificil, larga, y costosa; pero se hacen chicos y como en compendio, cuya graduacion no se lleva tan adelante, y son muy á propósito para los observadores meteorológicos. Para construirlos, se llena de mercurio la bola, y una corta parte del tubo hasta una altura tal que metiendo la bola en la nieve, ó el hielo que se derrite, quede debajo del punto donde llega el mercurio, que se señalará 32, bastante espacio para señalar las divisiones hasta cero. Métase despues la bola en agua hirbiendo; señálese 212 en el punto donde el mercurio se detuviere; divídase el espacio entre 212 y 32 en 180 partes ó grados, y prosígase la graduacion en esta proporcion. Como puede suceder que el tubo no sea perfectamente cilíndrico por la parte de adentro, para precaver las equivocaciones que de esto podrian resultar en la graduacion, se le introducirá en el tubo un cilindro chico de mercurio, haciéndole andar succesivamente toda la longitud del tubo, y señalando al mismo tiempo los límites en que cupiere. Por este medio saldrán divisiones iguales, y se podrá señalar la graduacion con toda la exactitud posible.

788 La graduacion de Delisle es distinta. Supone que el volumen del mercurio, estando metido el termómetro en el agua hirviendo, es de 10000 ó 100000 partes, y en partes de esta especie señala mas arriba y mas abajo de este punto fijo todos los grados de calor correspondientes á todos los grados posibles de dilatacion y con-

densacion. Estas divisiones están señaladas contra el uso comun con números que crecen á proporcion de lo que mengua el calor. Fig.

789 Todos estos instrumentos tienen un defecto capital é irremediable. El vidrio esperimenta variaciones por razon del calor y del frio; se dilata y condensa mas ó menos, segun es mas ó menos grueso; esto altera la marcha natural del espíritu de vino ó del mercurio. A mas de esto, hemos de prevenir que los grados iguales de un mismo termómetro señalan dilataciones iguales del licor; pero no podemos afirmar que señalen grados iguales de calor. Porque puede suceder que el calor no siga en sus aumentos la misma razon que las dilataciones del licor. Es muy posible que al paso que crece igualmente el calor, halle mas ó menos dificultad para dilatar el mismo licor. La consecuencia que se puede sacar quando se vé que sube el licor en el termómetro, es que el calor crece, pero no la ley que guarda en sus incrementos.

De las Bombas.

790 Son las *Bombas* unas máquinas que sirven para levantar ó hacer subir el agua, de cuyo efecto la causa principal es la presion de la atmósfera. Las hay de tres especies; es á saber, la *Bomba atraente*, la *Bomba impelente*, y la *Bomba* que es á un tiempo *atraente* é *impelente*.

791 La *Bomba atraente* se compone de dos tubos 188.

Fig. 188. verticales *AKBC*, *CBDQ* que se unen uno con otro en *CB*. El primero que se mete dentro del agua *MN*, se llama *Tubo de atraccion*, el segundo se llama *Cuerpo de bomba*. En el lugar donde se unen estos dos tubos, se suele colocar la *Válvula* ó puertezuela *E* que se abre de abajo arriba. Digo que *se suele colocar*, porque esta válvula se pone á veces mas abajo; y esta es una circunstancia de poco momento por ahora. Por dentro del cuerpo de bomba sube y baja alternativamente un émbolo cuya espiga *Z* se mueve por medio de una palanca ó de otro modo qualquiera. Lleva la cabeza de este émbolo en la direccion de su ege, un agugero *t* tapado por la parte superior con una válvula *F* que se abre de abajo arriba. Anda, quando se le pone en movimiento, un espacio determinado, cuya altura supongo que sea *IT*; quiero decir, que quando el émbolo está bajo, su base inferior está en el plano orizontal *IH*; y quando está levantado, la misma base está en el plano orizontal *TS*.

792 El efecto de esta máquina es muy facil de entender. Supongamos que en el primer instante la base del émbolo esté en *IH*, y que el ayre contenido en la bomba sea el mismo que el ayre esterior. Las dos válvulas *E* y *F* están cerradas. Levántese ahora el émbolo hasta *TS*; la válvula *F* se mantiene cerrada por su peso, y por la presion con que en ella obra la atmósfera; el ayre que al principio ocupaba el espacio *ACIHBK* se dilata en fuerza de su elasticidad, abre la válvula *E*, y se esparrama en el espacio

A-

ACTSBK; al mismo tiempo la presion con que obra la atmósfera en la superficie *MN* del depósito impele el agua, y la obliga á subir un trecho *Aa* por dentro del tubo de atraccion donde dicha agua halla un ayre mas dilatado, y por lo mismo menos resistente que el ayre esterior. Bágese el émbolo, la válvula *F* se abrirá en fuerza de la compresion del ayre contenido en la bomba, entre la superficie del agua y la base inferior del émbolo; la válvula *E* se cerrará por su peso y por la presion del ayre superior; y el ayre que ocupa el espacio *CIHB* adquirirá la misma densidad que el ayre esterior. Volviendo á levantar el émbolo, la válvula *F* se cierra, el ayre ya rarefacto y contenido en el espacio *aCBk* se dilata y abre la válvula *E*; por manera que este ayre y el que quedaba en el espacio *CIHB*, se esparraman ahora en el espacio *aCTSBk*. Por consiguiente el agua debe subir todavia cierta cantidad aa' por el tubo de atraccion, en virtud de la presion de la atmósfera en la superficie del depósito. Prosiguiendo del mismo modo el movimiento del émbolo, el agua proseguirá subiendo; llegará por fin á tocar el émbolo; pasará por el agugero *t*, y subirá mas arriba del émbolo. Entonces no habrá mas ayre en la bomba debajo del émbolo, el qual dará y volverá á dar en el agua; los movimientos de las válvulas serán los mismos que antes, y el agua irá á salir por un desaguadero *O*. Fig.

793 Es de reparar que aun quando se pudiera conseguir dejar de todo punto sin ayre lo interior de la bomba,

Fig. ba, la altura *LM* de la base inferior *IH* del émbolo mas arriba de la superficie *MN* del depósito no podria ser quando mas que de 32 pies, pues de lo contrario (60) el agua no podria llegar á *IH*, ni mas arriba tampoco con mas razon. Pero en la práctica se le dán menos de 32 pies al espacio *LM*, porque nunca se puede quitar todo el ayre, y por otra parte el peso de la válvula inferior *E* se opone á la espulsion del ayre interior, ó á la ascension del agua, cuyo obstáculo solo puede vencerle la presion de la atmósfera.

En todo esto caminamos en el supuesto de que la presion de la atmósfera puede formar equilibrio con una columna de agua de 32 pies de altura, ó que el barómetro, en el sitio donde está la bomba, se mantenga á la altura de unas 28 pulgadas; pero si el barómetro se mantuviera mas ó menos alto, se debería rectificar la altura de la columna propuesta, conforme á lo dicho (31), y substituir su valor cabal donde hemos dicho 32 pies.

794 En el supuesto de que esté bien hecha la máquina, la evacuacion mas ó menos completa del ayre interior pende de la posicion mas ó menos ventajosa de la válvula *E*. Es uso comun colocar esta válvula en *AK* algo mas abajo del nivel *MN* del depósito, pero es mas comun todavia colocarla donde el tubo de atraccion se une con el
188. cuerpo de bomba, conforme se vé en la figura. Veamos qual de estas dos posiciones es la mejor. En virtud de lo que averiguaremos acerca de estos dos casos, se podrá formar juicio de las posiciones intermedias.

Su-

795 Suponemos primero que la válvula *E* esté en Fig. *AK*; y para mayor desembarazo, no atenderemos á su peso. Quando en los primeros instantes se levanta el émbolo desde *I* á *T*, el agua del depósito, impelida de la presion de la atmósfera, sube con facilidad por el tubo de atraccion; pero si la altura *LM*, bien que no llegue á 32 pies, es de alguna consideracion, podrá suceder que llegada el agua á cierta altura *VA* en el tubo de atraccion, y el émbolo á su mayor altura *TS*, podrá suceder, digo, que la fuerza elástica del ayre contenido en el espacio *VCTSBP*, junta con el peso de la columna de agua *VK*, contrabalance la presion de la atmófera. Entonces no subirá el agua, aunque prosiga obrando el émbolo. Con efecto, quando el embolo está en *IH*, el ayre contenido en el espacio *VCIHBP* es el mismo que el ayre esterior, y quando se levanta el émbolo á *TS*, dicho ayre se esparrama en el espacio *VCTSBP*. Así, si llamamos b la altura de una columna de agua equivalente á la presion de la atmósfera, ó lo que es lo propio (64), á la fuerza elástica del ayre natural, se echa de ver (68) que la fuerza elástica del ayre esparramado en el espacio *VCTSBP* es igual al peso de una columna de agua cuya altura es $b \times \frac{VCIHBP}{VCTSBP}$. Añadiendo á esta altura la altura *AV* del agua contenida en el tubo de atraccion, la suma debe ser igual á b, para que el agua se detenga en *VP*. Luego la equacion de este equilibrio es $b = AV + b \times \frac{VCIHBP}{VCTSBP}$.

Sea el radio del cuerpo de bomba $= R$

El del tubo de atraccion .... $= r$

La

Fig.

La razon entre la circunferencia y el diámetro	$= P'$
AC	$= a$
CI	$= n$
El movimiento IT del émbolo......	$= p$
AV	$= x$.

Es evidente que el cilindro $VB = P'r^2(a - x)$; el cilindro $CH = P'R^2n$; el cilindro $CS = P'R^2(p + n)$; y que por consiguiente el sólido $VCIHBP = P'r^2(a - x) + P'R^2n$; el sólido $VCTSBP = P'r^2(a - x) + P'R^2(p + n)$. Luego la equacion de poco ha se transforma en $b = x + \frac{h[r^2(a-x)+R^2n]}{r^2(a-x)+R^2(p+n)}$, de donde sacaremos, con hacer $\frac{R^2}{r^2} = k$, $x = \frac{a+k(p+n) \pm \sqrt{[(a+k(p+n))^2 - 4khp]}}{2}$.

Siempre que el valor de x fuese real y menor que a, el agua se detendrá con efecto en el tubo de atraccion, conforme lo hemos supuesto en el cálculo. Luego no proseguirá subiendo sino quando será absurdo suponer que se detiene, esto es, quando las raíces de nuestra equacion fueren imaginarias. Pero estas raices no pueden ser imaginarias, á no ser que sea $4kbp > (a + k(p + n))^2$. Así, quando esta condicion se verificare, el agua subirá; si nó, no subirá de ningun modo. Apliquemos esta doctrina á algunos casos.

I. Sea $b = 32$ pies; $K = 1$, ó el radio del tubo de atraccion igual al radio del cuerpo de bomba; $a = 20$ pies; $n = 2$ pies; $p = 2$ pies. Tendremos $4 \times 32 \times 2 < (20 + 4)^2$ Luego el agua se detendrá, y la bomba se deberá desechar.

Sea

II. Sea $b = 32$ pies, $k = 4$, $a = 25$ pies, $n = 0$, Fig.
$p = 2$ pies. Tendremos $4 \times 32 \times 4 \times 2 < (25 + 8)^2$. Luego tambien se detendrá el agua, y la bomba se deberá desechar. Pero si quedándose todo del mismo modo, hacemos $k = 6$ el agua subirá, y la bomba será de recibo.

796 Por el mismo método se averiguará si suponiendo el agua llegada al cuerpo de bomba, se detendrá entre los puntos *C* ó *I*. Para aplicar la fórmula precedente á este caso no habrá mas que hacer $k = 1$.

797 Manifiestan unánimes todos estos cálculos que colocando la válvula *E* en *AK*, la altura del émbolo mas arriba del agua del depósito, siempre deberá ser mucho menor que 32 pies, á no ser que se le dé mucho campo al émbolo, ó se haga el diámetro del tubo de atraccion muy chico en comparacion del radio del cuerpo de bomba. Estos dos medios padecen algunos inconvenientes. El último particularmente puede disminuir el efecto de la bomba, siendo causa de que gaste en valde el agente parte de su velocidad. Porque la velocidad del agente se debe arreglar de tal modo que quando la máquina anda bien, suba tanta agua cabalmente por el tubo de atraccion quanta levanta el émbolo subiendo por el cuerpo de bomba; por manera que nunca quede vacío ninguno entre la cabeza del émbolo y el agua que la sigue.

798 Supongamos ahora que la válvula *E* esté donde 188.
se juntan los dos tubos. Parece á primera vista que esto proporciona una evacuacion casi completa del ayre interior.

Por-

Fig. Porque haciendo que bage el émbolo lo mas cerca que se pueda de CB, no quedará ayre sino en el espacio $CIHB$, y en el huequecito t. Por consiguiente la altura LM podrá ser entonces casi de 32 pies. Pero esto supone que las válvulas ajusten bien con las paredes de los agugeros que deben tapar, y que no dén, quando es menester, ninguna salida ni al ayre ni al agua. Tanta perfeccion casi nunca se halla en la práctica. Por otra parte, aun quando las válvulas fuesen perfectamente fieles, si la máquina estuviere algun tiempo sin uso, los cueros se secan, y las válvulas se malean. Este inconveniente que alcanza á la válvula E, quando está en CB, no se esperimenta quando se la coloca en AK donde se mantiene siempre sumergida en el agua. Sin embargo, todo bien mirado, mas vale colocar la válvula E en CB que en AK. Pero siempre se debe hacer LM de tal estension que no llegue sensiblemente á los 32 pies.

799 Despues de tomadas todas las precauciones correspondientes para que el agua suba por dentro de la bomba, pase por el agugero t, y vaya á salir por O, busquemos la espresion de la fuerza que se debe aplicar al émbolo quando sube.

Supongámos que estando en accion la máquina, y llegada el agua á su altura máxima QD en el cuerpo de bomba, el émbolo esté en el primer instante en IH que es el término mas bajo de su carrera. Es patente que en el mismo instante sostiene 1.° el peso de la columna de agua $IHDQ$. 2.° Considerando como uniforme la densidad de la atmós-

fe-

fera en toda la altura que corresponde á la bomba, se echa Fig. de ver (55) que la presion del ayre en *QD* puede equilibrarse con la presion del ayre en *MN*, en virtud de la qual el agua sube bomba arriba; porque entonces estas dos presiones son evidentemente proporcionales á las basas sobre que obran. Fuera de esto, se echa de ver que la presion del ayre sobre una base qualquiera es igual al peso de una columna de agua, de una misma base, y de 32 pies de altura. Sean las verticales iguales *XY*, *YM*, de 32 pies cada una, las alturas de las dos columnas de agua equivalentes á las presiones de la atmósfera en *QD* y *MN*. Esto supuesto, es patente que en virtud de la presion de la atmósfera en *QD*, el émbolo sostiene una fuerza, cuyas espresion es $IH \times XY$; y que en virtud de la presion de la atmósfera en *MN*, la columna de agua *ACIHBK* comprime de abajo arriba la cabeza *IH* del émbolo con una fuerza cuya espresion es $IH \times MY$, hallándose disminuida esta misma fuerza por la pesantez de la columna *ACIHBK*, la cantidad $IH \times LM$; de donde resulta que la fuerza que impele la cabeza *IH* del émbolo de abajo arriba es $IH \times LY$. Restando $IH \times LY$ de $IH \times XY$, la fuerza residua $IH \times LM$ es la que la cabeza del émbolo sostiene, y se debe añadir al peso de la columna *IHDQ*. Por consiguiente, atendiendo á todo, el émbolo sostiene el peso de una columna de agua, cuya base es *IH*, y la altura es la distancia vertical de la base *QD* al nivel del agua del depósito. Lo mismo diremos de otra posicion qualquiera del émbolo.

Siem-

Fig. Siempre sostiene (sean las que fueren las dimensiones del cuerpo de bomba y del tubo de atraccion) el peso de una columna de agua de igual base que él, y cuya altura es igual á la distancia vertical del punto hasta donde se quiere levantar el agua al nivel de la del depósito. Añadiéndole á este peso el del émbolo mismo, la suma será la fuerza que se debe aplicar al émbolo para el equilibrio no mas; pero para dar movimiento á la máquina, se le debe añadir á la misma fuerza cierta cantidad, yá para causar el movimiento, yá para vencer la resistencia del rozamiento y demás obstáculos que pueden originarse de la imperfeccion de la máquina. Escusaremos decir que el émbolo baja á impulsos de su pesantez, y que por lo mismo mientras baja no tiene que sostener peso alguno la fuerza motriz.

El que quisiere aplicar esta teórica á la práctica deberá tener presente que el pie cúbico de agua dulce pesa como unas 70 libras, conforme hemos dicho en otro lugar (53); que el *pie cilíndrico* de agua; quiero decir, un cilindro que tiene 1 pie de altura y 1 pie de diámetro) pesa como unas 55 libras &c. Por lo comun á la fuerza motriz calculada para el estado de equilibrio se la añade la tercera parte mas de su valor, para que pase la máquina al estado de movimiento; pero no tiene regla alguna fija esta determinacion; pende de la naturaleza del rozamiento, y de la velocidad que se le intenta comunicar al fardo levantado.

800. Supongamos que haya llegado la bomba á un es-

estado uniforme y permanente ; y este es el estado en Fig.
que se la procura poner. Es facil de apreciar su efecto, quando se sabe con que velocidad se mueve el émbolo. Sea e el espacio que anda en un segundo subiendo ; R, el radio de su base ó del cuerpo de bomba ; P', la razon entre la circunferencia y el diámetro ; el émbolo levantará, y por consiguiente la bomba arrojará en un segundo un número $P'R^2e$ de pulg. cúbicas.

801 Ninguna dificultad habrá que vencer en la aplicacion de estos principios generales á casos particulares. Pero será indispensable tener constantemente en la memoria la consideracion que hicimos antes (797). Quando la altura LY es muy corta, y sube por consiguiente el agua con poca velocidad por el cuerpo de bomba, se debe moderar con tal pulso la velocidad y movimiento del émbolo, que nunca quede vacío alguno entre su cabeza y el agua que le sigue, porque si esto sucediera se perdería tiempo en la maniobra de la bomba. No faltan prácticos que por no tener presente esta advertencia se espantan de que una bomba movida con mucha velocidad no arroje sensiblemente mas agua que quando obra con lentitud. Es, pues, importante combinar las dimensiones de la bomba con la velocidad y el movimiento del émbolo, de modo que el agente gaste sin cesar utilmente toda la fuerza que de él se debe esperar.

802 La figura representa una bomba *impelente*. El 189.
cuerpo de bomba $ACBK$ está metido dentro del agua MN;

Fig. el émbolo entra por abajo, y levanta ó impele el agua; su espiga *Z* está firmemente asegurada al travesaño *bc* del bastidor mobil *abcd* que se sube y baja alternadamente por medio de una palanca, ó de otro modo qualquiera; su cabeza lleva un agugero tapado con una válvula *F* que se abre de abajo arriba. En *VP*, algo mas arriba de la superficie del agua, hay un diafragma que lleva un agugero tapado con una válvula *E* que se abre de abajo arriba. El cuerpo de bomba se une en *CB* con el tubo ascendiente *CBOQ* que lleva el agua hasta donde se la quiere levantar.

803 Para esplicar como obra esta bomba, supongamos que en el primer instante esté el émbolo en el punto mas bajo de su carrera. Entonces el agua del depósito intenta levantar con su peso las dos válvulas *F*, *E*, y subirse por el cuerpo de bomba hasta el nivel *MN*. Llegada allí, ó quando por lo menos la parte del cuerpo de bomba, que está entre las dos válvulas, está llena de agua, las válvulas se cierran por el peso que las queda en el fluido. Levántese ahora el émbolo; la válvula inferior *F* se queda cerrada, la válvula *E* se abre, y el agua contenida en el cuerpo de bomba, entre las dos válvulas, se vé precisada á subir mas arriba del nivel *MN*. Bajando el émbolo, la válvula *E* se cierra é impide que baje el agua que está encima; la válvula *F* se abre, y la parte del cuerpo de bomba, que las dos válvulas abrazan, se llena de agua. Volviendo á levantar el émbolo, la válvula *F* se cierra, la válvula *E* se abre, y el agua prosigue subiendo por el tubo *CBOQ*. Se echa de

ver

ver que en virtud del movimiento reiterado del émbolo, el Fig.
agua vá subiendo siempre mas por dentro del tubo *CBOQ*, y llega últimamente al término que se desea.

804 No hay duda en que con esta bomba se levantará el agua á la altura que se quisiere, con tal que sea suficiente la fuerza motriz. Esta fuerza se calcula para esta bomba del mismo modo que respecto de la bomba atraente. En el simple estado de equilibrio, siempre sostiene subiendo (además del peso del émbolo, y del bastidor *abcd*) el peso de una columna de agua cuya base es el círculo de la cabeza del émbolo, y la altura es la distancia vertical del punto hasta donde está levantada el agua, á un plano orizontal que enrasa con la superficie del agua del depósito. Quando el émbolo baja, el agente no tiene que sostener el peso de que acabamos de hablar; no tiene mas oficio, durante el espresado tiempo, que acelerar, si es menester, la caida del émbolo. El efecto de la bomba se determina como antes, quando la velocidad del émbolo es dada.

805 La bomba *atraente* é *impelente* se compone de un tubo de atraccion *ACBK* que se mete en el agua *MN*, 190.
de un cuerpo de bomba *CTSB*, y de un tubo ascendiente *HLOQ*. En *CB* y *VP* hay dos válvulas *E*, *F* que se abren de abajo arriba. El émbolo es macizo, y no tiene agugereada la cabeza, como el de las otras. Se mueve por dentro del cuerpo de bomba, y nunca baja mas que hasta *HY*, para no cerrar la entrada *HL* del tubo ascendiente. Yá se vé que subiendo y bajando alterna-

Fig. damente el émbolo, el agua sube primero por el tubo de atraccion y el cuerpo de bomba, del mismo modo cabalmente que en la bomba atraente comun. Los movimientos alternados de las dos válvulas *E*, *F* son de todo punto los mismos en ambos casos. Al cabo de algunos golpes de émbolo el agua llega al espacio que el mismo émbolo al tiempo de levantarse deja desocupado en el cuerpo de bomba. Bajando despues el émbolo la impele y la obliga á subir por el tubo ascendiente *HLOQ*. Volviendo á levantar el émbolo, vuelve á atraer mas agua, á la qual impele despues al tiempo de bajar; y así prosiguiendo.

806 Se determina á poca costa el valor de la fuerza motriz en esta bomba respecto del estado de equilibrio. Porque 1.° si suponemos que por la atraccion el agua suba hasta *ts*, es evidente que estando entonces cerrada la válvula *F*, la potencia que mueve el émbolo sostiene, además del peso del mismo émbolo, una parte del peso de la atmósfera, igual al peso de una columna de agua, cuya base es el círculo de la cabeza del émbolo, y la altura la distancia vertical de *ts* al nivel *MN* del agua del depósito. 2.° Mientras el émbolo impele el agua, estando cerrada la válvula *E*, el émbolo sostiene el peso de una columna de agua que tiene la misma base que él, y cuya altura es la distancia vertical de dicha base al plano orizontal que pasa por el punto *O* hasta donde llega el agua. Se echa de ver que el émbolo al tiempo de bajar ayuda con su peso á la potencia.

En

807 En algunos casos se dispone la bomba atraen- Fig.
te é impelente, de modo que el émbolo, en vez de atraer 190.
al subir, é impeler al bajar, conforme obra la bomba cuya 191.
descripcion acabamos de dar, atrae al bajar, é impele subiendo. Pero en ambos casos se calcula de un mismo modo la fuerza motriz, atendiendo al peso del émbolo.

808 Estas son las tres especies principales de bombas. Todas las demás que se inventaren no serán mas que combinaciones mas ó menos sencillas de las primeras. No hay, pues, esperanzas de perfeccionar estas máquinas, sino disminuyendo quanto sea posible el rozamiento, valiéndose de buenos émbolos, y de válvulas fieles, que detengan el agua é impidan, siempre que sea menester, el paso al ayre esterior. Ofrece este punto á los artífices un campo muy di-
latado en que egercitarse. Las mejores válvulas que se co- 188.
nocen son las que llaman de *concha*, y las de *portezuela*. En 189.
la figura 189 *E* y *F* son valvulas de concha; en las de- 190.
más, *E* y *F* son portezuelas. 191.

809 Bien se echa de ver que en las tres bombas propuestas, el surtidor de agua que sale por el desaguadero no es continuo, sino intermitente; porque se gasta como la mitad del tiempo en bajar y levantar el émbolo para coger mas agua; y en todo este tiempo, ó no sale agua ninguna, ó sale muy poca por el desaguadero. Desde muchos
años á esta parte se suele armar el tubo ascendiente, con- 192.
forme está pintado en la bomba impelente que la figura representa, con una especie de tambor hueco *KR*, cerrado

Fig. por afuera por todos lados, y que se comunica con el tubo interrumpido en *G* y *H*. Este tambor, que llaman el *Depósito de ayre*, contiene al principio ayre cuya densidad es la misma que la del ayre esterior. Quando se levanta el émbolo, parte del agua que sube por el brazo *CBDQ* se vierte en el depósito *KR*; condensa el ayre que allí encuentra; le corta toda comunicacion con el ayre esterior, y le reduce á no ocupar mas que el espacio *kryx*. Quando se baja despues el émbolo, el ayre dilatado como hemos dicho, se dilata por su elasticidad, obliga el agua á que baje de *kr* á *KR*, y suba por consiguiente por el brazo *GHQD*. Es patente que continuando la misma maniobra sube incesantemente mas agua por dicho brazo, y que el surtidor debe ser continuo, por lo menos sensiblemente, en el desaguadero.

810 Algunos fabricantes de bombas creen que el depósito de ayre hace el efecto de la máquina la mitad mayor; porque como entonces, segun se esplican, el surtidor es continuo, la bomba debe dar doblada cantidad de agua de la que daría si no hubiera depósito de ayre, y fuese intermitente el surtidor. Pero no consideran los que así discurren, que el producto de la bomba nunca es mas que la cantidad de agua que el émbolo levanta al subir; y que la potencia motriz (siendo la misma la velocidad del émbolo) siempre gasta una misma fuerza, sea que haga subir dicha agua en derechura hasta la salida, sea que parte de la misma agua se vierta en el depósito, de donde la impele des-

despues ácia arriba la elasticidad del ayre. Porque en el segundo caso es preciso contraer el resorte del ayre del depósito *KR*; y este esfuerzo junto con el que hace subir actualmente una parte del agua en el brazo *GHQD*, apura toda la fuerza; y esto viene á ser lo propio que en el primer caso. Por consiguiente, si el surtidor es continuo quando hay un depósito de ayre, tambien sale el agua con una velocidad la mitad menor que la velocidad con que saldria si no hubiese tal depósito, y fuese intermitente el surtidor; el efecto de la bomba es siempre uno mismo. Es, pues, inutil el depósito de ayre en las bombas que no tienen otro destino que levantar el agua; pero tiene mucha cuenta en las bombas para los incendios, porque un surtidor de agua continuo apaga mas facilmente el fuego que un surtidor intermitente, bien que tenga mayor velocidad.

Fig.

811 En las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de París, para el año de 1716, viene propuesta una bomba que puede dar un surtidor continuo sin el socorro de ningun depósito de ayre. El Sr. *Quintin*, fabricante de bombas en Ruan, ha hecho y presentado á la Real Academia de las Ciencias una bomba de esta especie, cuya construccion es como sigue. *K* y *H* son dos tubos de atraccion; 193.
CF es un cuerpo de bomba; *Nu*, *fgb* son dos tubos ascendientes que á cierta altura se juntan en uno solo. El tubo de atraccion *K*, el cuerpo de bomba *CF*, y el tubo ascendiente *fgb* están dispuestos, segun se vé, del mismo modo que en la bomba atraente é impelente. Las quatro vál- 190.

Fig. vulas de concha S, s, S', s' se abren y cierran alternadámente de dos en dos. La espiga Z del émbolo entra por un collar ó platillo CB de cobre, dentro del qual se debe mover de modo que quede impedida toda entrada en el cuerpo de bomba al ayre esterior. En yz y mn hay dos aberturas por las quales el cuerpo de bomba se comunica con los dos tubos ascendientes. El émbolo baja hasta F, y sube hasta m.

Es muy perceptible el efecto de esta bomba. Supongamos que el émbolo esté primero en el punto mas bajo de su carrera. Así que se le levanta, deja un vacío; el ayre que está debajo, al dilatarse levanta la válvula S, y la presion de la atmósfera hace subir el agua; al mismo tiempo el ayre contenido en el cuerpo de bomba entre CB y la cabeza superior del émbolo, levanta la válvula s y se sale. Al bajar el émbolo, las dos válvulas S y s se cierran, y las otras dos S' y s' se abren, la una por causa del impulso del agua que el émbolo al bajar hace entrar por la abertura yz en el tubo fgh, la otra por la dilatacion del ayre contenido en el tubo H, en el espacio Nm, y en el espacio que hay entre la cabeza del émbolo y CB; y así prosiguiendo. Quando todo el cuerpo de bomba está lleno de agua, el émbolo atrahe é impele sin cesar, y el surtidor debe ser continuo, ó le faltará muy poco. El constructor de esta máquina ha añadido, naturalmente con la mira de que sea todavía mas perfecta la continuidad del surtidor, al tubo montante fgh un depósito de ayre AE. La Academia ha declarado que esta bomba obra muy bien.

Qual-

812 Qualquiera agente sea hombre, caballería, corriente de agua &c. puede servir para mover una bomba. Las pequeñas, como las que sirven para sacar agua de los pozos, y para los incendios, las mueven hombres. Quando se quiere levantar una cantidad considerable de agua, se multiplica á proporcion la fuerza motriz; y para que obre continuamente un mismo efecto, con corta diferencia por lo menos, sin pararse jamás, se ponen varias bombas de modo que quando unos émbolos bajan otros suben. Fig.

MNB es una cigueña vertical, mobil al rededor de su ege, la qual por medio de las dos cadenas *V* y *T* hace andar al rededor de sus eges *C*, *E* los quadrantes de círculo verticales *ACO*, *GEF*, á los quales están aplicadas las cadenas *S*, *H* de dos émbolos de bombas. La potencia *P* mueve la cigueña. Se echa de ver que las cadenas *S*, *H* al subir y bajar se mantienen siempre verticales. 194.

MNB es una cigueña orizontal, cuyo destino es mover los émbolos de dos bombas. Las cadenas *S*, *H* ván á pasar por encima de dos poleas *A*, *O* que mantienen los émbolos en la direccion vertical. La cigueña la mueve una rueda á la qual dá vueltas una corriente de agua. 195.

813 Los tubos de las bombas aguantan en algunas ocasiones esfuerzos muy grandes. Quando estos tubos se hicieren de materias flexibles, pongo por caso de plomo, cobre, y aun de hierro, y se hubieren valuado en columnas de agua de alturas dadas las presiones que aguantan, se hallarán, por lo declarado (40), los gruesos

que

Fig. que han de llevar para que no se rebienten.

De las Bombas de fuego.

814 Esta máquina es una de las mas portentosas que han inventado los hombres. Todo su efecto consiste en la accion alternativa del vapor del agua, y la presion de la atmósfera, combinada con las resistencias que se han de superar, conforme se verá dentro de poco. Hay muchas de estas bombas en Escocia, Inglaterra, Alemania, Francia &c. Todas se parecen unas á otras en quanto á las partes principales, y si se diferencian, solo es respecto de algunas partes accesorias. Como quiera, procuremos dar bien á entender su mecanismo general.

815 Segun hemos probado (8, 9, y 10), el agua se compone de partes duras é incompresibles, sensiblemente por lo menos. Pero quando este fluido esperimenta la accion del fuego, se dilata ó estiende en un espacio mayor; porque el fuego que se insinúa por entre sus partes las levanta y aparta unas de otras en todas las direcciones. El fuego arroja tambien del cuerpo del agua, en forma de vapor, un fluido ligerísimo, sutilísimo, sumamente elástico, capaz de equilibrarse con pesos muy grandes. Con efecto, quando se hace cocer agua en una olla de cobre destapada, el vapor de que vamos hablando levanta la columna snperior de ayre, y sube á una altura muy notable. Si la olla está tapada con una tapa que ajuste bien y esté muy asegurada, de modo que el vapor no se pueda dilatar,

tar, obra con una fuerza que puede llegar á ser portentosa; Fig. porque por este medio se han hecho rebentar trozos de cañones muy gruesos, cuyos dos estremos se habian tapado con tapas atornilladas. Bien se echa de ver que estos esperimentos son muy peligrosos. Veremos mas adelante que en la bomba de fuego, la fuerza del vapor del agua es á la presion de la atmósfera como 39 es á 32, con corta diferencia.

816 Este vapor no es ayre que se desprenda del agua, como lo han creido algunos. Hay un esperimento de *Desaguliers* que no deja acerca de esto la menor duda. Echese en un vaso grande una cantidad de agua, y púrguesela bien de ayre, sea haciéndola cocer, sea por medio de la máquina pneumática. Cuélguese de un cordon, dentro del vaso, una campana de vidrio bastante pesada para que se vaya á fondo. Procúrese que se llene enteramente de agua quando está derecha, y no se quede en la parte superior ninguna ampolla de ayre. Hágase despues cocer el agua, y se reparará que la campana se irá vaciando gradualmente, hallándose espelida su agua ácia abajo por la espansion del vapor que se forma en su superficie. Este vapor no es ayre, aunque se le parezca; porque si se levanta la campana de modo que no quede mas que su base dentro del agua, condensándose el vapor por causa del frio del ayre que circunda la campana, el agua se la introducirá sin que quede una ampolla siquiera de ayre; esto prueba que el vapor que habia echado el agua no era ayre. Parece que el vapor es un fluido particular mezclado con el agua, ó si se quiere,

la

Fig. la parte mas sutil del agua, que el fuego pone en movimiento, y cuya parte pierde de repente su virtud espansiva, hasta reducirse á un volumen casi infinitamente pequeño, quando se la enfria de un modo qualquiera.

817 El mismo Desaguliers ha verificado, en virtud de muchas observaciones, que el vapor, quando ha llegado al estado de poderse equilibrar con la presion de la atmósfera, es como unas 14000 veces mas raro que el agua comun, y 16 ó 17 veces mas raro que el ayre. Referiremos un esperimento que dá á conocer por mayor la estremada dilatabilidad de este fluido. Cójase un tubo delgado de termómetro, armado con su bola, y abierto por el otro estremo; introdúzcasele una gota de agua, cuyo diámetro tenga con el de la bola la razon de 1 á 25; caliéntese despues mucho la bola dándola vueltas, y teniéndola muy arrimada á las ascuas, métase el estremo del tubo dentro de agua fria; se verá esta agua subirse á la bola hasta llenarla casi toda. Es constante que este fenómeno proviene de que con calentar la bola la gota de agua se convierte en vapor, y echa fuera el ayre interior; condensándose despues el vapor con la inmersion del tubo en el agua fria, se forma un vacuo en el qual se introduce el agua fria impelida de la presion de la atmósfera. El espacio que esta agua ocupa entonces es, con cortísima diferencia, la medida del que ocupaba el vapor. Digo *con cortísima diferencia*, porque puede ser que quede algo de ayre en el instrumento. Si el agua que se subió á la bola supuesta infinita respec-

to

to del tubo, llenára toda su cabida, el volumen de la gota Fig.
convertida en vapor sería á su volumen en su primer estado, como 15625—1 ó 15624 es á 1; porque (I.625) dos esferas son entre sí como los cubos de sus diámetros; y del espacio que ocupa el vapor, se debe restar el espacio que ocupa la gota en su estado primitivo, para sacar la razon entre los dos volúmenes de que acabamos de hablar.

818 Síguese de todo lo dicho hasta aquí, que si de- 196.
bajo del cilindro hueco *ACDE* armado de un émbolo mobil *P* se hace cocer agua en una caldera *AMNE*, introduciéndose el vapor de esta agua por la abertura *mn* hará subir el émbolo, superando la presion de la atmósfera que obra encima. Este movimiento será mas rápido, si se le ayudare con un peso *B* aplicado al estremo *H* de la palanca *HO* cuyo apoyo está en *T*. Llegado despues el émbolo al punto mas alto donde se quiere que suba, si se condensa el vapor del agua enfriándola con echar agua fria dentro del cilindro, por medio de una llave *R* ó de otro modo qualquiera, se formará un vacío en el espacio que ocupaba el vapor. Obrando entonces la presion de la atmósfera, que supongo mayor que el peso *B*, en la cabeza superior del émbolo, le obligará á bajar. Prosiguiendo lo mismo, el émbolo subirá y bajará alternadamente. En esta doble accion del vapor del agua, y de la presion de la atmósfera consiste todo el mecanismo de la bomba de fuego. Despues diremos como se verifica sin interrupcion este doble movimiento.

819 El peso *B* que representa el peso único al qual

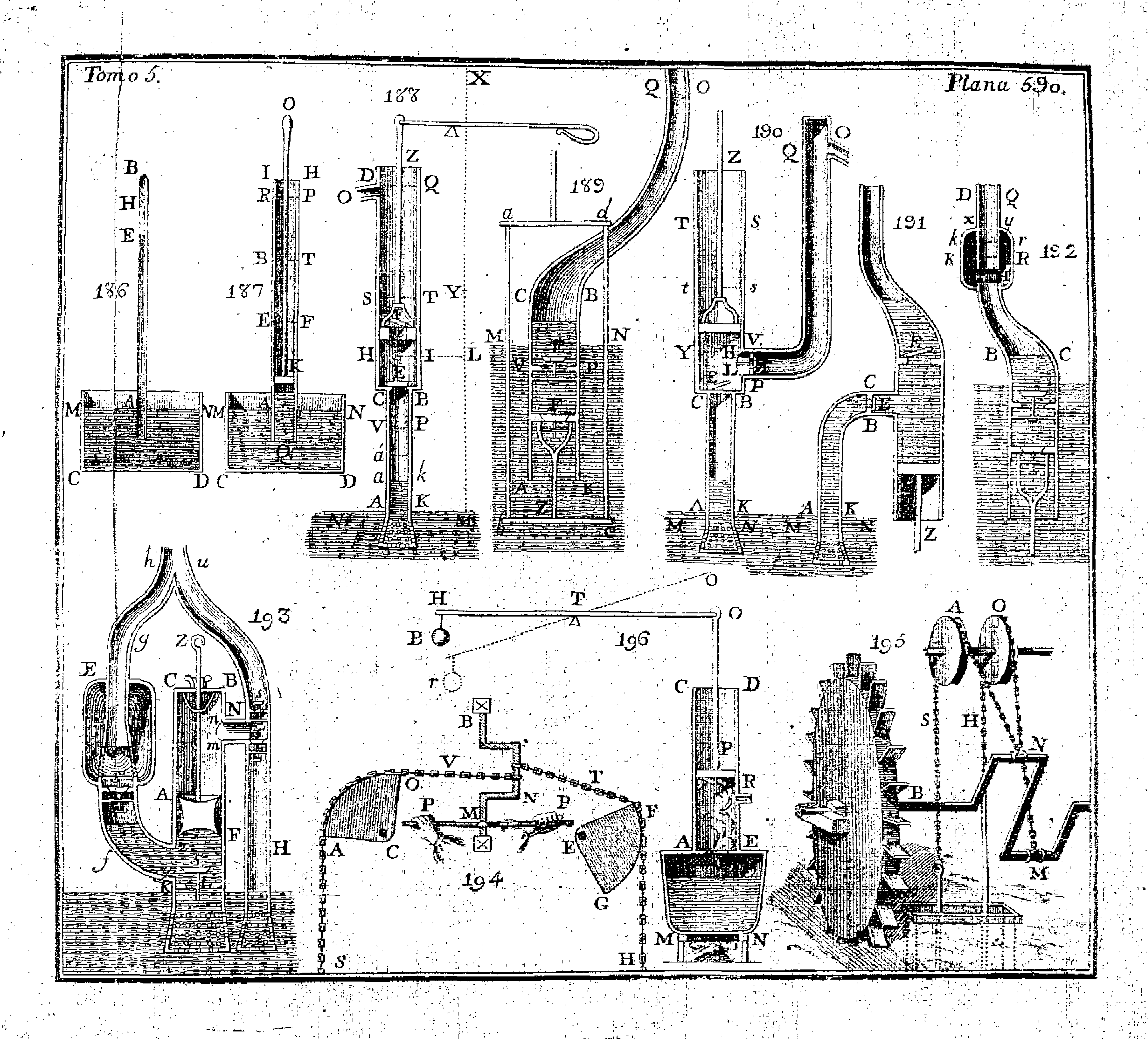
se

Fig. se pueden reducir todos los pesos particulares realmente aplicados á la palanca de la máquina, este peso, digo, ha de ser tal que el émbolo suba con la misma velocidad que baja. Supongamos, pues, $OT = a$; $HT = b$; el círculo de la cabeza del émbolo $= c^2$ Llamemos H la altura de una columna de agua pesada que teniendo por base c^2 es equivalente á la fuerza que hace el vapor contra la cabeza del émbolo; b, la altura de una columna de agua de igual base y equivalente á la presion de la atmósfera en el émbolo. Es evidente que el movimiento será uniforme, si fuese $(Hc^2 - bc^2)a + Bb = bc^2a - Bb$, y por consiguiente $B = \frac{2he^2a - Hc^2a}{2b}$.

Sea, por egemplo, $a = b$, $H = 39$, $b = 32$, tendremos $B = c^2 \times 12\frac{1}{2}$, quiero decir que el peso B será igual al peso de una columna de agua cuya base fuese el círculo de la cabeza del émbolo, y la altura $12\frac{1}{2}$ pies. Si ademas de $a = b$ tuviéramos tambien $H = b$, hallaríamos $B = c^2 \times 16$, esto es, que el peso B sería igual al peso de una columna de agua, cuya base sería igual á la cabeza del émbolo, y la altura sería 16 pies.

820 Todo esto presupuesto, vamos á dar la descripcion individual de la máquina.

197. La primera figura la representa en perspectiva y ar-
198. mada; la segunda figura la representa en perfil. La espiga X del émbolo P, y su pieza de madera FG mobil verticalmente en la direccion de su longitud, están aplicadas con unas cadenas al uno de los brazos de una palanca grande


186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196

de que con el otro brazo mueve bombas ú otros pesos qua- Fig.
lesquiera. Aquí no pintamos ni la palanca, ni las bombas que pone en movimiento; es facil figurarse este mecanismo, que la figura citada dá por otra parte bastante á cono- 196.
cer. Se echa de ver que además de la caldera, el cilindro, el émbolo y la palanca, que son las piezas principales de la máquina, hay muchos tubos, llaves, palancas &c. que contribuyen para su movimiento. Declararemos succesivamente sus usos particulares. En las dos figuras ván señala- 197.
das las mismas piezas con las mismas letras ó guarismos; 198.
pero no nos hemos sugetado á esta ley en las demás figuras pertenecientes á la máquina propuesta.

821 En el fondo del cilindro *H* está aplicado un cilindrillo *K*, llamado comunmente *el Collar*, abierto por ambos estremos, el qual por la parte de arriba pasa un poco el fondo del cilindro *H*, por la razon que diremos despues, y con su estremo inferior *Z* se introduce en el remate *VZT* de la caldera. Sirve el tubo *K* para encaminar el vapor de la caldera al cilindro *H*. Una plancha de cobre circular y orizontal, llamada el *Regulador*, que lleva un mango mobil al rededor de un ege vertical, se aplica ajustada á la base inferior del collar *K*; abre y cierra alternadamente la entrada, dando vueltas al rededor de su ege. Todo el tiempo que el vapor obra con toda su fuerza en el émbolo *P*, este sube, ó puede por lo menos mantenerse á cierta altura; pero se le hace bajar quando es menester, cerrando el regulador, y echando agua fria en el cilindro *H*.

Es-

Fig. Esta agua la dirige á su paradero el tubo $QM3'$, llamado *Tubo de Inyeccion*, armado de una llave *R*, llamada *Llave de Inyeccion*, la qual gyrando al rededor de su ege ácia una ú otra direccion, detiene ó deja pasar el agua. En el segundo caso salta por la salida $3'$ de abajo arriba, y vá á dar en la base inferior del émbolo; con esto cae á manera de lluvia, condensa el vapor, y deja lugar á la presion de la atmósfera para que empuje ácia abajo el émbolo.

822 Como el movimiento se perpetúa en la máquina en virtud de esta accion alternada del regulador, y de
199. la llave de inyeccion, conviene enterarse bien de este punto.
200. Las figuras 199, 200, 201 que están dibujadas
201. mas en grande que las figuras 197, 198 manifiestan el movimiento del regulador y de las piezas que le dirigen.

199. Representa *aaaa* un anillo de hierro orizontal, puesto dentro del remate de la caldera, y sostenido en el mismo remate por quatro pies verticales señalados con las letras *a*, *a*, *a*, *a*. El círculo *bb* representa la base inferior del collar. El círculo *dd* es el regulador armado con su mango *mm* que forma con él un mismo cuerpo. A esta pieza le atraviesa á esquadra un ege vertical *e* que la hace dar vueltas, y hace andar al centro *o* el arco *co* para abrir, y el arco *oc* para cerrar el orificio del collar. *DF* es un muelle que sirve para apretar el regulador con el orificio del collar.

200. En la figura 200, que es un perfil levantado sobre el diámetro *dd* perpendicularmente á *eo*, *MN* es el perfil del re-

remate de la caldera; *K*, el del collar; *dtb*, el regulador; Fig.
AE, el anillo de que hemos hecho mencion; *AN*, *EM* los pies que le sostienen; *ABC*, el muelle sobre el qual apoya el boton *t* del regulador al ir desde *A* ácia *B* quando se cierra.

La figura 201 es otro perfil levantado sobre *eo*, per- 201.
pendicularmente al antecedente; *xy* es el ege vertical que hace andar el regulador. La punta inferior de este ege se mueve dentro del anillo *aaaa*. El estremo *e* del mango del 199.
regulador está unido por medio de una clavija *L* con el ege *xy*, el qual en su parte superior *ex* es muy redondo, y se mueve ajustadamente en un cañon *fg* acomodado al remate de la alquitara. Finalmente el estremo superior *x* del ege 197.
xy recibe una llave *i*, que sirve para mover el regulador.

823 Digamos ahora como se hacen los movimientos del regulador y de la llave de inyeccion.

Dos pilares *A*, *A* sostienen un ege orizontal *BC* que 197.
dá vueltas dentro de los anillos de un estrivo *abcd*, al qual atraviesa un pasador *e*. Al rededor de este bulon se mueven los anillos de una horquilla *hfg* cuyo mango *h* tira ó empuja orizontalmente la llave *i* del regulador. En el mismo ege *BC* están aseguradas quatro piezas diferentes; es á saber, un pie con dos garras *k*, *l* que mueven el estribo; dos brazos de hierro *m* y *n*; la espiga *o* de un peso *p* sostenido de una correa floja atada al *somier* en *q* y *r*. Estas son las piezas que ponen en movimiento el regulador, conforme se verá dentro de poco.

Fig. Por lo que mira á la llave de inyeccion *R*, su tapon está soldado en un *pie de cangrejo st* que abraza la aguja *ux*, la qual está unida con el mango de un martillo grande y mobil al rededor del gozne *u*. Este martillo tiene metida la cabeza en una especie de muesca que forma un garfio hecho en una pieza de madera orizontal, afianzada en *D* con un gozne *u*, y colgada en *E* con una cuerda. El bastidor *FG* lleva quatro clavijas b', *z*, P' &c. cuyas distancias se determinan en virtud de las pruebas que con ellas hace el constructor de la máquina.

824 Quedando todo dispuesto conforme acabamos de decir, supongamos que estando abierto el regulador, la fuerza del vapor junto con el peso que está aplicado al brazo de palanca de la derecha, haga subir el émbolo, y por consiguiente el bastidor *FG*. Encontrando la clavija P' el brazo de hierro *m* le levanta y hace subir: con esto gyra el ege *BC* y el peso *p*, el qual despues de pasar la vertical del ege, cae del lado del cilindro, y pone tirante la correa *pr*. Pero este movimiento se puede egecutar sin que la garra *K* arrastre consigo el estribo *abcd* que tira del mango *b*, dá vuelta á la llave *i*, y cierra el regulador. En este instante el vapor encerrado en el cilindro *H*, tiene la misma elasticidad, la misma fuerza que el de la caldera; luego siempre sostendria el émbolo. Pero el instante despues que se cierra el regulador, el bastidor *FG* dá un golpe á la pieza *DE* por medio de la clavija b'. Esta pieza se levanta y la muesca suelta la cabeza del martillo *y* que

cae

cae sobre una tabla *L*. Pero mientras cae, la aguja *ux* traza un arco de círculo que hace dar la vuelta al pie de cangrejo, y abre por consiguiente la llave de inyeccion. Al instante el agua entra en el cilindro *H*, y salta con toda la fuerza que la dán su propia caida, y la presion de la atmósfera. La violencia con que esta agua dá en la parte inferior del émbolo, la divide en gotas que caen en forma de lluvia en el cilindro, conforme llevamos dicho, y condensan muy aprisa el vapor. Entonces el émbolo baja por la presion de la atmósfera, y baja tambien por lo mismo el bastidor *FG*. La clavija b' encamina ácia *z* el mango *uz* del martillo *y* que con esto vuelve á subir, y se mete otra vez en la muesca de la pieza *DE*; esto hace dar vuelta á la aguja *ux*, y por consiguiente al pie de cangrejo que cierra la llave de inyeccion. En el mismo tiempo la clavija *&* plantada en la cara del bastidor *FG* encuentra el estremo del brazo *n*, y le obliga á bajar, con lo que el ege *BC* tiene que dar vuelta, y restituye el peso *p* á su vertical. Entonces esta masa vuelve á caer por su propio peso del lado del bastidor, y la garra *l* hace dar vuelta al estrivo que empuja el mango *b* y hace dar vuelta á la llave *i*, que abre otra vez el regulador. Entonces el bastidor empieza á subir otra vez con el émbolo; y quando llega ácia la parte mas alta donde sube, la clavija P' hace cerrar otra vez el regulador, y la clavija b' hace abrir la llave de inyeccion. Y el movimiento vá prosiguiendo de este modo sin cesar, todo el tiempo que se mantiene lumbre de-

Fig.

Fig. debajo de la caldera. Una bomba de fuego bien armada y de tamaño mediano, puede dar hasta 15 golpes de palanca por minuto.

825 Despues de lo dicho, qualquiera echará de ver que por medio de los movimientos combinados del regulador y de la llave de inyeccion, la máquina obrará uniformemente, con tal que el vapor se dilate y condense siempre del mismo modo, y los efectos alternados del regulador y de la llave se sucedan unos á otros como es menester. Pero esta regularidad de movimiento no se puede lograr ó mantener en la práctica, sino por medio de muchas
197. llaves y tubos que están pintados en las figuras. Declare-
198. mos el uso de todas estas piezas.

826 El agua inyectada por el tubo 3′ vuelve á caer en el fondo del cilindro; no puede pasar á la caldera, porque el collar *K* pasa del suelo del cilindro, conforme llevamos dicho. Se sale por un tubo 1,1 que por el un estremo se comunica con el fondo del cilindro, estando cerrado herméticamente el otro estremo. A este tubo están acomodados otros dos 2,2 y 3,3.

827 Por el primero 2,2 salen como las tres quartas partes del agua de inyeccion que ván á perderse en un algibe. El estremo del mismo tubo que se mete dentro del algibe, es recurvo verticalmente ácia arriba, y lleva una válvula colgada de un pedazo de hierro: esta válvula siempre está metida en el agua para impedir que el ayre se introduzca en el tubo; está tapada quando el émbolo baja;

se

se abre quando el émbolo sube, porque entonces el vapor que está en toda su fuerza, echa el agua contenida en el tubo 2,2. Fig.

828 El segundo tubo 3,3 lleva la otra quarta parte del agua de inyeccion al tubo vertical 4,4 que casi llega hasta el suelo de la caldera, y se llama *Tubo proveedor*, porque el agua que con esto suministra á la caldera, sirve para resarcir el menoscabo que padece con la evaporacion.

Por medio de dos llaves ó una no mas se arreglan las cantidades de agua que deben pasar por los tubos 2,2 y 3,3.

829 El brazo inferior del tubo 1,1 lleva tambien un *piloncito* 5 en cuyo fondo hay una válvula colgada de un cordon, que se puede levantar, siempre que se quiere, para introducir agua en los tubos de que acabamos de hablar. Esta agua que se saca de la parte superior del cilindro, por medio del tubo descendiente *6,6* es tibia, y sirve para echar el ayre de los tubos donde se la introduce, quando se empieza á poner en movimiento la máquina.

830 A la parte opuesta del tubo de inyeccion está acomodado un tubo 7,7 que lleva un piloncito 8, en cuyo fondo hay una válvula cargada de plomo, colgada de un muelle de hierro que la mantiene siempre en la misma situacion. Esta válvula que se puede llamar *absorvente*, sirve para evacuar el ayre que el vapor arroja del cilindro, quando empieza á obrar la máquina; y despues el que lleva

Fig. consigo el agua de inyeccion qne estorvaría el efecto de la misma máquina, si no pudiera salir.

831 Sobre el remate de la alquitara está soldado verticalmente un cañoncito 9, en cuyo estremo superior hay una válvula cargada de plomo, llamada *ventosa*. Sirve para dar ayre á la alquitara quando llega á ser sobrado fuerte el vapor; le levanta con bastante frecuencia quando está cerrado el regulador, y quando el émbolo baja.

832 El tubo 10,10 que se llama *La nariz del alambique*, el qual tiene tapado el uno de sus estremos con una válvula que se levanta siempre que se quiere, confor-
198. me lo pinta el perfil, sirve para evacuar el vapor abriendo la válvula, quando se quiere parar la máquina, y darle salida quando adquiere la fuerza suficiente para levantar la válvula; si no fuera por esto correría la alquitára el riesgo de rebentarse.

833 Los dos tubitos 11,11 y 12,12 que llevan cada uno una llavecita, y se llaman *Tubos de prueba*, sirven para dar á conocer si el agua tiene la altura correspondiente en la caldera. Son desiguales segun se vé. El uno se mete hasta dentro del vapor no mas, el otro se mete hasta dentro del agua. Quando la altura del agua está bien arreglada, el mas largo dá agua y el otro vapores. Si diesen ambos ó vapores ó agua, en el primer caso el agua estaría demasiado baja, y estaría demasiado alta en el segundo. Se debería, pues, remediar qualquiera de los dos in-

con-

convenientes introduciendo agua en la caldera, ó dejando salir la que hubiere de mas. Fig.

834 Para llenar de agua la caldera y verterla, siempre que se quiere, hay en *Q* y *S* dos tubos con sus llaves. El primero sirve para introducir el agua, el otro para vaciar la caldera. 198.

835 La base superior del émbolo está siempre cubierta de agua para que no se sequen los cueros, y cerrar toda entrada al ayre esterior en el cilindro adonde vá á parar el vapor. Esta agua la lleva un tubo 13,13. Parte de esta agua pasa por el tubo *6* quando se quiere; la demás sale por el tubo 14.

836 El vapor, mediante su elasticidad que obrá en todas las direcciones, hace subir el agua por el tubo 12,12, conforme hemos dicho. La misma causa obliga tambien al agua á subirse por el tubo proveedor 4,4 que está abierto por ambos estremos. Sube en este tubo hasta la altura de 7 ú 8 pies mas arriba de su nivel en la caldera, quando está tapado el regulador. Por donde se echa de ver que entonces la fuerza del vapor se equilibra con la presion de la atmósfera y el peso de una columna de agua de 7 ú 8 pies de alto. Así, por ser la presion de la atmósfera equivalente al peso de una columna de agua de 32 pies de altura, síguese que la fuerza del vapor tiene con la presion de la atmósfera la razon de 39 á 32, con corta diferencia. Quando el regulador se abre, y pasa al cilindro parte del vapor, como este vapor ocupa un espacio mayor, tiene me-

Fig. nos fuerza. De aquí proviene una especie de resuello que se repara en los humos que salen por las juntas imperceptibles de la caldera; estos humos son alternativos como el aliento de los animales.

837 La caldera *VITTZV* es redonda. En las antiguas bombas de fuego tenia el suelo plano; pero se ha visto que esta forma no era á propósito para comunicar como es menester el calor del fuego al agua, y hoy dia se hace el suelo convexo como lo pinta el perfil. El remate
198. *VZT* de la alquitara forma como una media naranja algo rebajada. Se vé que el agua sube en la caldera algo mas arriba del borde plano *ZT*, y que los vapores se contienen en el espacio que queda debajo del remate. La caldera y el remate son de chapas grandes de cobre de 3 pies quadrados, unidas con remachaduras muy próximas unas á otras. Estas hojas tienen de grueso como unas 3 ó 4 lineas.

838 La lumbre del fogon *II'T'T* se hace comunmente con carbon de tierra arrojándole sobre la reja *I'T'*. Su destino es calentar el suelo de la caldera. Enfrente de la puerta por donde se echa el carbon hay una salida donde la llama se encamina, y vá á circular al rededor de los lados de la caldera en el espacio vacío *VI*, *TT* que se llama *la Chimenea de la caldera*, de tal modo que dá toda una vuelta al rededor de los lados del borde plano de la caldera antes de salir por su cañon de chimenea comun que está al lado de la salida espresada. Si no fuera por esta circulacion de la llama al rededor de las paredes de la calde-

ra,

ra, el agua que contiene no se calentaría bastante para producir la gran copia de vapores que se necesita. Por lo demás bien se vé que la caldera descansa sobre la fábrica del horno en la circunferencia de su suelo en *VY*, y que á mas de esto el borde plano tambien es sostenido en *V* y *T*. Tambien se viste de fábrica el remate de la caldera, hasta cierta altura, para que pueda aguantar mejor la fuerza de los vapores, y resguardarle de los golpes que casualmente podria recibir. Fig.

839 En uno de los pisos superiores del edificio donde está la máquina hay un cubeto llamado *Cubeto de inyeccion*, al qual abastece de agua una bomba que la misma máquina hace obrar, y que dá agua al tubo de inyeccion *QM*3.' Se usan varios medios á fin de que este tubo reciba siempre la misma cantidad de agua para cada inyeccion particular. En la bomba de fuego que hay en *Schemnitz* en Ungría, el cubeto de inyeccion *ABCD* recibe por medio de un tubo *K*, el agua de otro depósito, para pasarla al tubo *Q* de inyeccion. El tubo *K* tiene una llave *X* que abre y cierra alternadamente su estremo *T*, conforme voy á manifestar. En el ege orizontal *VH* perfectamente mobil sobre sus puntas, están fijados dos brazos de hierro, el uno *ZM* que lleva un tonel ó barril *M* que nada en el agua, el otro *ZX* que lleva un pie de cangrejo ó una ruedecita dentada que engarganta con la cabeza de la llave y la hace dar vueltas. Interrumpiendo la evacuacion por el tubo de inyeccion *Q*; á medida que la superficie del agua 197.

se

Fig. se levanta en el cubeto *ABCD*, levanta el barril *M*, y la llave se cierra, por manera que está enteramente cerrada quando llega, por egemplo, á *AD*. Si al contrario, la cubeta se vacia por el tubo de inyeccion *Q*, el tonel se baja, y la llave *X* se abre para dejar pasar á la cubeta el agua que viene por el tubo *K*; y así prosiguiendo. Es evidente que de este modo pasan en tiempos iguales cantidades iguales de agua al tubo de inyeccion *Q*.

840 Quando la máquina no obra, la palanca está inclinada del lado del pozo, conforme se vé en *or*, porque el ayre se introduce en lo interior del cilindro, y el bra-
96. zo de la palanca del lado del pozo está mas cargado que el del lado del cilindro. Por consiguiente el émbolo está entonces en el punto mas alto de su curso. Supongamos que se quiera poner la máquina en movimiento, primero se llenará de agua la caldera, se encenderá la lumbre para hacerla cocer, y se abrirá el regulador dado caso que estuviese cerrado. El vapor se forma y se levanta dentro del cilindro, echa de él el ayre, y calienta el agua que está sobre la cabeza del émbolo. Se hace pasar parte de esta agua por el tubo *6,6* al piloncito 5, abriendo su válvula á fin de que el agua entre en los tubos 2, 3, 4. Así que el vapor tiene bastante fuerza para abrir la válvula que cierra la chimenea 10,10, y salir con estrépito, el conductor que está esperando este momento, coge con una mano el mango del martillo, y con la otra el martillo *p*, y cierra el regulador; un instante despues abre la llave de inyec-

cion

cion que hace bajar el émbolo. Despues el regulador se abre Fig.
por sí, y la máquina prosigue obrando sin llegar á ella. Se la para con levantar la válvula de la nariz 10,10 de la alquitara, arrojando el agua de la caldera, y apagando la lumbre.

841 Es facil de calcular el efecto de esta máquina, por medio de la fórmula dada (819), valuando co- 196.
mo corresponde el peso *B*. Yá se vé que todo estriva en combinar la fuerza del vapor y la presion de la atmósfera, con los demás pesos de que está cargado el brazo de la palanca, y en procurar que la suma de los momentos de todas las fuerzas que hacen subir el émbolo, sea igual á la suma de los momentos de todas las fuerzas que le hacen bajar. Con esto se averiguará la cantidad de agua que las bombas pueden sacar del pozo en un tiempo dado.

842 Al estenderse el vapor comprime con mucha fuerza las paredes interiores de la alquitara, y del cilindro; esta fuerza obra perpendicularmente de adentro afuera en todos los puntos de dichas paredes; la destruye en gran parte la presion del ayre esterior que circunda la máquina, y obra perpendicularmente á las mismas paredes de afuera adentro. Quando todas las partes no resisten igualmente, ni con bastante fuerza, las mas endebles se rebientan; este accidente ha sucedido algunas veces, particularmente en las primeras máquinas que se construyeron.

843 Las bombas de fuego son de diferentes tamaños, conforme las miras con que se construyen. Las hay

cu-

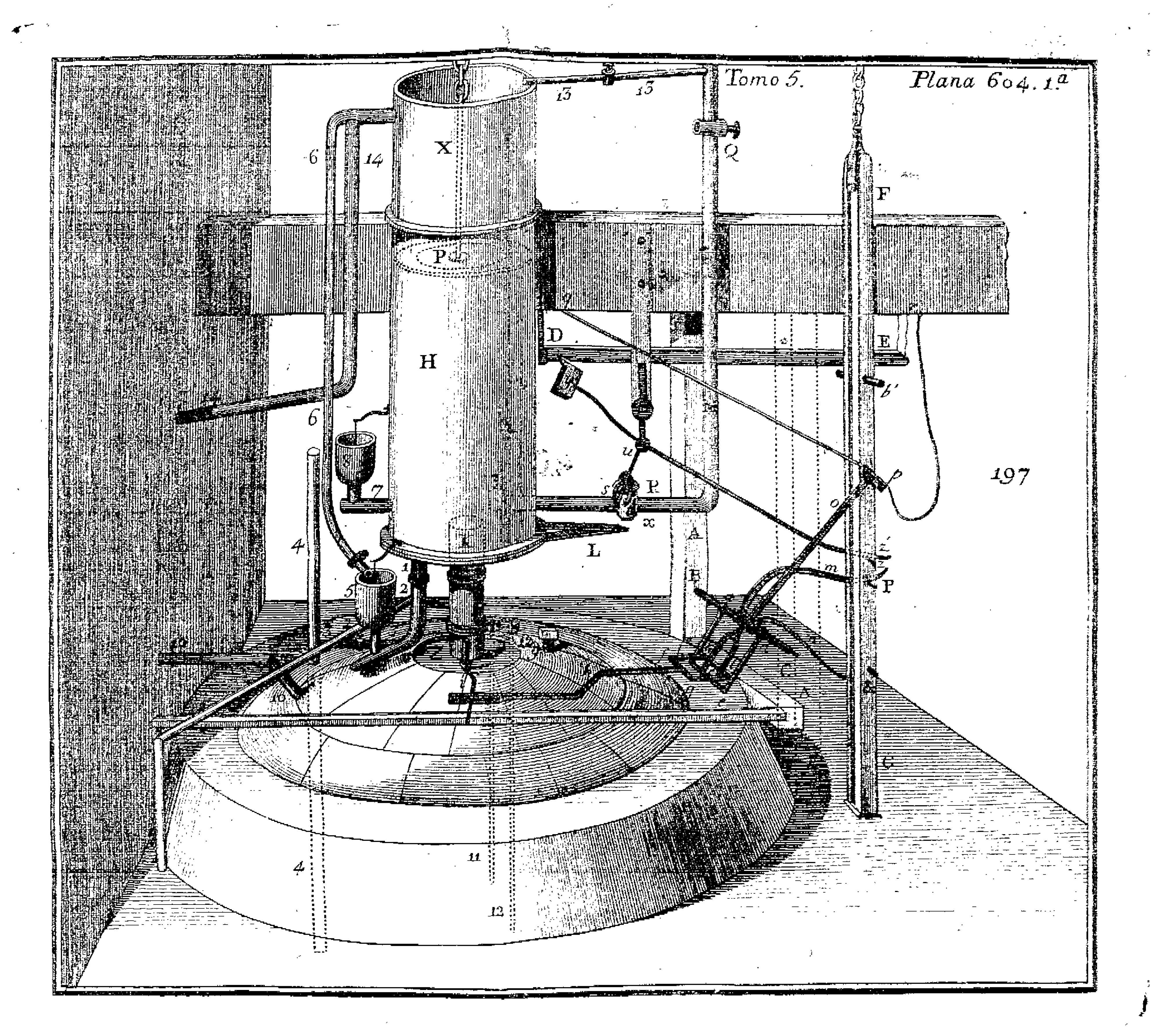
Fig. cuyo cilindro tiene *6* pies de diámetro interior, y el émbolo *6* á *7* pies de carrera. Haylas todavia mayores, y para estas suele haber dos calderas que se comunican con el mismo cilindro, y se hacen cocer alternadamente. Las dimensiones de las demás partes de la máquina se determinan á proporcion.

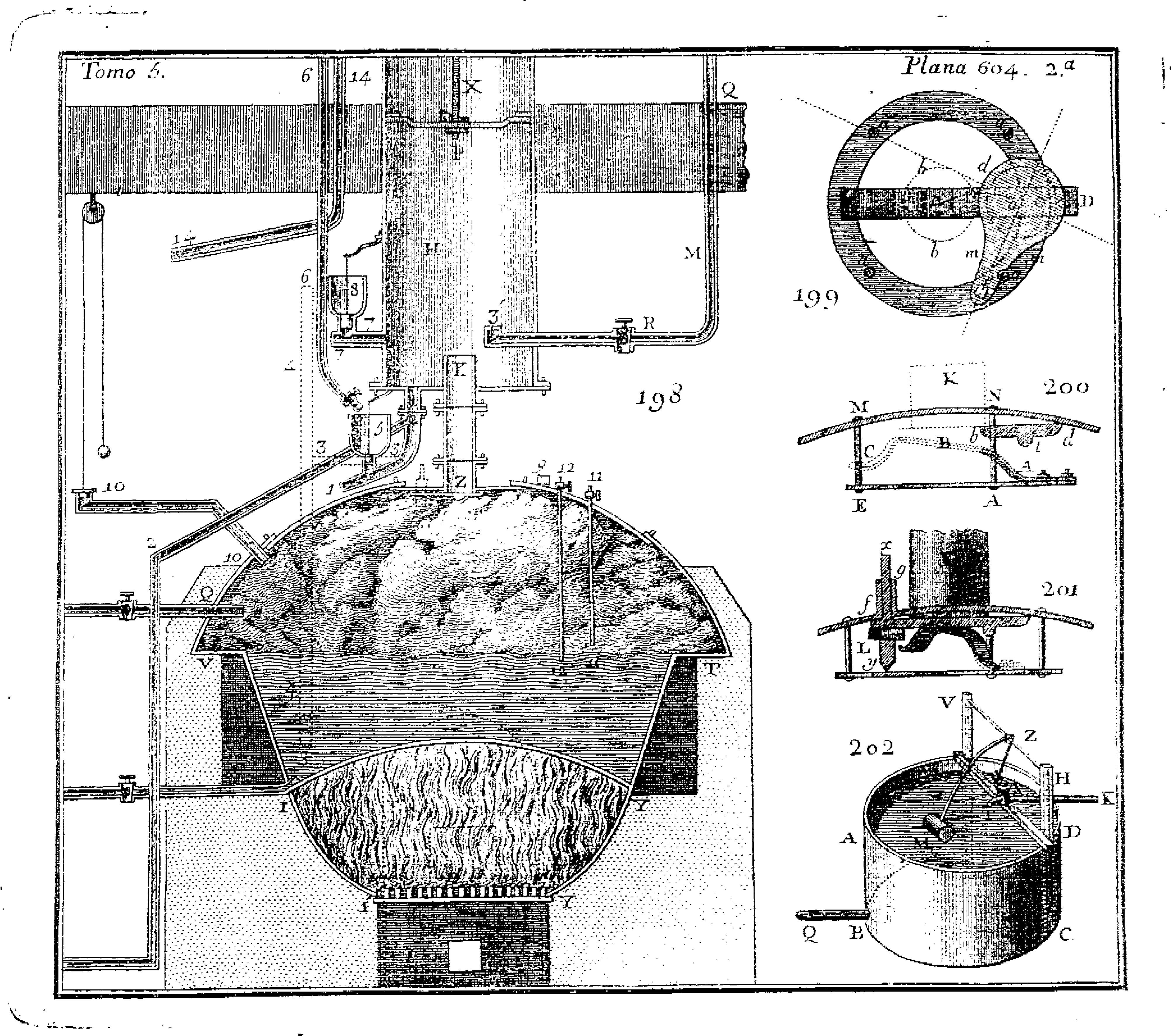
En la bomba de fuego que hay de algunos años á esta parte en las minas de carbon de *Montrelais* en los confines del Anjou y de la Bretaña, el cilindro tiene 5 2 $\frac{1}{2}$ pulgadas de diámetro, y *9* $\frac{1}{2}$ pies de alto; la carrera del émbolo es de unos *6* $\frac{1}{2}$ pies. Levanta el agua de *6*0 pies de profundidad, con seis repeticiones de bombas que tienen 3 $\frac{1}{2}$ pulgadas de diámetro. La caldera tiene 15 $\frac{1}{2}$ pies de diámetro; su suelo es convexo. La palanca tiene 25 pies de largo, y 36 pulgadas de esquadra en su medio. No hay mas de una caldera.

En la bomba de *Fresne*, el cilindro tiene 44 pulgadas de diámetro, y *9* pies de alto, la carrera del émbolo es de *6* pies; la palanca tiene 25 pies de largo &c.

FIN

DEL TOMO QUINTO.


Tomo 5.
Plana 604. 1.ª
197
X
13
13
Q
6
14
F
P
D
E
H
6
b'
u
s
P
p
7
o
x
A
L
4
1
2
5
m
P
10
4
11
12



Tomo 5.
Plana 604. 2.ª
198
199
200
201
202